SHOUT
SHARE
IT

Wandsworth

S 1802-D1

5-

Academies, &c. — St. Petersburg. — Imperatorskiya Akademiya nauk

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS A

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME I.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1831.

Se vend chez Graeff, libraire, Commissionnaire de l'Académie. Place de l'Amirauté, maison Stcherbakoff
N° 91. Prix 18 R°. pour la Russie; 24 R°. pour l'étranger.

PUBLIÉ PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

En Octobre 1831.

Le secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE VOLUME.

Pag.

Investigatio generis percussionum punctum axemve fixum corporis dati solidi vi nulla afficientium, auctore *Schultén*, Professore Matheseos in Univ. Caes. Alex. Helsingforsiae 3

Recherches sur la parabole, déterminée par la méthode des moindres carrés, et qui représente le moins défectueusement possible un système quelconque de points donnés dans un plan, par M. *Degen*, ci-devant Prof. de Math. à Copenhague 12

Tentamen ill. Euleri speculationem de formulis concordibus et discordibus promovendi, *ejusdem* 29

Recherche générale sur la quantité de lumière directe ou indirecte envoyée dans l'oeil par des objets lumineux, par M. *Schultén* 39

Mémoire sur la construction des chaussées et sur la détermination des distances moyennes pour le transport des matériaux. (Avec deux planches gravées). Par M. le Lieut.-Gén. ***Bazaine***, Directeur de l'Institut des voies de communication 52

Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géométrie à trois dimensions, par M. *Bartels*, Prof. de Math. à l'Univ. Imp. de Dorpat 77

Sur la direction et l'intensité de la force magnétique à St.-Pétersbourg, par M. le D^r^. *Ad. Erman* de Berlin 97

De nonnullis problematis analyticis caute tractandis, auctore D^re^ M. *Ohm*, Prof. Math. in Univ. Regia Berolinensi 109

Pag.

Observations sur les salines de la Nouvelle-Russie, par M. *Hauy*, Ancien Off. du Corps des voies de communication 131

Examen du littoral de la Mer Noire compris entre les embouchures du Boug et du Dniestre (Suite du précédent mémoire, avec deux planches lithographiées), par *le même* 154

Ueber einige Vögel von Chili, beobachtet im März und Anfang April 1827. (Avec douze planches gravées et enluminées). Par M. *F. H. de Kittlitz*, naturaliste de l'expédition du Séniavin 174

Cyperaceae novae descriptionibus et iconibus illustratae, auctore D^{re} *C. A. Meyer.* (Avec quatorze planches lithographiées) 195

Ueber die Vögel der Inselgruppe von Boninsima, beobachtet zu Anfang May 1828. (Avec quatre planches gravées et enluminées). Par M. *de Kittlitz* 231

Ueber die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten durch Wärme, von D^{r}. *G. H. Muncke*, Hofr. u. Prof. d. Phys. an der Univ. zu Heidelberg 249

Précis d'un nouvel arrangement de la famille des Brachélytres, de l'ordre des insectes coléoptères, par M. le Cte. *Mannerheim* 415

Mémoires sur une question de géométrie relative aux tactions des cercles, par M. le D^{r}. *Paucker*, Prof. de Math. au Gymnase de Mitau 503

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS À

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS,

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES

TOME PREMIER.

1re LIVRAISON.

ST.-PÉTERSBOURG,
DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1830.

Se vend chez M. Graeff, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison Stcherbakoff N°. 91 et à Leipzic chez M. Cnobloch.

Publié avec l'approbation de l'Académie.

En Janvier 1830.

Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

MÉMOIRES

DES

SAVANS ÉTRANGERS.

TOME I.

Mém. des sav. étrang. T. I. 1

NATURAL HISTORY

INVESTIGATIO

generis percussionum punctum axemve fixum corporis dati solidi vi nulla afficientium.

AUCTORE

N. G. AF SCHULTÉN.

Matheseos professore in Caes. Universitate litterarum Fennica

(Conventui exhib. die 27. Junii 1821.)

In doctrina vulgari de centro percussionis corporis solidi e puncto fixo suspensi de indole percussionis punctum istud non offendentis resultatum adferri notissimum diffitendum non est: praeterquam autem quod per theoriam hancce apud omnes fere Mechanicae Elementaris auctores obvenientem exhausta minime censeri queat quaestio generalis de percussionibus punctum corporis solidi datum non afficientibus, doctrina quoque de genere percussionum axem hujusmodi corporis fixum non urgentium ulteriori egere explicatione mihi est visa, unde tentamen aliquod hac in materie instituendum prorsus inter inutilia referendum non esse judicavi, quod qualitercumque jam exantlatum examini Academiae Imperialis eo potius offere audeo, quod totum quantum evolutione tantum nititur principiorum quorumdam generalium in alio de collisione corporum solidorum tractatulo expositorum, quem indulgenti Academiae censurae non ita pridem subjicere mihi licuit.

11 *

Casus igitur tres status corporis solidi non liberi in opella citata consideratos repetendo, in sequentibus igitur mobile statuamus corpus solidum

1) Circa punctum fixum.
2) Circa axem fixum, secundum cujus longitudinem progredi possit corpus.
3) Circa axem fixum, secundum cujus longitudinem progredi non possit corpus.

Pro quolibet horum casuum peculiari modo determinatum esse problema nostrum praesens in antecessum observandum jam est, quod quo luculenter pateat, pro eorum quoque ante omnia eruendae sunt vires, quibus punctum axemve fixum afficere censenda est percussio quaelibet k in directione agens aequationibus generalibus

$$\left.\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= \alpha x + \beta \end{aligned}\right\}$$

definita: id quod facile quidem efficietur, si in aequationibus dissertationis citatae casus praesentes respicientibus eliminatio tantum instituitur quantitatum ibidem occurrentium e, f, g atque γ, ad motus tantum corporis ex percussione k oriundos se referentium.

Hac utique ratione pro casu 1) prodire videbimus aequationes

$$\left.\begin{aligned} l' + \frac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(1 - \frac{\beta\sigma\mu}{\eta} - \frac{b\varrho\mu}{\vartheta}\right) &= 0 \\ m' + \frac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(a + \frac{b\pi\mu}{\vartheta} - \frac{(a\beta - \alpha b)\,\sigma\mu}{\xi}\right) &= 0 \\ n' + \frac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(\alpha + \frac{(a\beta - \alpha b)\,\varrho\mu}{\xi} + \frac{\beta\pi\mu}{\eta}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (1),$$

acceptis scilicet pro axibus coordinatarum x, y, z puncti de quo agitur fixi axibus principalibus, exsistentibusque l, m, n viribus impulsionum punctum fixum hosce secundum axes ipsam ob percussionem k respective urgentibus, nec non

ζ, η, ϑ momentis corporis inertiae pro iisdem respective axibus, μ tota corporis massa tandemque π, ϱ, σ coordinatis centri corporis inertiae.

Pro casu autem 2) ad aequationes perveniemus sequentes

$$\left.\begin{array}{l}
l' + l'' + \dfrac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(1 - \dfrac{b\, S y d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
m' + m'' + \dfrac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(a + \dfrac{b\, S x d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
l'' + \dfrac{k}{c\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(\beta + \dfrac{\alpha\, S x d\mu}{\mu} - \dfrac{b\, S y z d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
m'' + \dfrac{k}{c\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(a\beta - \alpha b + \dfrac{\alpha\, S y d\mu}{\mu} + \dfrac{b\, S x z d\mu}{\vartheta}\right) = o
\end{array}\right\} \cdot\cdot (2),$$

assumto nimirum pro axe $\tau o \upsilon$ z axe ipso fixo, origine ipsius z axibusque $\tau \omega \nu$ x, y pro arbitrio acceptis, nec non existentibus l', m' et l'', m'' viribus impulsionum in puncta axeos fixi quorum coordinatae sunt o, o, o et o, o, c respective ipsam ob percussionem secundum axes $\tau \omega \nu$ x, y respective agentibus, S signo summatorio totum corporis de quo agitur volumen respiciente, tandemque ut nuperrime, ϑ momento inertiae axeos $\tau o \upsilon$ z ut et μ tota corporis massa.

Denique casum quod attinet, 3) iisdem ex principiis aequationes habebimus sequentes

$$\left.\begin{array}{l}
l' + l'' + \dfrac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(1 - \dfrac{b\, S y d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
m' + m'' + \dfrac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(a + \dfrac{b\, S x d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
n' + \dfrac{k}{\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \alpha = o \\[2ex]
l'' + \dfrac{k}{c\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(\beta - \dfrac{b\, S y z d\mu}{\vartheta}\right) = o \\[2ex]
m'' + \dfrac{k}{c\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}} \cdot \left(a\beta - \alpha b + \dfrac{b\, S x z d\mu}{\vartheta}\right) = o
\end{array}\right\} \cdot\cdot (3),$$

omnibus ut in casu 2) manentibus, si observetur tantummodo per n' in casu praesente exprimi vim impulsionis axem fixum ob percussionem k secundum ejus longitudinem urgentem.

Hisce observatis ad institutum nostrum praesens id tantum superesse videtur, ut, positis in allatis nuper aequationibus (1), (2), (3)

$$l' = o,\quad m' = o,\quad n' = o,\quad l'' = o,\quad m'' = o,$$

quantitatum denique quinque a, b, α, β, k, percussionum quod jam quaerimus genus respicientium, debita fiat determinatio. Antequam autem ulterius progredimur, unam earum, ipsam scilicet k, in aequationibus citatis ea involvi ratione notandum est, ut pro omnibus ejus valoribus conditionibus satisfieri queat quaestionis praesentis, sicque indeterminata omnino haec maneat quantitas, unde sequitur adeo problema jam nostrum determinatione ipsarum a, b, α, β, id est, disquisitione de *directionibus* percussionum quaesitarum, totum quantum absolvi, quibus scilicet determinatis directionibus, pro qualibet omnino impulsionis quantitate absoluta, sive positiva ceterum ea sit sive negativa, obstacula ipsa fixa nulli obnoxia fore vi facile intelligitur.

Allatarum igitur quatuor quantitatum determinationem quod attinet, pro casu quidem 1) aequationes prodire perspicitur

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{\beta\sigma\mu}{\eta} - \frac{b\varrho\mu}{\vartheta} &= o \\ a + \frac{b\pi\mu}{\vartheta} - \frac{(a\beta + \alpha b)\,\sigma\mu}{\xi} &= o \\ \alpha + \frac{(a\beta - \alpha b)\,\varrho\mu}{\xi} + \frac{\beta\pi\mu}{\eta} &= o \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4);$$

quae cum numero tantum tres habeantur, indeterminatam manere sequitur unam ipsarum a, b, α, β, sicque in casu praesente harum etiam respectu quantitatum infinitarum capacem esse solutionum quaestionem perspicitur: quarum tamen ut accuratius innotescat indoles, trium quarumque ipsarum a, b, α, β valores functionum instar reliquae considerare non pigebit. Eligendo hunc in finem v. gr. a, b, α, abire facile videbitur systema (4) in sequens

$$a = \frac{-\pi\,(\xi-\vartheta)\,(\eta-\beta\sigma\mu)}{\varrho\,[(\xi-\vartheta)\,\eta-(\eta-\vartheta)\,\beta\sigma\mu]}$$

$$b = \frac{\vartheta\,(\eta-\beta\sigma\mu)}{\varrho\eta\mu}$$

$$\alpha = \frac{-(\xi-\eta)\,\beta\pi\mu}{(\xi-\vartheta)\,\eta-(\eta-\vartheta)\,\beta\sigma\mu},$$

pro quolibet ipsius β valore correspondentes των a, b, α valores conditionibus quaestionis convenientes immediate praebens.

Directiones igitur percussionum hoc in casu quaesitas per aequationes

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{-\pi\,(\xi-\vartheta)\,(\eta-\beta\sigma\mu)\,x}{\varrho\,[(\xi-\vartheta)\,\eta-(\eta-\vartheta)\,\beta\sigma\mu]} + \frac{\vartheta\,(\eta-\beta\sigma\mu)}{\varrho\eta\mu} \\ z &= \frac{-(\xi-\eta)\,\beta\pi\mu x}{(\xi-\vartheta)\,\eta-(\eta-\vartheta)\,\beta\sigma\mu} + \beta \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (5),$$

in genere definiri videtur, quantitate β plane indeterminata existente.

Eliminata duas inter (5) ipsa β, debitas post reductiones aequationem prodire sequentem secundi ordinis satisque simplicem observari convenit

$$\begin{aligned} &(\vartheta-\pi\mu x-\varrho\mu y)\,(\zeta\eta-\pi\zeta\mu x-\varrho\eta\mu y) - \\ &[(\zeta+\eta)\,\vartheta-(\zeta+\vartheta)\,\pi\mu x-(\eta+\vartheta)\,\varrho\mu y]\,\sigma\mu z + \\ &\vartheta\sigma^2\mu^2 z^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6); \end{aligned}$$

quae superficiei igitur est infinitas illas de quibus agitur directiones complectentis. Hanc vero superficiem, licet ex lineis tantum rectis compositam, ad earum tamen referendam non esse genus patet quae in planum explicari possunt, cum functionem scilicet

$$\frac{da}{d\beta} - \frac{db}{d\beta}\cdot\frac{d\alpha}{d\beta},$$

in

$$\frac{\pi\sigma\mu\;(\xi-\vartheta)\;(\eta-\vartheta)\;(\xi-\eta)}{\rho\;[(\xi-\vartheta)\,\eta-(\eta-\vartheta)\,\beta\sigma\mu)^2}$$

jam abeuntem, in genere non evanescere videatur.

Positis ceterum in (6) $z = o$, $y = o$, $x = o$ successive, secari perspicimus superficiem de qua agitur a plano xy secundum rectas aequationibus definitas

$$\left.\begin{array}{l} z = o \\ \vartheta - \pi\mu x - \varrho\mu y = o \end{array}\right\} \text{ et } \left.\begin{array}{l} z = o \\ \zeta\eta - \pi\zeta\mu x - \varrho\eta\mu y = o \end{array}\right\},$$

a plano xz secundum rectas aequationibus expressas

$$\left.\begin{array}{l} y = o \\ \eta - \pi\mu x - \sigma\mu z = o \end{array}\right\} \text{ et } \left.\begin{array}{l} y = o \\ \zeta\vartheta - \pi\zeta\mu x - \sigma\vartheta\mu z = o \end{array}\right\},$$

nec non a plano yz secundum rectas quarum sunt aequationes

$$\left.\begin{array}{l} x = o \\ \zeta - \varrho\mu y - \sigma\mu z = o \end{array}\right\} \text{ et } \left.\begin{array}{l} x = o \\ \eta\vartheta - \varrho\eta\mu y - \sigma\vartheta\mu z = o \end{array}\right\},$$

Erraret autem omnino, qui hinc concluderet duas in memoratorum quoque planorum sitas haberi directiones percussionum initium coordinatarum non afficientium: attentius scilicet re considerata, facile apparebit rectas tantum aequationibus expressas

$$\left.\begin{array}{l} z = o \\ \vartheta - \pi\mu x - \varrho\mu y = o \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} y = o \\ \eta - \pi\mu x - \sigma\mu z = o \end{array}\right\} \text{ et } \left.\begin{array}{l} x = o \\ \zeta - \varrho\mu y - \sigma\mu z = o \end{array}\right\},$$

ad ejusmodi reapse referendas esse directiones; ceteras autem ipsis expressas

$$\left.\begin{array}{l} z = o \\ \zeta\eta - \pi\zeta\mu x - \varrho\eta\mu y = o \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} y = o \\ \zeta\vartheta - \pi\zeta\mu x - \sigma\vartheta\mu z = o \end{array}\right\} \text{ et } \left.\begin{array}{l} x = o \\ \eta\vartheta - \varrho\eta\mu y - \sigma\vartheta\mu z = o \end{array}\right\},$$

in superficie licet saepius citata positas, talium tamen directionum revera non fungi vicibus, id quod eo facilius intellectu erit, si observetur tantum ea quoque ratione determinari posse quamque directionum de quibus agitur infinitarum, ut allatarum nuperrime rectarum trium posteriorum cuique, ad arbitrium ceteroquin sumta, occurrere semper ponenda sit.

Ad casum vero jam 2) considerandum transgrediamur, pro quo quidem aequationes prodire patet sequentes

$$\left.\begin{aligned}
&1 - \frac{b\,Sy\,d\mu}{\vartheta} = o\\
&a + \frac{b\,Sx\,d\mu}{\vartheta} = o\\
&\beta + \frac{\alpha\,Sx\,d\mu}{\mu} - \frac{b\,Syz\,d\mu}{\vartheta} = o\\
&a\beta - \alpha b + \frac{\alpha\,Sy\,d\mu}{\mu} + \frac{b\,Sxz\,d\mu}{\vartheta} = o
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7),$$

quae cum ejusdem sint numeri ac incognitae ipsae a, b, α, β, determinatam hoc in casu omnino haberi quaestionem nostram sequitur, atque prodire adeo

$$a = -\frac{Sx\,d\mu}{Sy\,d\mu}$$

$$b = \frac{\vartheta}{Sy\,d\mu}$$

$$\alpha = \frac{\mu\,(Sx\,d\mu\,.\,Syz\,d\mu - Sy\,d\mu\,.\,Sxz\,d\mu)}{Sy\,d\mu\,.\,(Sx\,d\mu^2 + Sy\,d\mu^2 - \vartheta\mu)}$$

$$\beta = \frac{Sy\,d\mu\,(Sx\,d\mu\,.\,Sxz\,d\mu + Sy\,d\mu\,.\,Syz\,d\mu) - \vartheta\mu\,.\,Syz\,d\mu}{Sy\,d\mu\,(Sx\,d\mu^2 + Sy\,d\mu^2 - \vartheta\mu)}\,.$$

Quibus in valoribus cum axes των x, y plane habeantur arbitrarii, simpliciores quodammodo eosdem reddi posse observari convenit ducto plano yz per centrum corporis inertiae, unde fieri patet $Sx\,d\mu = o$. Prodibunt scilicet hoc modo

$$a = o,\quad b = \frac{\vartheta}{Sy\,d\mu},\quad \alpha = \frac{\mu\,.\,Sxz\,d\mu}{\vartheta\mu - Sy\,d\mu^2},\quad \beta = \frac{Syz\,d\mu}{Sy\,d\mu}\,.$$

Pro casu denique 3) aequationes haberi sequentes videtur

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{b\,Sy\,d\mu}{\vartheta} = 0 \\ a + \frac{b\,Sx\,d\mu}{\vartheta} = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta - \frac{b\,Syz\,d\mu}{\vartheta} = 0 \\ a\beta - \alpha b + \frac{b\,Sxz\,d\mu}{\vartheta} = 0 \end{array}\right\} \;\cdots\cdots (8),$$

quae, utpote numero quinque, plus quam determinatam hoc in casu quaestionem nostram haberi, sicque omnibus ejus conditionibus non semper satisfieri posse, indicant. Ad casum igitur maxime generalem, quo resolvi eadem queat, eruendum, per quatuor ipsarum (8) omnium quaerantur *των* a, b, α, β valores, qui in quinta deinde substituti ad aequationem ducent ex ipsis a, b, α, β non pendentem, qua conditio quaesita exhibebitur. Prodibunt hac ratione ipsae (8) sub forma

$$a = -\frac{Sx\,d\mu}{Sy\,d\mu}$$

$$b = \frac{\vartheta}{Sy\,d\mu}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{Syz\,d\mu}{Sy\,d\mu}$$

$$Syd\mu \,.\, Sxzd\mu - Sxd\mu \,.\, Syzd\mu = 0,$$

quarum igitur ultima conditionem exprimit memoratam maxime universalem cui satisfaciat necesse est corpus de quo agitur solidum, ut percussio quaedam axem non laedens *του* z in casu obtineri queat praesente.

Ut hypothesin autem coordinatarum ad resultata simplicissima ducentem adhibeamus, fiat uti nuper $S x d\mu = o$, unde prodibunt

$$a = o, \quad b = \frac{\vartheta}{S y d\mu}, \quad \alpha = o, \quad \beta = \frac{S y z d\mu}{S y d\mu}, \quad S x z d\mu = o,$$

quandoquidem, ut per valorem intelligitur ipsius b, ipsa evanescere ponenda non est $S y d\mu$. Sicque in casu de quo agitur resultatum proponi sequens simplicissimum potest:

Plano yz per centrum corporis inertiae transeunte, percussio quaedam axem ipsius z vi nulla urgens in eo tantum casu possibilis est, quo evanescit quantitas $S x z d\mu$: hac autem conditione impleta, quantitas hujusmodi percussionis pro lubitu assumi potest, directio autem ejus ad planum yz normalis erit, eidemque plano in puncto cujus ab axe του z distantia $= \frac{S\,(x^2 + y^2)\,d\mu}{S y d\mu}$, ab axe autem του $y = \frac{S y z d\mu}{S y d\mu}$, occurret.

Ut infinitos autem haberi casus diffitendum non sit, quibus aequatio locum non habet

$$S x z d\mu = o,$$

sicque nullum possibile sit genus percussionum axem corporis solidi datum non afficientium, vice tamen versa infinitos etiam dari alios ubi huic satisfit conditioni notandum probe est, ad quos v. gr. pertinent corpora omnia plana axem de quo agitur fixum ad planum eorum normalem sive hoc ipso in plano positum habentia, sicque porro.

Quod si postulare cuidam placeret, ut directio percussionis axem non urgentis plano yz occurreret in puncto distantiam $\frac{S z d\mu}{\mu}$ ab axe του y habente, ex allatis nuperrime perspicitur requiri hoc in casu adhuc conditionem

$$S y d\mu \,.\, S z d\mu - \mu \,.\, S y z d\mu = o,$$

id est, assumto initio του z adeo ut evanescat $S z d\mu$, conditionem

$$S y z d\mu = o.$$

Unde sequitur igitur, corpus solidum circa axem fixum secundum cujus longitudinem progredi nequit mobile, ea tantum conditione in recta a centro inertiae in axem normaliter ducta, axeos quidem suspensionis nomine vulgo designata, situm habere posse centrum percussionis, ut, assumtis pro axibus των z et y axe ipso fixo axeque suspensionis respective, aequationibus satisfiat duabus

$$Sxzd\mu = o, \quad Syzd\mu = o.$$

RECHERCHES

sur la parabole, déterminée par la méthode des moindres carrés et qui représente le moins défectueusement, qu'il soit possible, un système quelconque de points donnés dans un plan.

Par

CH. F. DEGEN,

ci-devant Prof. de Mathématiques à l'Université Royale de Copenhague.

(Lu à l'Académie le 29. Janvier 1823.)

> Все минется, одна правда останется. Посл.

C'est communément au frontispice du temple d'Uranie, que le monde adresse ses hommages. Son intérieur n'admet que des Époptes, les seuls qui osent s'approcher du feu sacré qui brûle sur ses autels. L'Astronomie, qui élève l'esprit de l'homme au-dessus de son habitation actuelle et qui le remplit des idées les plus sublimes, que deviendrait-elle aux yeux du vulgaire, sans la concordance perpétuelle de ses prédictions avec les phénomènes de la voûte étoilée? Combien petit est le nombre de ceux, qui sachent apprécier les bienfaits, que lui doivent la Chronologie, la Géographie, la Navigation! combien moindre encore doit être celui des personnes capables de se former une idée approchante des travaux des d'**Alembert**, des **Clairaut**, des **Tobie Mayer**, des **Euler**, des **Gauss**, des **Laplace**! Je demande: Que deviendrait-elle aux yeux de ceux, qui ne jugent que par les apparences ou par les yeux d'autrui, si non une occupation tout au plus assez bonne pour des oisifs, nés pour passer leur vie à rêver? Le concours de la Géométrie la plus sublime, de l'Analyse la plus fine, le mécanisme presque magique des instruments et leur perfection, les soins extrêmes qu'on porte aux observations délicates et la critique profonde avec laquelle on les discute pour en faire le meilleur choix, les calculs immenses qui requièrent une patience à toute épreuve, et le nombre de Tables auxiliaires de toute espèce, nécessaires pour prédire avec précision les positions et la marche des corps célestes, tout cela se dérobe aux faibles regards de ceux qui ne sauroient admirer chez **Herschel** que la prodigieuse grandeur de son télescope, sans entrevoir celle de son génie.

2) La methode des moindres carrés, qu'on peut appeller de nouvelle date, et qui fait partie de cette critique dont je viens de parler, ne laisse pas, non obstant les calculs assez longs, auxquels elle oblige pour un grand nombre d'observations ou d'éléments, d'étre la plus simple, comme elle est la plus avantageuse parmi toutes les manières de combiner les équations de condition. Tout autre système, dérivé d'une somme de puissances au-dessus du carré, mèneroit à des calculs impraticables. Il y a même des cas particuliers, qu'il vaudra bien la peine d'examiner plus attentivement, puisque, non obstant la multitude des éléments, la détermination des inconnues y devient extrèmement facile. C'est l'un de ces cas que dans le présent mémoire j'ose présenter à l'illustre Académie, comme assez remarquable, soit par le nombre indéterminé de termes de la série qu'il présente, soit par la singularité d'un phénomène analytique qui l'accompagne.

3) Supposons qu'à la suite des abscisses

$x = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots \nu$ réponde cette suite d'ordonnées

$y = a, b, c, d, e, f \ldots n$ dont le nombre N est supposé > 3 et qu'on veuille représenter la loi, qui unisse le séries de ce systeme, par la formule du second degré : $y = p - qx + rx^2$, il est clair qu'on aura à satisfaire aux n équations qui suivent :

$$\begin{matrix} a = p - q\alpha + r\alpha^2 & c = p - q\gamma + r\gamma^2 \\ b = p - q\beta + r\beta^2 & d = p - q\delta + r\delta^2 \end{matrix} \quad \text{etc. etc. jusqu'à } n = p - q\nu + r\nu^2$$

chose impossible tandisque $N > 3$. Il faut donc, pour obtenir la formule la moins défectueuse, avoir recours à la méthode des moindres carrés.

4) Or cette méthode fournit les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{matrix} 1)\ pS\alpha^0 - qS\alpha + rS\alpha^2 = Sa \\ 2)\ pS\alpha - qS\alpha^2 + rS\alpha^3 = S\alpha a \\ 3)\ pS\alpha^2 - qS\alpha^3 + rS\alpha^4 = S\alpha^2 a \end{matrix}\right\} \ldots (\mathrm{A}) \ \left\{\begin{matrix} \text{où } S\alpha^h a^k \text{ représente la somme} \\ \text{des produits} \\ \alpha^h a^k + \beta^h b^k + \gamma^h c^k + + \nu^h n^k \end{matrix}\right.$$

et en faisant $D = [S\alpha^4\, S\alpha^2 - S\alpha^3\, S\alpha^3]\, S\alpha^0 - [S\alpha^4\, S\alpha - S\alpha^3\, S\alpha^2]\, S\alpha + [S\alpha^3\, S\alpha - S\alpha^2\, S\alpha^2]\, S\alpha^2$, on aura, au moyen des formules connues, ces valeurs des coéfficients inconnus :

$$\left.\begin{matrix} p = \left\{[S\alpha^4 S\alpha^2 - S\alpha^3 S\alpha^3]\, Sa - [S\alpha^4 S\alpha - S\alpha^3 S\alpha^2]\, S\alpha a + [S\alpha^3 S\alpha - S\alpha^2 S\alpha^2]\, S\alpha^2 a\right\} : D \\ q = \left\{[S\alpha^4 S\alpha - S\alpha^3 S\alpha^2]\, Sa - [S\alpha^4 S\alpha^0 - S\alpha^2 S\alpha^2]\, S\alpha a + [S\alpha^3 S\alpha^0 - S\alpha^2 S\alpha]\, S\alpha^2 a\right\} : D \\ r = \left\{[S\alpha^3 S\alpha - S\alpha^2 S\alpha^2]\, Sa - [S\alpha^3 S\alpha^0 - S\alpha^2 S\alpha]\, S\alpha a + [S\alpha^2 S\alpha^0 - S\alpha\, S\alpha]\, S\alpha^2 a\right\} : D \end{matrix}\right\} \ldots (B)$$

5) Je passerai, sans m'arrêter à cette solution générale, aux conséquences particulières qui en découlent. Soit donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3, \ldots\ldots \nu = N$ et on aura

$$S\alpha^0 = \nu;\ S\alpha = \frac{\nu \,.\, \overline{\nu + 1}}{1 \,.\, 2};\ S\alpha^2 = \frac{\nu \,.\, \overline{\nu + 1} \,.\, \overline{2\nu + 1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3};\ S\alpha^3 = (S\alpha)^2 = \frac{\nu^2 \,.\, \overline{\nu + 1}^2}{1 \,.\, 4} \text{ et}$$

$$S\alpha^4 = \frac{\nu \,.\, \overline{\nu + 1} \,.\, \overline{2\nu + 1} \,.\, \overline{3\nu^2 + 3\nu - 1}}{2 \,.\, 3 \,.\, 5} = \frac{3\nu^2 + 3\nu - 1}{5}\, S\alpha^2.$$

Introduisant ces valeurs et représentant avec **Euler** le coéfficient binomial

$$\frac{k \,.\, \overline{k - 1} \,.\, \overline{k - 2} \ldots\ldots \overline{k - m + 1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\ldots m} \text{ par } \left[\frac{k}{m}\right]$$

l'on trouvera, après plusieurs réductions, décompositions en facteurs linéaires et divisions, ces formules générales :

$$\left.\begin{aligned} p &= \left\{\left(3\left[\frac{\nu+1}{2}\right]+1\right)a' - 3\,(2\nu+1)\,b' + 5\,c'\right\} : \left[\frac{\nu}{3}\right] \\ q &= \frac{3\,(2\nu+1)}{\left[\frac{\nu}{3}\right]}\,a' - \frac{(2\nu+1)\,(8\nu+11)}{10\,.\left[\frac{\nu+2}{5}\right]}\,b' + \frac{3\,(\nu+1)}{2\,.\left[\frac{\nu+2}{5}\right]}\,c' \\ r &= \frac{5}{\left[\frac{\nu}{3}\right]}\,a' - \frac{3\,(\nu+1)}{2\,.\left[\frac{\nu+2}{5}\right]}\,b' + \frac{3}{2\,.\left[\frac{\nu+2}{5}\right]}\,c' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C)$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$\begin{aligned} a' &= a + b + c + + n \\ b' &= a + 2b + 3c + + \nu n \\ c' &= a + 4b + 9c + + \nu^2\, n. \end{aligned}$$

Ces formules, dont l'aspect est peu régulier, fournissent la parabole la plus propre à représenter la série : a, b, c, d, ... n, composée de n termes, savoir

$$y = p - qx + rx^2.$$

Qu'ayant fait successivement $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots \nu - 1,\ \nu$;

y devienne $a_1\ \ b_1\ \ c_1\ \ d_1\ \ldots\ldots\ n_1$ et on aura

1) la somme des écarts: $\overline{a-a_1} + \overline{b-b_1} + \overline{c-c_1} + + \overline{n-n_1}$ égale à zéro;

2) la somme des carrés de ces mêmes écarts égale à un Minimum.

6) Enfin, en étendant l'intégrale $\frac{\int y\,dx}{x} = \left[px - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{3}rx^3\right] : x$ depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \nu$, on aura la *valeur moyenne* de toutes les ordonnées de cette parabole, entre les limites assignées,

$$M = p - \tfrac{1}{2}q\,(\nu+1) + \tfrac{1}{3}r\,(\nu^2+\nu+1),$$

ou bien en substituant les valeurs trouvées ci-dessus pour p, q, r :

$$M = \frac{\overline{\nu+1}\,.\,\overline{\nu+2}\,.\,\overline{\nu-7}\,.\,a' + 30\,.\,\overline{\nu+1}\,.\,b' - 30c'}{\nu\,.\,\overline{\nu+1}\,.\,\overline{\nu+2}\,.\,\overline{\nu-1}} \ldots\ldots (D)$$

expression qui ne présente aucune trace de symmétrie, mais qui néanmoins, comme nous irons le voir dans la suite, renferme, sous son enveloppe irrégulière, les germes d'une symmétrie parfaite, quel que soit le nombre ν et, par conséquent, l'étendue des caractères a', b', c'.

7. Puisque la détermination des valeurs a', b' et c' n'offre aucune difficulté, je donnerai ici les valeurs de p, q, r depuis $\nu=3$ jusqu'à $\nu=12$ ainsi que celles de M, entre les mêmes limites. Ainsi l'on trouvera pour

$\nu=3,\quad p=19a'-21b'+5c'\,;\qquad r=5a'-6b'+\tfrac{3}{2}c'$
$\qquad q=21a'-\tfrac{49}{2}b'+6c'\,;\qquad M=[-8a'+12b'-3c']:6$
$\nu=4,\quad p=[31a'-27b'+5c']:4\qquad r=[5a'-5b'+c']:4$
$\qquad q=[135a'-129b'+25c']:20\,;\qquad M=[-3a'+5b'-c']:8$
$\nu=5,\quad p=[46a'-33b'+5c']:10\,;\qquad r=[7a'-6b'+c']:14$
$\qquad q=[231a'-187c'+30c']:70\,;\qquad M=[-14a'+30b'-5c']:105$
$\nu=6,\quad p=[64a'-39b'+5c']:20\,;\qquad r=[28a'-21b'+3c']:112$
$\qquad q=[1092a'-767b'+105c']:560\,;\qquad M=[-28a'+105b'-15c']:672$
$\nu=7,\quad p=[17a'-9b'+c']:7\,;\qquad r=[36a'-8b'+3c']:252$
$\qquad q=[324a'-201b'+8c']:252\,;\qquad M=[8b'-c']:84$
$\nu=8,\quad p=[109a'-51b'+5c']:56\,;\qquad r=[15a'-9b'+c']:168$
$\qquad q=[153a'-85b'+3c']:168\,;\qquad M=[3a'+9b'-c']:144$
$\nu=9,\quad p=[136a'-57b'+5c']:84\,;\qquad r=[55a'-30b'+3c']:924$
$\qquad q=[3135a'-1577b'+150c']:4620\,;\qquad M=[22a'+30b'-3c']:693$
$\nu=10,\quad p=[166a'-63b'+5c']:120\,;\qquad r=[22a'-11b'+c']:528$
$\qquad q=[1386a'-637b'+55c']:2640\,;\qquad M=[66a'+55b'-5c']:1760$
$\nu=11,\quad p=[199a'-69b'+5c']:165\,;\qquad r=[26a'-12b'+c']:858$
$\qquad q=[1794a'-759b'+60c']:4290\,;\qquad M=[104a'+60b'-5c']:2574$
$\nu=12,\quad p=[47a'-15b'+c']:44\,;\qquad r=[91a'-39b'+3c']:4004$
$\qquad q=[1365a'-535b'+39c']:4004\,;\qquad M=[91a'+39b'-3c']:2184.$

8. En ramenant les quantités a, b, c, d . . . . on obtiendra pour

$$\nu = 3, \quad \begin{cases} p = 3a - 3b + c \\ q = [5a - 8b + 3c] : 2 \\ r = [\,a - 2b + c] : 2 \end{cases}$$

$$\nu = 4, \quad \begin{cases} p = [9a - (3b + 5c) + 3d] : 4 \\ q = [31a - (23b + 27c) + 29d] : 20 \\ r = [a - (b + c) + d] : 4 \end{cases}$$

$$\nu = 5, \quad \begin{cases} p = [9a - (4c + 3d) + 3e] : 5 \\ q = [74a - (23b + 60c + 37d) + 46e] : 70 \\ r = [2a - (b + 2c + d) + 2e] : 14 \end{cases}$$

$$\nu = 6, \quad \begin{cases} p = [15a + 3b - (4c + 6d + 3e) + 5f] : 10 \\ q = [215a - (11b + 132c + 148d + 59e) + 135f] : 280 \\ r = [5a - (b + 4c + 4d + e) + 5f] : 56 \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Je ne pousserai pas plus loin le développement de ces formules. puisqu'elles n'offrent rien de remarquable, si tout au plus on excepte l'expression du coëfficient r, dans laquelle le numérateur est symmétrique par rapport aux coëfficiens dont la somme se trouvera partout égale à zéro, comme cette même somme s'évanouit également dans le numérateur de q, mais devient, dans celui de p, égale à son dénominateur; phénomène dont la raison est évidente, puisque $a = b = c = d = \dots\dots$ fournit la suite: $a, a, a, a \dots\dots$ exprimée en conséquence par $y = a$, ce qui donne $p = 1$; $q = 0$ et $r = 0$. Le numérateur de r s'évanouira encore et généralement lorsque $b = a + \delta$, $c = a + 2\delta$, $d = a + 3\delta$, etc. etc. Alors p deviendra $= a - \delta$ et $q = \delta$; phénomènes, qui prouveront la justesse des expressions données ci-dessus pour les trois coëfficiens en question.

9. Or, en développant le numérateur de M, on découvrira qu'il est symmétrique dans un sens plus exact. Tous ses termes seront positifs et la somme de leurs coëfficiens sera partout égale au dénominateur correspondant. En voici les résultats! On aura pour

$\nu = 3;\ M = [a + 4b + c] : 6$
$\nu = 4:\ M = [a + 3b + 3c + d] : 8$
$\nu = 5;\ M = [11a + 26b + 31c + 26d + 11e] : 105$
$\nu = 6;\ M = [31a + 61b + 76c + 76d + 61e + 31f] : 336$
$\nu = 7;\ M = [7a + 12b + 15c + 16d + 15e + 12f + 7g] : 84$
$\nu = 8;\ M = [11a + 17b + 21c + 23d + 23e + 21f + 17g + 11h] : 144$
$\nu = 9;\ M = [49a + 70b + 85c + 94d + 97e + 94f + 85g + 70h + 49i] : 693$
$\nu = 10;\ M = [58a + 78b + 93c + 103d + 108e + 108f + 103g + 93h + 78i + 58k] : 880$
$\nu = 11;\ M = [159a + 204b + 239c + 264d + 279e + 284f + 279g + 264h + 239i + 204k + 159l] : 2574$
$\nu = 12;\ M = [127a + 157b + 181c + 199d + 211e + 217f + 217g + 211h + 199i + 181k + 157l + 127m] : 2184$

10. Les valeurs de M étant présentées ici sous une forme réduite, la loi de leur formation immédiate, donnée par la valeur de ν, y est troublée; mais, ayant recours à l'équation (D) n. 6, l'on trouvera

le coëff. de $a, = (\nu - 2)(\nu^2 - 2\nu + 7) = \nu^3 - 4\nu^2 + 11\nu - 14$
celui de $b, = (\nu - 2)(\nu^2 - 2\nu + 37) = \nu^3 - 4\nu^2 + 41\nu - 74$
celui de $c, = \ldots\ldots\ldots\ldots = \nu^3 - 4\nu^2 + 71\nu - 194$

par conséquent $C.b - C.a = 30\nu - 60$ et $C.c - C.b = 30\nu - 120$ et $C.c - 2C.b + C.a = -60$. De là cette règle: On formera le premier coëfficient $= (\nu - 2)(\nu^2 - 2\nu + 7)$ et, en y ajoutant successivement les $\nu - 1$ termes de la progression par différences: $30(\nu - 2)$, $30(\nu - 4)$, $30(\nu - 6)$, $30(\nu - 8)$ etc., l'on obtiendra les $\nu - 1$ coëfficiens suivans.

11. Soit 1°) $\nu = 2\mu$; alors la somme de $\mu - 1$ termes de cette progression par différences: $30(\nu - 2)$, $30(\nu - 4)$, $30(\nu - 6)$, ... $30.\ 2$ sera $= 30\mu . \overline{\mu - 1}$, qui, étant ajoutée au coëff. 1er $= 8\mu^3 - 16\mu^2 + 22\mu - 14$, donne le μième coëff. $= 8\mu^3 + 14\mu^2 - 8\mu - 14 = \overline{\mu^2 - 1}.\overline{8\mu + 14} = \frac{\overline{\nu - 2}.\overline{\nu + 2}.\overline{2\nu + 7}}{2}$. Le terme μième de la progression étant = à zero, le $(\mu + 1)$ième coëff. sera = au μième et le terme $(\mu + 1)$ième de la progression étant $= -60$, le $(\mu + 2)$ième coëff. sera = au $(\mu - 1)$ième et, par des raisons semblables, on rouvera le coëff. $(\mu + 3)$ième = au $(\mu - 2)$ième etc. etc.

12. Soit 2°) $\nu=2\mu+1$, alors le coëff. 1er sera $=8\mu^3-4\mu^2+12\mu-6$. En y ajoutant la somme des μ termes égale à $+30\mu^2$, on aura le coëfficient $(\mu+1)^{\text{ième}}$ c. à d. celui du milieu $=8\mu^3+26\mu^2+12\mu-6=\frac{(\nu+1)(2\nu^2+5\nu-13)}{2}$.

13. Le dénominateur commun aux deux cas précédens est

$$=\nu\,.\,\overline{\nu+1}\,.\,\overline{\nu+2}\,.\,\overline{\nu-2}=\overline{\nu^2+\nu}\,.\,\overline{\nu^2-4}.$$

On peut ainsi, pour tout nombre ν de termes de la série proposée, déterminer immédiatement et indépendamment des réductions antérieures, la forme et la valeur de *M.*

Ainsi pour le cas de $\nu=11$ vous aurez le coëfficient 1er $=9.106$, celui du milieu $=6.284$ et la suite à ajouter au 1er coëff. sera: 30.9, 30.7, 30.5, 30.3, 30.1, $30.(-1)$, $30.(-3)$ etc. Or le dénominateur étant $=132.117$, on réduira les deux termes de la fraction *M* en divisant par 6, ce qui fournira un numérateur égal à

$$\overset{A}{3.53},\ \overset{B}{3.53+5.9},\ \overset{C}{B+5.7},\ \text{etc.}$$

jusqu'au coëff. du milieu $=$ à 284; suivi par $+284-5.1+$ etc., et le dénominateur correspondant $=22.117$.

Pour le cas de $\nu=12$ on trouvera le coëff. 1er $=10.127$, celui du milieu $=10.7.31$ et la suite à ajouter successivement aux termes déjà trouvé 30.10, 30.8, 30.6 etc. Or le dénominateur étant $=156.140$; la réduction s'opérant en divisant par 10, l'on aura le numérateur $=\overset{A}{127}$, $\overset{B}{127+30}$, $\overset{C}{B+24}$ etc., jusqu'au coëff. du milieu $=\overset{M}{7.31}$; et de là en descendant $\overset{N}{M-6}$, $\overset{O}{N-12}$, $\overset{P}{O-18}$ etc. etc. et le dénominateur correspondant $=156.14$. Voici donc la route frayée à la détermination de M pour un nombre ν quelconque. Les valeurs de p et q n'offrant rien de symmétrique qui conduirait à des méthodes semblables, je ne m'arrêterai point à chercher l'expression développée du coëfficient r.

14. L'équation $y=p-qx+rx^2$ représente une parabole rapportée à un axe perpendiculaire à l'axe principal de la courbe. Nommons S son sommet et ZS son axe principal, qu'il faut concevoir prolongé au-delà du sommet jusqu'à un point H, dont la distance au sommet, ou HS, soit $=$ à H. Menons par le point H, perpendiculairement à SH, un axe VW et prenons sur VW un point O, entre V et H, pour l'origine des abscisses OP, dont l'extrêmité P tombe entre O et W. Soit maintenant L le paramètre de la parabole, $OP=x$ et l'ordonnée orthogonale $PM=y$; soit enfin $OH=A$; alors on aura, par la nature connue de cette courbe:

$(x-A)^2$ ou $(A-x)^2$ égal à $L.(y-H)$, ce qui donne

$$y=H+\frac{A^2}{L}-\frac{2A}{L}x+\frac{x^2}{L};$$

équation, dont la comparaison avec la formule:

$y=p-qx+x^2$; fait voir que

1) $L=\frac{1}{r}$; 2) $A=\frac{q}{2r}$ et 3) $H=p-\frac{qq}{4r}=\frac{4pr-qq}{4r}$

15. La suite proposée: $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ .\ .\ .\ .\ .\ n$

répondant aux abscisses $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ .\ .\ .\ .\ .\ \nu$

fournit ν points, dont la parabole en question traverse la région. Or les coordonnées du centre de gravité de ces points considérés comme également pesans, seront:

$$X=\frac{\nu+1}{2} \text{ et } Y=\frac{a'}{\nu}$$

Si la courbe passe par ce centre, il faut qu'il y ait

$$\frac{a'}{\nu}=p-qx+rx^2=p-q\cdot\frac{\nu+1}{2}+r\cdot\frac{(\nu+1)^2}{4}.$$

16. Commençons par réunir les coëfficiens du terme a' et nous aurons [n. 5. équation (C)]

pour p... $\frac{3}{2}\nu^2+\frac{3}{2}\nu+1$
pour q... $-3\nu^2-\frac{9}{2}\nu-\frac{3}{2}$
pour r... $\frac{5}{4}\nu^2+\frac{5}{2}\nu+\frac{5}{4}$

ce qui donne le coëfficient de a'

$$=\left[-\tfrac{1}{4}\nu^2-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{3}{4}\right]:\left[\frac{\nu}{3}\right]=-\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\nu+3}{\nu(\nu-2)}.$$

Par là l'on obtiendra, en joignant $+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\nu+3}{\nu(\nu-2)}a'$ avec $\frac{a'}{\nu}$, le terme $\frac{5(\nu+1)}{2\nu(\nu-2)}a'$.

17. Pour le coëfficient de b', la même expression de p fournira

$$3(2\nu+1)\cdot\frac{(\nu+2)(\nu+1)}{5.\quad 4.}\cdot 10 \quad = \quad 3\nu^3+\tfrac{21}{2}\nu^2+\tfrac{21}{2}\nu+3$$

celle de q

$$-\frac{\nu+1}{2}\cdot(2\nu+1)(8\nu+11) \qquad =-\ 8\nu^3-23\nu^2-\tfrac{41}{2}\nu-\tfrac{11}{2}$$

et celle de r.

$$15\cdot\frac{(\nu+1)^2}{4}\cdot(\nu+1) \qquad =+\tfrac{15}{4}\nu^2+\tfrac{45}{4}\nu^2+\tfrac{45}{4}\nu+\tfrac{15}{4}$$

par conséquent le coëfficient de b' sera

$$=-\left[-\tfrac{5}{4}\nu^3-\tfrac{5}{4}\nu^2+\tfrac{5}{4}\nu+\tfrac{5}{4}\right]:10\left[\frac{\nu+2}{5}\right]=+\frac{15(\nu-1)}{\nu(\nu-2)(\nu+2)}.$$

18. Enfin l'expression de p donnera

$$10\cdot\frac{(\nu+2)\ (\nu+1)}{4.\quad 5.}=\tfrac{1}{2}\nu^2+\tfrac{3}{2}\nu+1\ ;$$

celle de q

$$-\ \tfrac{3}{2}\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+1)=-\tfrac{3}{2}\nu^2-3\nu-\tfrac{3}{2}\ ;$$

et celle de r

$$+\ 3\cdot\tfrac{1}{4}(\nu+1)^2=+\tfrac{3}{4}\nu^2+\tfrac{3}{2}\nu+\tfrac{3}{4}\ ;$$

d'ou l'on tire la valeur du coëff. de c'

$$=-\tfrac{1}{4}\nu^2+\tfrac{1}{4}=-\tfrac{1}{4}(\nu+1)(\nu-1):2\left[\frac{\nu+2}{5}\right]$$

$$=\tfrac{1}{120}\,\overline{\nu+2}\,.\,\overline{\nu+1}\,.\,\nu\,.\,\overline{\nu-1}\,.\,\overline{\nu-2}=-\frac{15}{\nu.(\nu-2)(\nu+2)}.$$

19. Ainsi l'équation de condition, pour que la parabole passe par le centre de gravité des ν points, donnés par les valeurs: a, b, c, d . . ., sera

$$\left.\begin{aligned}&(\nu+1)\,a'-6\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}b'+\frac{6}{\nu+2}c'=0 \text{ ou,}\\ &a'-\frac{6b'}{\nu+2}+\frac{3c'}{\left[\frac{\nu+2}{2}\right]}=0, \text{ ou}\\ &\overline{\nu+1}\,.\,\overline{\nu+2}\,.\,a'-6\,.\,\overline{\nu+1}\,.\,b+6c'=0\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (E).$$

condition à laquelle il sera possible de satisfaire d'une infinité de manières. Soit p. ex. $\nu = 4$ et vous aurez la condition: $5a' - 5b' + c' = 0$, ou

$$\left.\begin{array}{r} 5a + 5b + 5c + 5d \\ -5a - 10b - 15c - 20d \\ +a + 4b + 9c + 16d \end{array}\right\} = 0, \text{ c. à d. } a - (b + c) + d = 0$$

Si $\nu = 5$, on aura $7a' - 6b' + c' = 0$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{r} 7a + 7b + 7c + 7d + 7e \\ -6a - 12b - 18c - 24d - 30e \\ +a + 4b + 9c + 16d + 25e \end{array}\right\} = 0, \text{ ou bien } 2a - (b + 2c + d) + 2e = 0.$$

20. Ces exemples suffiront pour diriger notre attention sur l'expression générale du coëfficient r, lequel étant fait $=$ à zéro, donne

$$\frac{30a'}{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}} - \frac{180(\nu+1)b'}{\overline{\nu+2}.\overline{\nu+1}.\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}} + \frac{180c'}{\overline{\nu+2}.\overline{\nu+1}.\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\overline{\nu+1}.\overline{\nu+2}.a' - 6.\overline{\nu+1}.b' + 6c' = 0.$$

21. Donc l'équation (E), qui renferme la condition du passage de la courbe parabolique par le centre de gravité de ν points donnés, coïncide nécessairement avec l'équation $r = o$, qui change la *parabole* en une *droite* donnée par l'équation: $y = p - qx$.

La parabole, que fournit la méthode des moindres carrés, ne passe donc jamais par le centre susdit; mais cela n'empêche aucunement, que la somme des écarts positifs ne soit égale à celle des écarts négatifs. [J'ai cru devoir ajouter cette recherche sur le passage par le centre de gravité, par rapport à une expression de Mr. **Biot**, expression qui se trouve dans le tome 2me de l'Astronomie physique de cet illustre savant, 2de édit., pag. 202, mais qu'il ne faut point étendre jusqu'à lui prêter un sens rigoureux, ce qui serait même contraire à la vue du célèbre Auteur.]

22. Pour démontrer cette vérité importante, qu'on étendra sans peine tant aux *momens statiques* des écarts, qu'à leurs *momens d'inertie*, reprenons le système général des deux séries:

$a,\ b,\ c,\ d.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n$

et $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \nu$

représenté par la parabole $y_x = p - qx + rx^2$, qui donne $y_\alpha = p\alpha^0 - q\alpha + r\alpha^2$ etc. et par conséquent les écarts:

$$-a + y_\alpha = -a + p\alpha^0 - q\alpha + r\alpha^2 = E_\alpha$$
$$-b + y_\beta = -b + p\beta^0 - q\beta + r\beta^2 = E_\beta$$
$$-c + y_\gamma = -c + p\gamma^0 - q\gamma + r\gamma^2 = E_\gamma \quad \text{etc. etc.}$$

d'où l'on conclut: $-S\,.\,a + S\,.\,y_\alpha = S\,(-a + y_\alpha) = S\,.\,E_\alpha = -Sa + pS\alpha^0 - qS\alpha + rS\alpha^2$. Or en vertu de la première des équations (A) n. 4. pag. 15, l'on a $Sa = pS\alpha^0 - qS\alpha + rS\alpha^2$; p. c. il faut que $S\,.\,E_\alpha$ soit $= 0$. Les mêmes équations (A) fourniront ces deux autres:

$$S\,.\,\alpha E_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad S\,.\,\alpha^2 E_\alpha = 0.$$

23. Eclaircissons tout ce qui précède par quelque exemple numérique et concevons proposée la série: 5, 9, 23, 41, 61, 89 qui donne (cf. n. 8).

1) $$\left.\begin{array}{r} 15a = 75 \\ 3b = 27 \\ 5f = \underline{445} \\ 547 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} 4c = 92 \\ 6d = 246 \\ 3e = \underline{183} \\ 521 \end{array}\right\} \text{p. c. } p = \frac{547 - 521}{10} = \frac{13}{5}.$$

2) $$\left.\begin{array}{r} 215a = 1075 \\ 135f = \underline{12015} \\ 13090 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} 11b = 99 \\ 132c = \underline{3036} \\ 3135 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} 148d = 6068 \\ 59e = 3599 \\ \underline{3135} \\ 12802 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} +13090 \\ -\underline{12802} \\ 288 \end{array}\right\} \text{donc } q = \frac{288}{280} = \frac{36}{35}.$$

3) $$\left.\begin{array}{r} 5a = 25 \\ 5f = \underline{445} \\ 470 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} b + e \ = 70 \\ 4(c + d) = \underline{256} \\ 326 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} -326 \\ +\underline{470} \\ 144 \end{array}\right\} \text{donc } r = \frac{144}{56} = \frac{18}{7}.$$

4) Ces valeurs donnent la formule; $y_x = \frac{91 - 36x + 90x^2}{35}$. Voyons maintenant les valeurs que fournit cette formule!

On trouvera

$y_1 = \frac{145}{35}$; $y_2 = \frac{379}{55}$; $y_3 = \frac{793}{35}$; $y_4 = \frac{1387}{35}$; $y_5 = \frac{2161}{35}$; et $y_6 = \frac{3115}{35}$; p.c.

$E_1 = -\frac{30}{35}$; $E_2 = \frac{64}{35}$; $E_3 = -\frac{12}{35}$; $E_4 = -\frac{48}{35}$; $E_5 = \frac{26}{35}$; et $E_6 = 0$

d'où l'on tire $S.E = 0$. Multipliant ensuite chaque E par son indice, et par le carré de cet indice, on aura la suite des *momens statiques* des écarts:

$$1E_1 = -\frac{30}{35};\ 2E_2 = \frac{128}{35};\ 3E_3 = -\frac{36}{35};\ 4E_4 = -\frac{192}{35};\ 5E_5 = \frac{130}{35};\ 6E_6 = 0;$$

et celle des *momens d'inertie:*

$$1^2E_1 = -\frac{30}{35};\ 2^2E_2 = \frac{256}{35};\ 3^2E_3 = -\frac{108}{35};\ 4^2E_4 = -\frac{768}{35};\ 5^2E_5 = \frac{650}{35};\ 6^2E_6 = 0;$$

d'où l'on tire également $S.\alpha E_\alpha = 0$ et $S.\alpha^2 E_\alpha = 0$.

5) En dernier lieu on aura la somme *des carrés des écarts*

$$= [900 + 4096 + 144 + 2304 + 676] : 1225 = \frac{8120}{1225} = 6\frac{22}{35}.$$

6) Supposons maintenant qu'on voulût substituer à la formule, que nous venons d'examiner, la suivante: $y = \frac{13 + 12x^2}{5}$, non seulement bien plus simple, mais qui donnerait aussi

$y_1 = 5$; $y_2 = 12\frac{1}{5}$; $y_3 = 24\frac{1}{5}$; $y_4 = 41$; $y_5 = 62\frac{3}{5}$ et $y_6 = 89$;

par conséquent, puisque

$E_1 = 0$; $E_2 = 3\frac{1}{5}$; $E_3 = 1\frac{1}{5}$; $E_4 = 0$; $E_5 = 1\frac{3}{5}$ et $E_6 = 0$;

trois des écarts égaux à zéro.

Qui ne préfèrerait cette formule à celle que fournit la méthode des moindres carrés? Néanmoins l'on voit que le plus grand écart de la formule présente surpasse 3, tandisque le plus grand écart de la précédente est < 2. La somme des écarts est ici $=$ à 6, au lieu d'être $=$ à zéro. Enfin la somme des carrés des écarts se trouvera $= [256 + 36 + 64] : 25 = 14\frac{6}{25}$ p. c. plus grande que le double de la même somme ci-dessus.

7) Quant à la valeur moyenne, désignée par M, on la trouvera par le calcul suivant:

$$\begin{aligned} 31 \cdot (a+f) &= 31 \cdot 94 = 2914 \\ 61 \cdot (b+e) &= 61 \cdot 70 = 4270 \\ 76 \cdot (c+d) &= 76 \cdot 64 = \underline{4864} \\ && 12048 \end{aligned}$$

donc $M = \frac{12048}{336} = 35\frac{6}{7}$, or $\frac{Sa}{6} = \frac{228}{6} = 38$; donc la valeur moyenne désignée par M est en défaut de $2\frac{1}{7}$ par rapport à $\frac{Sa}{6}$, ou le moyen arithmetique des termes $a \ldots f$.

8) Cherchons maintenant la valeur moyenne des ordonnées y, déterminées par la seconde formule et qu'on trouvera $= \frac{\int y dx}{x} = \frac{13x + 4x^3}{5x}$, prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 6$, p. e. $= \left[13 + 4\,(x^2 + x + 1)\right] : 5$ $= \left[13 + 172\right] : 5 = 37$; valeur plus approchée de $\frac{Sa}{6}$ que celle de la première formule. Mais la somme $S \cdot y_a$ est $= S \cdot a$ pour la première formule, tandisque pour la seconde cette somme monte à $Sa + 6$, ce qui donne $\frac{S \cdot y_a}{6} = \frac{Sa}{6}$ pour la première, mais $= \frac{Sa}{6} + 1$ pour la seconde.

9) Comparons encore ces deux valeurs moyennes $M' = 35\frac{6}{7}$ et $M'' = 37$ à la valeur moyenne M, qui corresponde exactement à la série donnée: 5, 9, 23, 41, 61, 89, série assujettie à la formule:

$$y = 5 + 4\,(x-1) - 5\,(x-1)(x-2) - (x-1)(x-2)(x-3) + \tfrac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+ \tfrac{1}{30}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

qui, en introduisant les puissances au lieu des factorielles, deviendra

$$y = [\, x^5 - 10x^4 + 5x^3 + 280x^2 - 636x + 510 \,] : 30;$$

d'où l'on tirera l'intégrale

$$\int y dx = [\tfrac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \tfrac{5}{4}x^4 + \tfrac{280}{3}x^3 - 318x^2 + 510x] : 30$$

et par conséquent

$$M = [2x^6 - 24x^5 + 15x^4 + 1120x^3 - 3816x^2 + 6120x] : 360x$$

En prenant cette valeur depuis $x = 1$, jusqu'à $x = 6$, vu que $\frac{6^6-1}{6-1} = 9331$; $\frac{6^5-1}{6-1} = 1555$; $\frac{6^4-1}{6-1} = 259$; $\frac{6^3-1}{6-1} = 43$ et $\frac{6^2-1}{6-1} = 7$, on aura

$$M = [2.9331 - 24.1555 + 15.259 + 1120.43 - 3816.7 + 6120] : 360$$
$$= [18662 + 3885 + 48160 + 6120 - \overline{37820 + 26712}] : 360$$
$$= [76827 - 64532] : 360 = \frac{12295}{360} = \frac{2459}{72} = 34\tfrac{11}{72}.$$

24. Donc la valeur de M', donnée par la méthode des moindres carrés, s'écarte moins de celle que fournit l'expression exacte (donnée ci-dessus) que celle, qu'on vient de tirer de la seconde formule. Concluons en, que la parabole, que la méthode des moindres carrés nous fait connaître, comme représentant de la manière la plus approchante la loi d'une suite donnée de ν termes, est préférable à toute autre, qu'on exprimerait par une formule semblable: $y' = p' - q'x + r'x^2$, soit par rapport

α) à la somme des écarts, ou

β) à la somme de leurs momens statiques, ou

γ) à la somme de leurs momens d'inertie, ou

δ) à celle de leurs carrés, ou enfin

ε) aux valeurs rigoureusement moyennes, représentées par M et comparées à celles que fournirait une formule ou courbe, qui donnerait exactement la suite proposée.

25. L'auteur de cet exposé assez detaillé, sera bien aise dès qu'il ose se flatter d'avoir présenté, aux amateurs de l'analyse, le juste sens et la valeur qu'il faut assigner aux formules de cette espèce, émanées du principe des moindres carrés, comme il se flatte d'avoir placé le lecteur judicieux sur un point de vue, d'où il lui sera facile d'étendre ses regards au delà des bornes de la formule du second degré qui était l'objet des recherches précédentes. En effet, on verra sans peine, que les paraboles représentées par la formule générale:

$$y = P - Qx + Rx^2 - Sx^3 + Tx^4 - \ldots \pm Zx^m$$

doivent jouir de propriétés analogues, c. à d. qu'elles donneront $S.\alpha^k a = 0$ si k est $= m$ ou $< m$; qu'elles ne passeront jamais par le centre de gravité des points donnés par la suite proposée; qu'elles fournissent une valeur moyenne M, plus approchante de celle des formules exactes, que ne fournit toute autre formule du même degré m etc. Mais nous devons laisser au génie du lecteur le plaisir de vérifier lui-même ces résultats.

TENTAMEN
ILL. L. EULERI SPECULATIONEM
DE
FORMULIS
CONCORDIBUS ET DISCORDIBUS
PROMOVENDI

AUCTORE

C. F. DEGEN.

(Conv. exhib. die 2 Aprilis 1823.)

Occurrit in Commentariis Academiae Imper. Sc. Petrop. (Tom. VIII. A. 1822) disquisitio summi L. **Euleri** de formis $x^2 + my^2$ et $x^2 + ny^2$ inter se concordibus et discordibus, quod argumentum cum haud parvis difficultatibus premi, saltem, pro numeris m et n vel mediocribus, haud paucis ambagibus circumvolvi videatur; non indignabuntur quotquot mecum immortalis illius et de universa re mathematica óptime meriti magistri manes pio colant animo atque venerentur, si, quicquid e ditissima Analyseos Diophanteae fodina eruere licuerit, cum eruditis scientiae analyticae fautoribus communicavero atque huic argumento quantulumcunque dabitur lucis affundere conatus fuero. Acutissimo illius doctoris ingenio inventa mea gratus et verecundus accepta refero, quamvis a methodo ill. Viri paullulum recedere scopus, quem mihi proposui, cogerit; cujus quidem decessus haec imprimis causa fuit, quod in ipsa formularum concordantium ab ill. **Eulero** constituta notione, *coefficientium* (m et n) *permutabilitas*, quae autem ad *solutionem* problematis *generalem* simpliciorem reddendam plurimum subsidii pollicebatur, latere mihi quidem videretur. Revera etiam deprehendi, duce hac permutabilitatis notione, viam ad interiora hujus regionis analyticae adyta satis planam atque expeditam patefieri, quam acrioribus ingeniis perfectius muniendam, commodius sternendam relinquimus, eandem aperuisse contenti.

1. Statuamus igitur fieri posse, ut sit *simul*, i. e. pro iisdem incognitarum x et y valoribus, $M = x^2 + my^2 = p^2$ et $N = x^2 + ny^2 = q^2$, sive, terminis Eulerianis usi, formulas M et N esse *concordantes*, id quod, donec aliud huicque qualitati proprium signum eligatur, illo *congruentiae* ab ill. Gaussio adhibito indicabimus. Hoc posito evidens est, assignari posse ejusmodi numeros t et u, ut fiat

$$p = \alpha\,(mt + nu) \text{ et } q = \alpha\,(nt + mu)$$

quae ipsae formulae ita sunt comparatae ut permutatis m et n permutentur etiam p et q, i. e. M et N. Ad fractiones autem evitandas faciemus tantisper $\alpha = 2$, sicque habebimus aequationes:

$$x^2 + my^2 = 4\,(mt + nu)^2 \text{ et } x^2 + ny^2 = 4\,(nt + mu)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

quibus ab invicem subductis obtinebitur: $y^2 = 4\,(m + n)\,(t^2 - u^2) \quad . \quad (B)$

2. Sit jam $m + n = fg$ et $t^2 - u^2 = 4fgz^2$: et perveniemus ad hasce aequalitates: $t = fz^2 + g$, $u = fz^2 - g$ et $y = 4fgz$ . . . . (C)

Hinc porro, ob $x^2 + my^2 = 4.[(m+n)fz^2 + (m-n)g]^2 = 4g^2.[f^2z^2 + (m-n)]$

$$= 4g^2.[f^4z^4 + 2(m-n)f^2z^2 + (m-n)^2]$$

et $my^2 = 4g^2.4mf^2z^2$

emergit aequatio:

$$x^2 = 4g^2.[f^4z^4 - 2f^3gz^2 + f^2g^2 - (m+n)^2 + (m-n)^2], \text{ sive}$$

$$\frac{x^2}{4g^2} + 4mn = (f^2z^2 - fg)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

solutionis nostrae fundamentum.

2. Esto jam k^2 maximus producti mn divisor quadraticus, ita ut sit $mn = Lk^2$, atque fiat $\frac{x^2}{16g^2k^2} + L = A^2 = (\frac{f^2z^2 - fg}{2k})^2$ . . . . . . (E)

nec non, posito $x = 4gk\xi$, quaerantur valores ξ et A, aequationi $A = \sqrt{\xi^2 + L}$ satisfacientes. His inventis pervenietur ad *aequationem conditionalem*

$$f^2 z^2 = fg \pm 2kA = B^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

unde demum nanciscimur valorem alterius incognitae $y = 4gB$ . . . . (G).

4. Ut vero simplicissimam solutionem exhibeamus, ponatur $m + n = fg = L^{\mathrm{I}} k^2$, sitque φ factor quilibet ipsius L, tum patet aequationi $A = \sqrt{\xi^2 + L}$ satisfacere valores

$$2\xi = \frac{L}{\varphi} - \varphi \quad \text{et} \quad 2A = \frac{L}{\varphi} + \varphi;$$

et ita demum aequatio: $f^2 z^2 = fg \pm 2kA = B^2$ abit in sequentem:

$$L^{\mathrm{I}} k^2 \pm k\left(\frac{L}{\varphi} + \varphi\right) = B^2$$ sive, facta divisione per k^2, et posito $B = kC$

$$L^{\mathrm{I}} \pm \frac{1}{k}\left(\frac{L}{\varphi} + \varphi\right) = C^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (H).$$

Huic aequationi, quoties satisfieri possit, etiam solutio exhiberi poterit. Scilicet ob $x = 4gk\xi$ et $y = 4gkC$, convenient etiam valores reducti ξ et C, sive habebitur solutio

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L}{\varphi} - \varphi\right) \text{ et } y = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I).$$

5. Exempla, quae hactenus proposuimus, antequam ad ulteriora progrediamur, illustrare conveniet. Quaeratur scil. utrum $x^2 + 35y^2 \equiv x^2 + 33y^2$, nec ne?

Erit igitur $mn = 3 . 5 . 7 . 11 = 1155$ adeoque $k = 1$. Hinc, ob $m + n = fg = L^{\mathrm{I}} k^2 = 68$ erit $L^{\mathrm{I}} = 68$. Factoribus autem

$$\varphi = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 15,\ 21,\ 33;$$

correspondebunt quoti

$$\frac{L}{\varphi} = 1155,\ 385,\ 231,\ 165,\ 105,\ 77,\ 55,\ 35;$$

adeoque aggregata

$$2A = 1156,\ 388,\ 236,\ 172,\ 116,\ 92,\ \overset{*}{76},\ 68;$$

quibus, si successive $\left[\begin{matrix}\text{addatur}\\ \text{subtrahatur}\end{matrix}\right]$ $L^{\mathrm{I}} = 68$, reperientur valores idonei divisoris atque quoti (etiamnum inter se permutabilium), scil. 21 et 55, quippe qui praebeant $76 + 68 = 12^2 = C^2$; adeoque unica, quam nacti sumus, solutio erit

$$x = \frac{55 - 21}{2} = 17 \text{ et } y = 12.$$

Revera invenietur $x^2 + 35y^2 = 289 + 35 . 144 = 73^2$
et $x^2 + 33y^2 = 289 + 33 . 144 = 71^2$

6. Examinemus adhuc casum formularum $x^2 + 17y^2$ et $x^2 + 11y^2$, ubi patet, fore $k = 1$, adeoque $L = 187$ et $L^1 = 28$. Praebent autem divisores: $\varphi = 1, 11$; quotos: 187, 17; adeoque aggregata $2A$: 188, 28; quibus si addatur aut subducatur $L^1 = 28$ nullum aliud quadratum obtinetur praeter 0, adeoque *cum valor* $y = 0$ *e solutionum veri nominis numero merito sit expungendus*, jure concludimus formulas propositas esse discordantes.

Scholion. Utramque formulam formulae simplicissimae $x^2 + y^2$ concordantem reperit Ill. EULERUS. Ex tali autem binarum formularum concordia cum eadem tertia nequaquam inferre licet, *easdem etiam mutua concordia jungi* Solutio enim quae efficit, ut sit $x^2 + my^2 \equiv x^2 + ny^2$ cum ea, qua fiat $x^2 + my^2 \equiv x^2 + py^2$, non *necessario* erit eadem. Primo quidem adspectu *pluralitas solutionum*, pro binis quibusque formulis concordantibus, nihil sane contradictorii videbitur involvere, cum innumeri dentur casus, quibus e solutione cognita infinitus solutionum numerus elici queat. Id quod in ipso meae disquisitionis initio, accedentibus aliquot tentaminibus cum valoribus Eulerianis (numeri n) pag. 10 l. c. institutis, me seduxit et spe fefellit, fieri posse, ut formulam $x^2 + my^2$ ad alias $x^2 + m'y^2$, $x^2 + m''y^2$, $x^2 + m'''y^2$, ... $x^2 + m^{(r)}y^2$ reducerem, ubi series $m, m', m'', m''', \ldots . m^{(r)}$ coëfficientium valde decrescentium tandem ad tutum de formularum $x^2 + my^2$ et $x^2 + m^{(r)}y^2$, et per cons. etiam de formularum $x^2 + ny^2$ et $x^2 + n^{(s)}y^2$, sicque tandem de formularum $x^2 + my^2$ et $x^2 + ny^2$ concordia aut discordia judicium perduceret. Licet vero hac spe deceptus fuerim, contigit tamen ad duo theoremata pertingere, quorum ope formularum binarum propositarum *concordiam* pro numeris m et n

quibuslibet, (non item *discordiam*, ne quidem pro iisdem numeris *primis*) *immediate* dijudicare dabitur et ipsa solutio nullo plane negotio exhibebitur; quae cum exinde aliquantulam in Analysin Diophanteam redundaturam fore utilitatem sperare fas sit, non dubitavi, hac occasione nata, cum eruditis illius Analyseos fautoribus communicare.

7. Qualescunque demum fuerint numeri m et n, patet ad producti mn divisores semper referri debere ternos hosce:

$$\varphi = 1, \quad m, \quad n;$$

quibus respondebunt quoti

$$\frac{mn}{\varphi} = mn, \quad n, \quad m;$$

adeoque aggregata

$$2A = mn+1, \ m+n, \ m+n;$$

quibus, si *addatur* summa $m+n$, exoriuntur *aequationes conditionales:*

I. $(m+1)(n+1) = \square$; II. $2(m+n) = \square$; sive $m+n = 2\square$;

quibus continentur sequentia duo theoremata:

I.

Formulae x^2+my^2 *et* x^2+ny^2 *erunt concordantes, si fuerit productum* $(m+1)(n+1)$ *numero quadrato* P^2 *aequale. Hoc casu habebitur* $x = mn-1$ *et* $y = 2P$.

II.

Eaedem formulae concordantes erunt, quoties fuerit summa coefficientium m *et* n *duplici quadrato* $2Q^2$ *aequalis: solutione existente:* $x = m-n$ *et* $y = 4Q$.

Casu theorematis I$^{\text{mi}}$ reperietur:

$$x^2+my^2 = (mn+2m+1)^2 \text{ et } x^2+ny^2 = (mn+2n+1)^2;$$

casu autem theorematis II$^{\text{di}}$ obtinebimus:

$$x^2+my^2 = (3m+n)^2 \text{ et } x^2+ny^2 = (3n+m)^2$$

Hisce theorematis subjungamus sequentia exempla:

1. Formulae x^2+7y^2 et x^2+17y^2, simplicissimae x^2+y^2 concordantes, pari inter se concordio junguntur. Est enim $(7+1)(17+1) = 12^2$; unde hauritur solutio: $x = 7.17-1 = 118$ et $y = 24$, sive $x = 59$ et $y = 12$.

Scilicet ob $x^2 = 3481$ $\qquad$ $x^2 = 3481$
et $7y^2 = 1008$ $\qquad$ $17y^2 = 2448$
fiet $x^2 + 7y^2 = 4489 = 67^2$ et $x^2 + 17y^2 = 5929 = 77^2$.

2. Formulae $x^2 + 31y^2$ et $x^2 + 41y^2$, ipsi $x^2 + y^2$ pariter concordes, congruunt, ob $31 + 41 = 2 . 6^2$. Solutio nempe reperietur $x = 41 - 31 = 10$ et $y = 4 . 6 = 24$, sive $x = 5$ et $y = 12$.

Scilicet ob $x^2 = 25$ $\qquad$ $x^2 = 25$
et $31y^2 = 4464$ $\qquad$ $41y^2 = 5904$
reperietur: $x^2 + 31y^2 = 4489 = 67^2$ et $x^2 + 41y^2 = 5929 = 77^2$.

3. Examinemus denique formulas $x^2 + 7069y^2$ et $x^2 + 28279y^2$, quarum coëfficientes sunt numeri primi. Horum semisumma non est quadrata; contra fiet $7070 . 28280 = 4 . 49 . 100 . 101^2 = P^2$; unde, vi theorematis I^{mi} erit $x = 199904250$ et $y = 28280$ sive $x = 19990425$ et $y = 2828$. Horum valorum tam facilis determinatio usum theorematum, quae tradidimus, aperte satis commonstrat.

8. Ex allatis autem theorematis nullo negotio derivantur haec consectaria:

III.

Formulae $x^2 + my^2$ *et* $x^2 - ny^2$ *erunt concordantes, quoties fuerit differentia coefficientium duplici quadrato* $2Q^2$ *aequalis, quo casu solutio habebitur:* $x = m + n$ *et* $y = 4Q$.

IV.

Formulae $x^2 - my^2$ *et* $x^2 - ny^2$ *concordia jungentur, quoties productum* $(m - 1)\ (n - 1)$ *fuerit quadrato* P^2 *aequalis, tum satisfacientibus* $x = mn - 1$ *et* $y = 2P$.

Haec consectaria sequentibus exemplis munivisse sat erit:

1. Datae sint formulae $x^2 + 23y^2$ et $x^2 - 15y^2$. Ob $23 - 15 = 2 . 2^2$ erunt eaedem concordantes. Reperietur vi theorematis III^{tii} $x = 38$ et $y = 8$, sive $x = 19$ et $y = 4$.

Est scilicet $19^2 + 23 \, . \, 16 = 361 + 368 = 729 = 27^2$;

atque $19^2 - 15 \, . \, 16 = 361 - 240 = 121 = 11^2$.

2. Propositis formulis $x^2 - 6y^2$ et $x^2 - 21y^2$, patet eas esse concordes ob $(6 - 1)\,(21 - 1) = 10^2$. Hinc vero elicitur

$$x = 6 \, . \, 21 - 1 = 125 \text{ et } y = 20, \text{ sive } x = 25 \text{ et } y = 4.$$

Nimirum reperietur $25^2 - 6 \, . \, 4^2 = 625 - 96 = 529 = 23^2$,

et $25^2 - 21 \, . \, 4^2 = 625 - 336 = 289 = 17^2$.

9. Sit jam $m = a^2 + b^2$ et $n = a^2 - b^2$, tum, ob $m + n = 2a^2$ et $m - n = 2b^2$, vi theorematum II^di^ et III^tii^ concordantes erunt sequentes formulae, scilicet

$$x^2 + (a^2 + b^2)y^2 \equiv x^2 + (a^2 - b^2)y^2 \text{ et } x^2 + (a^2 + b^2)y^2 \equiv x^2 - (a^2 - b^2)y^2.$$

Quare, si requirantur ternae ejusmodi formulae, ut binae quaevis fiant concordantes, solutio in promptu erit; quippe vi theorematis II. hasce formulas:

$$x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)y^2; \; x^2 + (a^2 - b^2 + c^2)y^2; \; x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)y^2 \;\; . \; . \;\; (K)$$

quaesito satisfacere facillime perspicietur.

Nec non theoremata I. et IV. hasce formularum ejusdem conditionis triades suppeditabunt, scilicet

$$x^2 \mp (\alpha a^2 \pm 1)y^2; \; x^2 \mp (\alpha b^2 \pm 1)y^2; \; x^2 \mp (\alpha c^2 \pm 1)y^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (L)$$

Quin imo harum formularum numerus nullis limitibus restringitur, ut illarum quas theorematis II. et III. accomodavimus; posito enim in genere $m = \alpha\mu^2 \pm 1$ et $n = \alpha\nu^2 \pm 1$, erit $(m \mp 1)\,(n \mp 1) = \alpha^2\mu^2\nu^2 = P^2$, adeoque $x^2 \mp (\alpha\mu^2 \pm 1)y^2 \equiv x^2 \mp (\alpha\nu^2 \pm 1)y^2$ quicunque demum numeri pro α, μ et ν eligantur. Ita ergo beneficio theorematis primi, cujus consectarium est quartum illud, formulas numero infinitas assignare licebit, quarum binae quaevis junctim sumtae concordiae vinculo uniantur.

10. Ex hactenus propositis alia quam plurima insignia theoremata, quorum demonstratio aliunde nonnisi per taediosissimas ambages peteretur, derivari posse peritus lector facile observaverit. Ita, ut exemplum aliquod in medium afferam, multiplicatis invicem duabus formulis concordantibus, prodibit formula

*

biquadrata continens, quae ipsa quadrato aequalis reddi poterit. Hunc in modum

$$x^2 + (a^2 + b^2)y^2 \equiv x^2 + (a^1 - b^2)y^2$$

praebet formulum

$$x^4 + 2a^2x^2y^2 + (a^4 - b^4)y^4$$

quadrato aequandam. Pro formulis concordantibus enim habetur solutio $x = 2b^2$ et $y = 4a$, unde oritur

$$16b^8 + 128a^4b^4 + (a^4 - b^4).256a^4 = 16b^8 - 128a^4b^4 + 256a^8 = (4b^4 - 16a^4)^2.$$

Quare solutio generalis: $x = b^2$ et $y = 2a$ etiam formulae sive aequationi

$$x^4 + 2a^2x^2y^2 + (a^4 - b^4)y^4 = \square$$

satisfaciet. Eodem modo colligitur e formulis concordantibus

$$x^2 + (a^2 + b^2)y^2 \equiv x^2 - (a^2 - b^2)y^2$$

earundem productum

$$x^4 + 2b^2x^2y^2 - (a^4 - b^2)y^4 = \square$$

solvi posse, mediantibus valoribus $x = a^2$ et $y = 2b$. Denique formulas (L) contemplanti facile perspicietur, aequationi

$$x^4 \mp [\alpha(a^2 + b^2) \pm 2]x^2y^2 + (\alpha a^2 \pm 1)(\alpha b^2 \pm 1)y^4 \text{ ope valorum}$$

$$x = (\alpha a^2 \pm 1)(\alpha b^2 \pm 1) - 1 \text{ et } y = 2\alpha ab \text{ posse satisfieri.}$$

Sit v. c. $a = 2$, $b = 1$ et $\alpha = \frac{2}{5}$ atque adhibeatur signum inferius, tum, evanescente membri x^2y^2 coëfficiente, fiet ipsius y^4 coëfficiens $= (\frac{8}{5} - 1)(\frac{2}{5} - 1) = -\frac{9}{25}$ sicque prodibit formula $x^4 - \frac{9}{25}y^4$, quae ope valorum $x = -\frac{34}{25}$ et $y = \frac{8}{5}$, sive, quod hic perinde est, valorum $\frac{17}{25}$ et $\frac{20}{25}$, adeoque etiam per numeros integros $x = 17$ et $y = 20$ solvi poterit. Calculum suscipienti reperietur

$$x^4 = 83521,\ y^4 = 160000 \text{ adeoque } \tfrac{9}{25}y^4 = 57600$$

hincque $x^4 - \frac{9}{25}y^4 = 25921 = 161^2$. Hic sane resolutio formulae $x^4 - \frac{9}{25}y^4$ in factores quadraticos $x^2 + \frac{3}{5}y^2$ et $x^2 - \frac{3}{5}y^2$ nihil subsidii attulisset, cum formulae $x^2 + \frac{3}{5}y^2$ et $x^2 - \frac{3}{5}y^2$ sive posito $y = 5z$, $x^2 + 15z^2$ et $x^2 - 15z^2$ discordantes reperientur.

Si jam in genere ponatur $\alpha = \frac{2}{a^2+b^2}$, signo illo inferiori adhibito, fiet $(\alpha a^2 - 1)(\alpha b^2 - 1) = (\frac{2a^2}{a^2+b^2} - 1)(\frac{2b^2}{a^2+b^2} - 1) = -(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2})^2$; unde apparet, valorem quadratum coëfficientis ipsius y^4 non casui fortuito, i. e. valoribus $a = 2$, $b = 1$ pro lubitu assumtis, deberi, sed necessario hujus esse conditionis.

Proposita igitur formula $x^4 - (\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2})^2 y^4 = \square$, sive $(a^2 + b^2)^2 x^4 - (a^2 - b^2)^2 y^4 = \square$, eidem satisfiet posito $x = a^4 + b^4$ et $y = 2ab(a^2 + b^2)$; quam solutionem, maxime quidem suo in genere universalem, nesciam, qua demum alia via, nisi quam permutabilitatis notio nobis patefecerit, invenire quis potuisset. Hinc simul elucet, formulam $(a^2+b^2)^2 x^4 + (a^2-b^2)^2 y^4$ nunquam quadrato aequalem reddi posse; quod quidem et ipsum videtur (a reliquis sejunctum) esse theorema difficilioris indaginis. Sponte intelligitur casus $a = b$, $x = 0$, $y = 0$ esse excipiendos.

11. Spero, quae hactenus invenire et proponere licuerit, etiamnum maxime sublimia tractantibus acceptum iri ceu tantillum quidem, tamen haud ingratum scientiae quasi infinitae incrementum. Imprimis laetabor, si hoc meo labore virorum doctissimorum et praestantissimorum Coronae, quae Petropoli floret, immensi regni ornamento, comprobatum fuerit, me non sine fructu peregregios ejusdem Commentarios, ditissimos omnis et profundioris et elegantioris doctrinae thesauros evolvisse et in usum scientiae, quam profitari benignum concessit Numen, convertisse. Ecquid honorificentius Autori? ecquid dulcius laborum illi lenimen?

Additamentum ad n. 7. Mirum sane videbitur formularum $x^2 + y^2$ et $x^2 + 11y^2$ concordiam exploraturo (concordantes autem reperit Ill. EULERUS) et methodum nostram generalem, aequatione (D) n. 2. contentam, sequenti nullam prorsus solutionem sese offerre, licet omnes ipsius g valores: 1, 2, 3, 4, 6, 12 in subsidium vocaverit; neque theorema I. aliquam harum formularum concordiam indicare. Posito vero $y = pz$, fiet $x^2 + p^2 z$ et $x^2 + 11p^2 z$; quare, si ejusmodi valores indeterminatae p inveniri possint, ut fiat $(p^2+1)(11p^2+1)=P^2$, habebitur solutio: $x=11p^4-1$ et $y=2Pp$. Obvio igitur valore $p=2$, cui respondet $P=15$, obtinebitur $x=11.2^4-1=175$ et $y=2.15.2=60$, sive $x=35$ et $y=12$, quae solutio praebet

$$x^2+y^2=35^2+12^2=37^2 \text{ et } 35^2+11.12^2=53^2.$$

Eodem modo formulae x^2+y^2 et x^2+86y^2 concordantes se probabunt tentanti producti (p^2+1) $(86p^2+1)$ indolem. Facto scilicet $p=4$, habebitur $P^2=17.1377=17^2.9^2$, unde $P=153$, adeoque $x=86p^4-1=22015$ et $y=2.153.4=1224$ sive, facta divisione per 17, $x=1295$ et $y=72$; quae solutio, cum sit ipsissima illa Euleriana, l. c. pag. 10 proposita, speramus non ingratum fore ***L.B.*** hoc loco latentem primi nostri theorematis nexum cum subtilissima summi illius Analystae disquisitione clarius perspexisse. Quoties nempe concordantes fuerint formulae x^2+my^2 et x^2+ny^2, *necessario* dabitur ejusmodi valor p, ut fiat (mp^2+1) $(np^2+1)=P^2$, quo invento in promptu erit solutio generalis: $x=mnp^4-1$ et $y=2Pp$. Et, v. v., quodlibet quadratum P^2 in binos factores quomodocunque resolutum, v. c. R et S, praebet $mp^2=R-1$, $np^2=S-1$, adeoque $\frac{m}{n}=\frac{R-1}{S-1}$, i. e. emergunt inde valores coëfficientium formulas x^2+my^2 et x^2+ny^2 concordantes reddentium, scil. $m=R-1$ et $n=S-1$. Ita 144 praebet valores correspondentes $\begin{matrix} m=71, & 47, & 35, & 23, & 17, & 15. \\ n=1, & 2, & 3, & 5, & 7, & 8. \end{matrix}$ Aliam seriem suppeditabit Theor. II.; aliam iterum Theor. III., aliam denique Theor. IV. ita ut vel levissimo labore infinitus binarum formularum concordantium numerus assignari possit, una cum solutione iisdem congrua.

RECHERCHE GÉNÉRALE
SUR
LA QUANTITÉ DE LUMIÈRE
DIRECTE OU INDIRECTE, ENVOYÉE DANS L'OEIL
PAR
DES OBJETS LUMINEUX.
PAR
N. G. AF SCHULTEN.

(Lu à l'Académie le 28. Mai 1823.)

La clarté mathématique des objets de la vue, se mesurant selon les Opticiens les plus approuvés, par la quantité de lumière entrée dans l'oeil, divisée par l'étendue de l'image sur la rétine, les problèmes ayant pour objet la détermination de cette quantité dans des cas différens, doivent sous beaucoup de rapports nous intéresser. Aussi ces problèmes, entièrement du ressort des Mathématiques pures, n'ont ils pas échappé à l'attention des Géomètres, parmi lesquels il faut distinguer particulièrement M. Malus, dont le traité d'Optique, inséré dans le tome second des Mémoires présentés, renferme sur ce sujet des recherches excellentes, qui n'auraient sans doute rien laissé à désirer, si l'auteur célèbre les avait présentées sous une forme un peu plus générale et qu'il les eût en même tems un peu plus développées eu égard à la position et à la grandeur données de l'ouverture de l'oeil. Voilà ce que nous nous proposons d'effectuer dans ce mémoire, où nous déduirons de la manière qui nous a paru la plus satisfaisante, d'abord l'expression générale de l'intensité relative d'un faisceau de rayons infiniment menu quelconque, valeur qu'il nous sera ensuite facile d'appliquer à la détermination de la quantité absolue de lumière envoyée dans l'oeil soit immédiatement soit médiatement par un objet quelconque de forme et de position déterminées.

Soient

$$y = kx + l$$
$$z = mx + n$$

les équations d'un rayon de lumière quelconque en coordonnées rectangulaires, et

$$y = \varkappa x + \lambda$$
$$z = \mu x + \nu$$

celles du même rayon dont la position a été modifiée par un nombre quelconque de réflexions, de réfractions simples ou doubles, de diffractions etc., condition que nous exprimerons en général par la supposition que $\varkappa$, λ, μ, ν sont des fonctions données de k, l, m, n.

En assujétissant tous les rayons du premier genre à émaner d'un point donné dont les coordonnées soient a, b, c, on aura

$$b = ka + l$$
$$c = ma + n,$$

d'où se déterminent l, n en a, b, c, k, m.

Soient actuellement k, m des fonctions données de deux quantités variables g, h; l, n seront fonctions des mêmes quantités et des coordonnées a, b, c; enfin $\varkappa$, λ, μ, ν, qui dépendent d'une manière déterminée de k, l, m, n, seront aussi des fonctions données de g, h, a, b, c.

Le rayon direct et le rayon indirect, qui en dépend, auront donc pour équations respectivement

$$\left.\begin{array}{l} y - b = k\,(x - a) \\ z - c = m\,(x - a) \end{array}\right\} \;.\;.\; 1.$$

et

$$\left.\begin{aligned} y &= \varkappa x + \lambda \\ z &= \mu x + \nu \end{aligned}\right\}\ldots\ldots \mathrm{I});$$

où dans tout ce qui suit il faudra regarder k, m comme des fonctions données de g, h et $\varkappa$, λ, μ, ν comme des fonctions données de g, h, a, b, c, les coordonnées a, b, c étant entièrement indépendantes de g, h.

Par la détermination convenable de g, h il sera en général possible de faire passer par un point quelconque donné les droites représentées par 1) et I): toutes les valeurs possibles étant donc supposées aux g, h, le rayon direct et le rayon indirect rempliront entièrement l'espace, ce qu'il importe de remarquer.

Concevons maintenant trois rayons quelconques directs infiniment proches de celui qui est représenté par 1), c'est-à-dire correspondans à $g + dg$. $h + dh$, $g + dg'$, $h + dh'$ et $g + dg''$, $h + dh''$, les accroissemens dg, dh, dg', dh', dg'', dh'' étant infiniment petits. Les équations de ces rayons seront

$$\left.\begin{aligned} y - b &= (k + k'dg + k_{,}dh)(x - a) \\ z - c &= (m + m'dg + m_{,}dh)(x - a) \end{aligned}\right\}\ldots 2),$$

$$\left.\begin{aligned} y - b &= (k + k'dg' + k_{,}dh')(x - a) \\ z - c &= (m + m'dg' + m_{,}dh')(x - a) \end{aligned}\right\}\ldots 3),$$

et

$$\left.\begin{aligned} y - b &= (k + k'dg'' + k_{,}dh'')(x - a) \\ z - c &= (m + m'dg'' + m_{,}dh'')(x - a) \end{aligned}\right\}\ldots 4),$$

supposé pour abréger

$$\frac{dk}{dg} = k', \quad \frac{dk}{dh} = k_{,}, \quad \frac{dm}{dg} = m', \quad \frac{dm}{dh} = m_{,}.$$

Les équations des trois rayons indirects qui correspondent à celles-ci, seront

$$\left.\begin{aligned} y &= (\varkappa + \varkappa'dg + \varkappa_{,}dh)\,x + \lambda + \lambda'dg + \lambda_{,}dh \\ z &= (\mu + \mu'dg + \mu_{,}dh)\,x + \nu + \nu'dg + \nu_{,}dh \end{aligned}\right\}\ldots \mathrm{II}).$$

$$\left.\begin{aligned} y &= (\varkappa + \varkappa'dg' + \varkappa_{,}dh')\,x + \lambda + \lambda'dg' + \lambda_{,}dh' \\ z &= (\mu + \mu'dg' + \mu_{,}dh')\,x + \nu + \nu'dg' + \nu_{,}dh' \end{aligned}\right\}\ldots \mathrm{III}),$$

et

$$\left.\begin{array}{l} y=(\varkappa+\varkappa' dg''+\varkappa_{,} dh')\,x+\lambda+\lambda' dg''+\lambda_{,} dh'' \\ z=(\mu+\mu' dg''+\mu_{,} dh'')\,x+\nu+\nu' dg''+\nu_{,} dh'' \end{array}\right\} \;.\;.\; \mathrm{IV}),$$

supposé de même

$$\frac{d\varkappa}{dg}=\varkappa',\quad \frac{d\varkappa}{dh}=\varkappa_{,},\quad \frac{d\lambda}{dg}=\lambda',\quad \frac{d\lambda}{dh}=\lambda_{,}$$
$$\frac{d\mu}{dg}=\mu',\quad \frac{d\mu}{dh}=\mu_{,},\quad \frac{d\nu}{dg}=\nu',\quad \frac{d\nu}{dh}=\nu_{,}.$$

Désignant de plus par σ, τ, v les coordonnées d'un point donné du rayon représenté par I) et supposant que par ce point on ait mené un plan quelconque représenté par l'équation

$$z-v=\varphi(x-\sigma)+\chi(y-\tau),$$

le problème qui va d'abord nous occuper aura pour objet la détermination *de l'aire du petit triangle formé par les droites joignant les trois points où ce plan est rencontré par les rayons représentés par les équations* II), III) *et* IV).

Nommant Σ, T, Y, Σ', T', Y' et Σ'', T'', Y'' les coordonnées des trois points en question, les Σ, T, Y se détermineront par les équations

$$Y-v=\varphi(\Sigma-\sigma)+\chi(T-\tau)$$
$$T=(\varkappa+\varkappa' dg+\varkappa_{,} dh)\Sigma+\lambda+\lambda' dg+\lambda_{,} dh$$
$$Y=(\mu+\mu' dg+\mu_{,} dh)\Sigma+\nu+\nu' dg+\nu_{,} dh.$$

Au moyen des équations de condition

$$\tau=\varkappa\sigma+\lambda$$
$$v=\mu\sigma+\nu$$

on en tirera aisément

$$\Sigma=\frac{(\mu-\varkappa\chi-\varphi)\sigma+(\lambda'\chi-\nu')dg+(\lambda_{,}\chi-\nu_{,})dh}{\mu-\varkappa\chi-\varphi+(\mu'-\varkappa'\chi)dg+(\mu_{,}-\varkappa_{,}\chi)dh}$$

$$=\sigma+\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')\chi-\sigma\mu'-\nu'}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dg+\frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})\chi-\sigma\mu_{,}-\nu_{,}}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dh+\text{etc.}$$

$$T=\tau+\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')(\mu-\varphi)-(\sigma\mu'+\nu')\varkappa}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dg+\frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})(\mu-\varphi)-(\sigma\mu_{,}+\nu_{,})\varkappa}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dh+\text{etc.}$$

$$Y=v+\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')\mu\chi-(\sigma\mu'+\nu')(\varkappa\chi+\varphi)}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dg+\frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})\mu\chi-(\sigma\mu_{,}+\nu_{,})(\varkappa\chi+\varphi)}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}\,dh+\text{etc.}$$

Faisant pour abréger

$$\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')\chi-\sigma\mu'-\nu'}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=g_1,\quad \frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})\chi-\sigma\mu_{,}-\nu_{,}}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=h_1$$

$$\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')(\mu-\varphi)-(\sigma\mu'+\nu')\varkappa}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=g_2,\quad \frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})(\mu-\varphi)-(\sigma\mu_{,}+\nu_{,})\varkappa}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=h_2$$

$$\frac{(\sigma\varkappa'+\lambda')\mu\chi-(\sigma\mu'+\nu')(\varkappa\chi+\varphi)}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=g_3,\quad \frac{(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})\mu\chi-(\sigma\mu_{,}+\nu_{,})(\varkappa\chi+\varphi)}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=h_3,$$

et négligeant, comme il faut, les puissances de dg, dh supérieures à la première, nous aurons

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sigma + g_1 dg + h_1 dh\\ T &= \tau + g_2 dg + h_2 dh\\ \Upsilon &= \upsilon + g_3 dg + h_3 dh\end{aligned}$$

On en conclura sur-le-champ

$$\begin{aligned}\Sigma' &= \sigma + g_1 dg' + h_1 dh'\\ T' &= \tau + g_2 dg' + h_2 dh'\\ \Upsilon' &= \upsilon + g_3 dg' + h_3 dh'\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Sigma'' &= \sigma + g_1 dg'' + h_1 dh''\\ T'' &= \tau + g_2 dg'' + h_2 dh''\\ \Upsilon'' &= \upsilon + g_3 dg'' + h_3 dh'',\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Sigma' - \Sigma &= g_1(dg' - dg) + h_1(dh' - dh)\\ T' - T &= g_2(dg' - dg) + h_2(dh' - dh)\\ \Upsilon' - \Upsilon &= g_3(dg' - dg) + h_3(dh' - dh)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Sigma'' - \Sigma &= g_1(dg'' - dg) + h_1(dh'' - dh)\\ T'' - T &= g_2(dg'' - dg) + h_2(dh'' - dh)\\ \Upsilon'' - \Upsilon &= g_3(dg'' - dg) + h_3(dh'' - dh).\end{aligned}$$

Les trois côtés du petit triangle en question étant désignés par ψ, ψ', ψ'',

$$\begin{aligned}\psi^2 &= (\Sigma' - \Sigma)^2 + (T' - T)^2 + (\Upsilon' - \Upsilon)^2\\ \psi'^2 &= (\Sigma'' - \Sigma)^2 + (T'' - T)^2 + (\Upsilon'' - \Upsilon)^2\\ \psi''^2 &= (\Sigma'' - \Sigma')^2 + (T'' - T')^2 + (\Upsilon'' - \Upsilon')^2,\end{aligned}$$

d'où l'aire cherchée du triangle

$$=\omega=\tfrac{1}{2}\sqrt{\psi^2\psi'^2-\tfrac{1}{4}(\psi^2+\psi'^2-\psi''^2)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{array}{l}[(\Sigma'-\Sigma)^2+(T'-T)^2+(Y'-Y)^2][(\Sigma''-\Sigma)^2+(T''-T)^2+(Y''-Y)^2]\\ -\tfrac{1}{4}[(\Sigma'-\Sigma)^2+(T'-T)^2+(Y'-Y)^2+(\Sigma''-\Sigma)^2+(T''-T)^2+(Y''-Y)^2\\ -(\Sigma''-\Sigma')^2-(T''-T')^2-(Y''-Y')^2]^2\end{array}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{array}{l}[(\Sigma'-\Sigma)^2+(T'-T)^2+(Y'-Y)^2][(\Sigma''-\Sigma)^2+(T''-T)^2+(Y''-Y)^2]\\ -[(\Sigma'-\Sigma)(\Sigma''-\Sigma)+(T'-T)(T''-T)+(Y'-Y)(Y''-Y)]^2\end{array}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{array}{l}[(T''-T)(\Sigma'-\Sigma)-(T'-T)(\Sigma''-\Sigma)]^2+[(Y''-Y)(\Sigma'-\Sigma)-\\ (Y'-Y)(\Sigma''-\Sigma)]^2+[(T''-T)(Y'-Y)-(T'-T)(Y''-Y)]^2.\end{array}}$$

Or d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}(T''-T)(\Sigma'-\Sigma)-(T'-T)(\Sigma''-\Sigma)&=[g_2(dg''-dg)+h_2(dh''-dh)][g_1(dg'-dg)+h_1(dh'-dh)]\\ &\quad-[g_2(dg'-dg)+h_2(dh'-dh)][g_1(dg''-dg)+h_1(dh''-dh)]\\ &=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)][g_1h_2-g_2h_1]\\ (Y''-Y)(\Sigma'-\Sigma)-(Y'-Y)(\Sigma''-\Sigma)&=[g_3(dg''-dg)+h_3(dh''-dh)][g_1(dg'-dg)+h_1(dh'-dh)]\\ &\quad-[g_3(dg'-dg)+h_3(dh'-dh)][g_1(dg''-dg)+h_1(dh''-dh)]\\ &=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)][g_1h_3-g_3h_1]\\ (T''-T)(Y'-Y)-(T'-T)(Y''-Y)&=[g_2(dg''-dg)+h_2(dh''-dh)][g_3(dg'-dg)+h_3(dh'-dh)]\\ &\quad-[g_2(dg'-dg)+h_2(dh'-dh)][g_3(dg''-dg)+h_3(dh''-dh)]\\ &=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)][g_3h_2-g_2h_3].\end{aligned}$$

Faisant pour abréger

$$\frac{\sigma\varkappa'+\lambda'}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=p',\quad\frac{\sigma\mu'+\nu'}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=q',$$

$$\frac{\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,}}{\mu-\nu\chi-\varphi}=p_{,},\quad\frac{\sigma\mu_{,}+\nu_{,}}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=q_{,},$$

on aura

$$\begin{array}{ll}g_1=p'\chi-q', & h_1=p_{,}\chi-q_{,}\\ g_2=(\mu-\varphi)p'-\varkappa q', & h_2=(\mu-\varphi)p_{,}-\varkappa q_{,}\\ g_3=p'\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi)q', & h_3=p_{,}\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi)q_{,}.\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}g_1h_2-g_2h_1&=[p'\chi-q'][(\mu-\varphi)p_{,}-\varkappa q_{,}]-[(\mu-\varphi)p'-\varkappa q'][p_{,}\chi-q_{,}]\\ &=(p'q_{,}-p_{,}q')(\mu-\varkappa\chi-\varphi),\end{aligned}$$

$$g_1h_3-g_3h_1=[p'\chi-q')[p_{,}\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi)q_{,}]-[p'\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi)q'][p_{,}\chi-q_{,}]$$
$$=(p'q_{,}-p_{,}q')(\mu-\varkappa\chi-\varphi)\chi,$$
$$g_3h_2-g_2h_3=[p'\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi]q'[(\mu-\varphi)p_{,}-\varkappa q_{,}]-[(\mu-\varphi)p'-\varkappa q'][p_{,}\mu\chi-(\varkappa\chi+\varphi)q_{,}]$$
$$=(p'q_{,}-p_{,}q')(\mu-\varkappa\chi+\varphi)\varphi,$$

et par conséquent

$$(T''-T)(\Sigma'-\Sigma)-(T'-T)(\Sigma''-\Sigma)=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)]$$
$$[p'q_{,}-p_{,}q'][\mu-\varkappa\chi-\varphi]$$
$$(Y''-Y)(\Sigma'-\Sigma)-(Y'-Y)(\Sigma''-\Sigma)=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)]$$
$$[p'q_{,}-p_{,}q'][\mu-\varkappa\chi-\varphi]\chi$$
$$(T''-T)(Y'-Y)-(T'-T)(Y''-Y)=[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)]$$
$$[p'q_{,}-p_{,}q'][\mu-\varkappa\chi-\varphi]\varphi.$$

Donc enfin

$$\omega=\tfrac{1}{2}[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)][p'q_{,}-p_{,}q'][\mu-\varkappa\chi-\varphi]\sqrt{1+\chi^2+\varphi^2}$$
$$=\frac{[(dg'-dg)(dh''-dh)-(dg''-dg)(dh'-dh)][(\sigma\varkappa'+\lambda')(\sigma\mu_{,}+\nu_{,})-(\sigma\varkappa_{,}+\lambda_{,})(\sigma\mu'+\nu')]\sqrt{1+\varphi^2+\chi^2}}{2(\mu-\varkappa\chi-\varphi)}$$
$$=\frac{[(dg'-dg)(dh''-dh)-dg''-dg)(dh'-dh)][(\varkappa'\mu_{,}-\varkappa_{,}\mu')\sigma^2+(\varkappa'\nu_{,}-\varkappa_{,}\nu'+\lambda'\mu_{,}-\lambda_{,}\mu')\sigma+\lambda'\nu_{,}-\lambda_{,}\nu']\sqrt{1+\varphi^2+\chi^2}}{2(\mu-\varkappa\chi-\varphi)}$$
$$=\frac{[(dgdh'-dg'dh+dg'dh''-dg''dh'+dg''dh-dgdh''][\varkappa'\mu_{,}-\varkappa_{,}\mu'][\sigma-\tau][\sigma-\tau']\sqrt{1+\varphi^2+\chi^2}}{2(\mu-\varkappa\chi-\varphi)}\,..\,\mathrm{V}),$$

supposé pour abréger

$$(\varkappa'\mu_{,}-\varkappa_{,}\mu')\sigma^2-(\varkappa'\nu_{,}-\varkappa_{,}\nu'+\lambda'\mu_{,}-\lambda_{,}\mu')\sigma+\lambda'\nu_{,}-\lambda_{,}\nu'=(\varkappa'\mu_{,}-\varkappa_{,}\mu')(\sigma-\tau)(\sigma-\tau').$$

L'équation

$$(\varkappa'\mu_{,}-\varkappa_{,}\mu')x^2+(\varkappa'\nu_{,}-\varkappa_{,}\nu'+\lambda'\mu_{,}-\lambda_{,}\mu')x+\lambda'\nu_{,}-\lambda_{,}\nu'=0$$

étant justement celle par laquelle se déterminent les valeurs de x correspondantes aux points où le rayon représenté par I) est coupé par ceux des rayons contigus qui le rencontrent (ce qu'il serait facile de prouver), il s'ensuit que $\tau_{,}\,\tau'$ ne sont autre chose que les valeurs de x relatives à ces deux points. Donc, l'aire infiniment petite ω s'évanouissant dans la supposition de

$$\sigma=\tau \text{ ou } \sigma=\tau'$$

quels que soient dg, dh, dg', dh', dg'', dh'', il faut en tirer la conséquence remarquable, que *dans un faisceau infiniment menu de rayons disposés dans l'es-*

pace suivant une loi analytique quelconque, la section transversale, en général de deux dimensions, aux deux points déterminés dont il s'agit, en effet n'en a qu'une.

Afin de donner à la valeur de ω une forme un peu plus simple, nous ferons observer que

$$(\sigma-\tau)\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}, \quad (\sigma+\tau')\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}$$

expriment respectivement les distances du point dont les coordonnées sont σ, τ, v aux deux points de rencontre en question, et que

$$-\frac{\mu-\varkappa\chi-\varphi}{\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}\cdot\sqrt{1+\varphi^2+\chi^2}}$$

représente le sinus de l'angle formé par le rayon représenté par I) et le plan dont l'équation est

$$z-v=\varphi(x-\sigma)+\chi(y-\tau).$$

Désignant donc les deux premières par ϱ, ϱ' et le troisième par sin. ε, on aura

$$\sigma-\tau=\frac{\varrho}{\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}}, \quad \sigma-\tau'=\frac{\varrho'}{\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+\varphi^2+\chi^2}}{\mu-\varkappa\chi-\varphi}=\frac{-1}{\text{Sin.}\,\varepsilon\sqrt{1+\varkappa^2+\mu^2}}:$$

et par conséquent

$$\omega=-\frac{(dg\,dh'-dg'dh+dg'dh''-dg''dh'+dg''dh-dg\,dh'')(\varkappa'\mu-\varkappa\mu')\varrho\varrho'}{2(1+\varkappa^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}\,\text{Sin.}\,\varepsilon} \quad \ldots\ldots \text{VI}).$$

De la forme des résultats V), VI), jointe à la nature tout-à-fait arbitraire des accroissemens dg, dh, dg', dh', dg'', dh'', il est facile de conclure, que, tant qu'il s'agira du même faisceau de rayons primitifs, une portion quelconque de la section transversale du faisceau indirect dont il s'agit, renfermant des rayons déterminés, devra toujours suivre le rapport fini

$$\frac{\omega}{dg\,dh'-dg'dh+dg'dh''-dg''dh'+dg''dh-dg\,dh''}$$

Donc, l'intensité de la lumière étant en raison inverse de l'étendue des surfaces sur lesquelles la même quantité de rayons est dispersée, l'intensité du faisceau en question sera en général proportionelle à

$$\frac{dg\,dh'-dg'\,dh+dg'\,dh''-dg''\,dh'+dg''\,dh-dg\,dh''}{\omega}:$$

quantité qui par conséquent en représente *l'intensité relative*.

Les $\varkappa$, μ étant supposées constantes dans VI), il s'ensuit tout de suite que l'intensité d'un *même* faisceau de rayons change en raison de

$$\frac{\text{Sin. }\vartheta}{\rho\rho'}:$$

résultat d'une simplicité remarquable.

Le principal objet de notre recherche dépendant de la comparaison de l'intensité d'un faisceau quelconque direct avec celle de l'indirect qui lui correspond, il faut appliquer maintenant aux rayons représentés par 2), 3), 4) les résultats trouvés jusqu'ici pour ceux représentés par II), III), IV). C'est ce qui se fera aisément en substituant dans V) au lieu de

$$\omega \quad \varkappa \quad \lambda \quad \mu \quad \nu \quad \sigma \quad \varphi \quad \chi$$

respectivement

$$\varpi \quad k \quad b-ka \quad m \quad c-ma \quad s \quad p \quad q.$$

Les τ, τ' se changeant ainsi en a, en obtiendra sur-le-champ

$$\varpi=\frac{(dg\,dh'-dg'\,dh+dg'\,dh''-dg''\,dh'+dg''\,dh-dg\,dh'')(k'm_{,}-k_{,}m')(s-a)^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{2(m-kq-p)}\ldots 5)$$

Supposant

$$(s-a)\sqrt{1+k^2+m^2}=r$$

$$-\frac{m-kq-p}{\sqrt{1+k^2+m^2}\,.\,\sqrt{1+p^2+q^2}}=\text{Sin. }u,$$

où r désigne la distance du point du rayon que l'on considère, à celui dont les coordonnées sont a, b, c, et u l'angle formé par le rayon et le plan dont il s'agit, la 5) se changera facilement en

$$\varpi=-\frac{(dg\,dh'-dg'\,dh+dg'\,dh''-dg''\,dh'+dg''\,dh-dg\,dh'')(k'm_{,}-k_{,}m')r^2}{2(1+k^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\text{Sin. }u}\ldots\ldots 6),$$

formule entièrement analogue à VI), d'où il est facile de conclure que, dans un faisceau de rayons émanans d'un seul point, l'intensité de la lumière varie en raison de

$$\frac{\text{Sin. } u}{r^2}:$$

résultat d'ailleurs connu.

Afin d'appliquer les résultats précédens à ce qui constitue le principal objet de cette recherche, soient α, β, γ les coordonnées de l'oeil, considéré comme un point, et soit

$$z-\gamma=\zeta(x-\alpha)+\eta(y-\beta)$$

l'équation du plan de la prunelle, dont l'aire, qu'il suffira de considérer, dans cette recherche, comme infiniment petite, soit représentée par ϑ. Soit de plus f la quantité *absolue* de lumière émanée immédiatement du point dont les coordonnées sont a, b, c et tombée perpendiculairement sur l'aire infiniment petite t éloignée du point lumineux de la distance e, f étant en général supposée fonction de a, b, c, g, h. Enfin pour embrasser en général la diminution immédiate de l'intensité de la lumière, due à sa réflexion ou réfraction partielle, à son absorption par des milieux réfringens etc., soit π un coëfficient donné par des expériences particulières, et par lequel il faudra multiplier l'intensité des faisceaux indirects non affaiblis par les causes en question, pour obtenir celle des mêmes faisceaux qui en sont modifiés, π étant par conséquent aussi fonction de a,b, c, g, h.

Déterminons d'abord la quantité de lumière *directe* envoyée dans l'oeil par le point dont les coordonnées sont a, b, c. Désignant k_0, m_0, k'_0, $k_{,0}$, m'_0, $m_{,0}$, f_0 ce que deviennent k, m, k', $k_,$, m', $m_,$, f en y substituant les valeurs de g, h déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned}\beta-b&=k\,(\alpha-a)\\ \gamma-c&=m\,(\alpha-a)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots 7),$$

nous aurons au moyen de 5), 6)

$$-\frac{2(1+k_0{}^2+m_0{}^2)^{\frac{3}{2}}}{(k'_0m_{,0}-k_{,0}m'_0)e^2}:\frac{2(m_0-k_0\eta-\xi)}{(k'_0m_{,0}-k_{,0}m'_0)(\alpha-a)^2\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$
$$::f_0:f_{0)}=-\frac{(m_0-k_0\eta-\xi)e^2f_0}{(\alpha-a)^2(1+k_0{}^2+m_0{}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},$$

$f_{0)}$ étant la quantité de lumière tombée directement sur l'aire t, supposé que cette aire fût transportée au lieu de l'oeil et couchée sur le plan de la prunelle.

Donc la quantité cherchée de lumière envoyée immédiatement dans l'oeil par le point lumineux

$$=f_{(0)}=\frac{\vartheta}{t}f_{0)}=-\frac{(m_0-k_0\eta-\xi)\vartheta e^2f_0}{t(\alpha-a)^2(1+k_0{}^2+m_0{}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}.$$

Pour ce qui regarde la lumière *indirecte*, représentons par k_1, m_1, k'_1, $k_{,1}$, m'_1, $m_{,1}$, $\varkappa_1$, μ_1, $\varkappa'_1$, $\varkappa_{,1}$, μ'_1, $\mu_{,1}$, τ_1, τ'_1, f_1, π_1 les valeurs des k, m, k', $k_,$, m', $m_,$, $\varkappa$, μ, $\varkappa'$, $\varkappa_,$, μ', $\mu_,$, τ, τ', f, π correspondantes aux valeurs de g, h données par les équations

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \varkappa\alpha+\lambda\\ \gamma &= \mu\alpha+\nu\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;\mathrm{VII}):$$

nous aurons donc par V), 6)

$$-\frac{2(1+k_1{}^2+m_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{(k'_1m_{,1}-k_{,1}m'_1)e^2}:\frac{2(\mu_1-\varkappa_1\eta-\xi)}{(\varkappa'_1\mu_{,1}+\varkappa_{,1}\mu'_1)(\alpha-\tau_1)(\alpha-\tau'_1)\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$
$$::f_1:f_{1)}=-\frac{(\mu_1-\varkappa_1\eta-\xi)(k'_1m_{,1}-k_{,1}m'_1)e^2f_1}{(\varkappa'_1\mu_{,1}-\varkappa_{,1}\mu'_1)(\alpha-\tau_1)(\alpha-\tau'_1)(1+k_1{}^2+m_1{}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},$$

$f_{1)}$ désignant la quantité de lumière indirecte illuminant l'aire t transportée au lieu de l'oeil et posée sur le plan de la prunelle, son intensité n'ayant encore éprouvé aucun décroissement immédiat.

Donc la quantité cherchée de lumière indirecte affaiblie entrant dans l'oeil

$$=f_{(1)}=\frac{\vartheta}{t}\pi_1f_{1)}$$
$$=-\frac{(\mu_1-\varkappa_1\eta-\xi)(k'_1m_{,1}-k_{,1}m'_1)\vartheta e^2\pi_1f_1}{t(\varkappa'_1\mu_{,1}-\varkappa_{,1}\mu'_1)(\alpha-\tau_1)(\alpha-\tau'_1)(1+k_1{}^2+m_1{}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}.$$

Les $f_{(0)}$, $f_{(1)}$ étant ainsi déterminées pour un *point* lumineux donné, le passage en est facile aux valeurs correspondantes relatives à une *ligne* ou à une *surface* quelconque dont tous les point répandent de la lumière suivant une loi donnée.

Dans le premier cas, désignons par ${}^{1}f$, ${}^{1}f_{(0)}$, ${}^{1}f_{(1)}$ des quantités de lumière analogues aux précédentes f, $f_{(0)}$, $f_{(1)}$. mais relatives à une portion de la ligne infiniment petite de la longueur déterminée ${}^{1}\vartheta$, tandis que celles-ci n'appartiennent qu'à un point mathématique de la même portion, ${}^{1}f$ étant au reste supposée comme f une fonction donnée de a, b, c, g, h. Représentant par ${}^{1}f_{0}$, ${}^{1}f_{1}$ des valeurs de ${}^{1}f$ analogues à f_{0}, f_{1}, on aura évidemment

$$ {}^{1}f_{(0)} = \frac{f_{(0)} \cdot {}^{1}f_{0}}{f_{0}}, \quad {}^{1}f_{(1)} = \frac{f_{(1)} \cdot {}^{1}f_{1}}{f_{1}}; $$

d'où enfin il s'ensuit que les intégrales

$$ \int \frac{f_{(0)}}{f_{0}} \cdot \frac{{}^{1}f_{0}}{{}^{1}\vartheta} \cdot \sqrt{da^{2} + db^{2} + dc^{2}}, $$

$$ \int \frac{f_{(1)}}{f_{1}} \cdot \frac{{}^{1}f_{1}}{{}^{1}\vartheta} \cdot \sqrt{da^{2} + db^{2} + dc^{2}}, $$

prises entre les limites dont il s'agit, expriment les quantités cherchées de lumière directe et indirecte envoyées dans l'oeil dans ce cas.

Quant au développement de ces intégrales, il faut observer que les variables g, h ayant été chassées d'après ce qui précède au moyen de 7) VII), il ne doit plus rester sous les signes $\int$ que les variables a, b, c mêlées des constantes α, β, γ, ζ, η, e, t, ϑ, ${}^{1}\vartheta$, fonctions que par le moyen des équations données de la ligne en a, b, c on changera enfin en différentielles d'une seule variable.

Dans le cas d'une surface lumineuse, représentant par ${}^{2}f$ la quantité de lumière émanée immédiatement d'une portion de la surface infiniment petite de l'aire donnée ${}^{2}\vartheta$, et tombée perpendiculairement sur l'aire t à la distance e, ${}^{2}f$ étant une fonction donnée de g, h et des coordonnées de la portion lumineuse a, b, c, on conclura comme auparavant que les quantités cherchées de lumière directe et indirecte entrées dans l'oeil s'expriment respectivement par les intégrales

$$\int\!\!\int \frac{f_{(0)}}{f_0} \cdot \frac{{}^{2}f_0}{2\vartheta} \cdot \sqrt{da^2db^2 + da^2dc^2 + db^2dc^2},$$

$$\int\!\!\int \frac{f_{(1)}}{f_1} \cdot \frac{{}^{2}f_1}{2\vartheta} \cdot \sqrt{da^2db^2 + da^2dc^2 + db^2dc^2},$$

dont le développement est sujet à des remarques analogues à celles que nous venons de faire pour le cas précédent.

Il ne serait pas difficile d'étendre la théorie précédente à la détermination des quantités de lumière directe ou indirecte passant en général par des ouvertures de grandeur finie, terminées par des lignes ou par des surfaces données; mais ces recherches ne conduisant qu'à des résultats compliqués sans intérêt pratique, nous ne nous y arrêterons point.

MÉMOIRE
SUR LA
CONSTRUCTION DES CHAUSSÉES
ET SUR LA
DÉTERMINATION DES DISTANCES MOYENNES
POUR LE
TRANSPORT DES MATÉRIAUX.

PAR
M. le Général Bazaine,
DIRECTEUR DE L'INSTITUT DES VOIES DE COMMUNICATION.

(Lu à l'Académie le 18. Juin 1823.)

La construction d'une chaussée entre St.-Pétersbourg et Moscou, depuis longtemps réclamée par les besoins du commerce et la fréquence des relations qu'entretiennent ces deux capitales, se poursuit avec l'activité qui distingue tous les travaux exécutés sous les auspices de Son Altesse Royale Monseigneur le Duc Alexandre de Wurtemberg, Dirigeant-en-chef des voies de communication. Quelques années suffiront pour mettre fin à cette immense entreprise dont on n'avait pas osé assigner le terme à son origine, et qu'on peut déjà regarder aujourd'hui comme une des plus remarquables de ce genre par la grandeur, la variété, et le fini des ouvrages d'art qui lui doivent naissance.

Le succès éclatant qui a couronné les efforts des ingénieurs attachés à ce beau travail, est un sûr garant de la perfection avec laquelle seront exécutées successivement toutes les grandes communications de même espèce qu'une haute prévoyance médite d'établir entre les autres points principaux de ce vaste Empire. Mais comme par suite de leur multiplicité infinie, les communications de moindre importance resteront long-temps encore confiées aux soins des autorités administratives dans les diverses provinces, il serait à désirer que les connaissances relatives à la construction des routes fussent assez généralement répandues, pour que ces autorités fussent à même de concourir à l'accomplissement des vues bienfaisantes du Gouvernement, en substituant par dégrés aux routes naturelles des chaussées régulières, partout où les localités en fourniraient les moyens. Cette réflexion m'a déterminé à publier le mémoire qu'on va lire. Je n'ai pas la prétention de croire qu'on doive adopter aveuglément et sans restriction toutes les propositions qu'il renferme, mais je me flatte au moins de l'espérance qu'on les trouvera parfaitement rigoureuses sous le point de vue de la théorie, et que l'on se convaincra qu'une expérience éclairée peut seule indiquer les modifications qu'elles doivent subir dans la pratique. Quoiqu'il en soit, ce faible travail ne sera pas sans utilité, si j'ai pu parvenir à rendre populaires quelques uns des principes sur lesquels se fonde un genre de construction qui se lie si intimement avec les progrès de la civilisation et de l'industrie.

Je n'ai pas besoin de rappeler qu'une route quelconque n'est autre chose qu'une portion de terrain préparée de manière à offrir dans tous les temps aux voitures de transport, un passage facile et commode. Sous ce simple rapport, une route en terre franche, bien sèche, et bien battue, serait sans contredit préférable à toutes les autres; mais comme une terre, quelque dure qu'elle soit, se laisse bientôt pénétrer par les eaux de pluie, on est obligé de substituer à la surface naturelle du terrain, une aire artificielle formée de matériaux assez résistants pour ne point céder à la pression, et suffisamment liés entre eux pour mettre à l'abri de l'humidité la terre sur la quelle ils reposent. Cette aire doit avoir d'ailleurs une construction telle, qu'elle présente dans tous les sens à l'eau des pluies, des moyens d'écoulement prompts et assurés. Pour satisfaire à ces conditions, on conçoit la surface de la route engendrée par un ensemble de lignes droites ou courbes comprises dans un même plan. C'est cet ensemble qu'on appelle le *profil transversal.* Dans la génération de la route, il est assujéti à se mouvoir normalement à l'axe longitudinal, ou à la direction de cette route. Quant à cette direction elle même, elle est toujours le résultat de considérations particulières, dépendantes de la nature du sol, et de la position des lieux habités, par lesquels la route doit passer. Les pentes des divers alignements qui la composent, sont ordinairement déterminées par la nécessité d'établir une juste compensation entre les déblais et les remblais.

Avant d'exposer les principes d'après lesquels on devra tracer le profil transversal générateur de la route, je crois devoir observer que la première opération dont il faudra s'occuper, sera de préparer la surface du terrain suivant la direction adoptée, et sur uue largeur au moins égale à celle du profil en travers. Cette préparation consistera: 1. à faire disparaître toutes les substances végétales qui pourraient, en servant de conductrices à l'eau, entretenir sous la chaussée une humidité nuisible; 2. à applanir, au moyen des remblais et déblais nécessaires, la portion de terrain sur la quelle portera la nouvelle route. Ce n'est qu'après avoir terminé cette opération indispensable, qu'on pourra procéder à l'établissement de la chaussée, suivant le profil transversal que nous allons déterminer.

Je n'entrerai point dans le détail de toutes les variations dont ce profil est susceptible; j'examineraï seulement le cas qui se présentera le plus fréquemment dans la construction des routes, celui où la chaussée sera établie sur le terrain naturel. Je représenterai donc par XX (Fig. 1) la section faite par un plan perpendiculaire à l'axe, de la portion de terrain préparée ainsi que je l'ai dit. Je remarquerai d'abord qu'autant que les localités le permettront, la nouvelle route devra être uniquement réservée au passage des convois et des voitures. Les troupeaux de bétail gêneraient la libre circulation sur la chaussée, ou dégraderaient les accotements par l'habitude qu'ils ont de marcher continuellement suivant les mêmes traces. On les soumettra donc à passer sur le terrain naturel qui bordera la route, ou si ce terrain ne présente pas une solidité suffisante, sur un chemin latéral de 5 sagènes de largeur, spécialement destiné à cet usage. J'aurai égard à cette dernière circonstance, afin de donner plus de généralité à mes raisonnements.

Le but qu'on doit se proposer de remplir en construisant une route quelconque, est de l'isoler des terrains environnants, et de la garantir des effets de l'humidité. Or la nature du sol, et même son état de culture, établissent une grande différence entre les moyens qu'on doit employer à cet effet. En France par exemple, on se contente de faire écouler les eaux de pluie qui tombent sur la chaussée, dans de petits fossées peu profonds, et séparés les uns des autres par de grands arbres qui prêtent leur ombre aux voyageurs. En Russie, un semblable moyen serait tout-à-fait insuffisant. Le terrain étant presque partout marécageux, il est nécessaire pour assécher la chaussée, non seulement de creuser de larges fossés qui règnent sans interruption sur toute sa longueur, mais encore d'élever la surface de la route au-dessus du niveau des terres environnantes. J'ai satisfait à cette double condition, en donnant aux fossés du profil des dimensions telles, que la crête B (Fig. 1) de la route principale, et celle *b* du chemin latéral, fussent élevées de 6 verchoks au-dessus du terrain naturel XX. Je rapporterai le calcul de ces dimensions, après avoir fait connaître celles des autres parties du profil.

Quoique sur quelques portions de chaussée que l'on a construites, on n'ait laissé pour accotements, que des espaces étroits destinés à recevoir les matériaux préparés pour les réparations; cependant je ne crois pas qu'on doive s'assujétir à suivre cet exemple. Les accotements en terre qui font ordinairement partie des grandes routes, ne sont pas seulement destinés au dépôt des matériaux d'entretien, et au passage des gens de pied dans la belle saison; ils soulagent encore la chaussée, en présentant aux voitures dans les temps de sécheresse un chemin uni et solide. Ils sont également nécessaires pour la réparation de la chaussée, en offrant un passage toujours libre. Enfin en épaulant le massif de l'empierrement, ils le maintiennent et le conservent. Ces accotements forment une partie du chemin tellement essentielle, qu'en France, dans les routes de la 1ère grandeur, on donne à chacun d'eux autant de largeur qu'à la chaussée même. Ainsi la largeur totale étant de 60 pieds, d'après une loi de 1620, on en réserve 20 pour la chaussée, et 40 pour les deux accotements. Quoiqu'on ait essayé en 1776 de réduire cette largeur à 42 pieds, en observant qu'elle enlevait une portion de terrain précieuse pour l'agriculture, cependant on a été contraint de revenir par la suite à la première fixation, comme étant indispensable à la facilité des communications. Cette détermination n'a pas été constamment observée, à cause des divers dégrés d'importance des routes de la première classe, mais quelle que soit la dimension de la chaussée, les accotements ont presque toujours la même largeur qu'elle. Quelquefois même ils en ont une plus grande, suivant les localités et les circonstances qui ont accompagné la construction du chemin. En général les accotements ont partout été regardés comme une partie inhérente aux grandes routes, et l'on sait en effet que le meilleur chemin qu'on puisse offrir aux voitures dans les beaux jours de l'été, est une simple surface en terre parfaitement unie, et assez sèche pour ne pas devenir inégale et raboteuse.

Tous ces motifs m'ont engagé à adopter dans le profil que je propose, des accotements dont chacun doit avoir 3 sagènes. Cette largeur sera divisée en deux parties; deux sagènes seront destinées au passage dans les temps secs; une sagène sera réservée pour l'emplacement des matériaux d'entretien.

La largeur de la chaussée a été fixée pour la route de Moscou à 4 sagènes; mais on ne doit pas s'en tenir rigoureusement à cette fixation. Cette dimension sera sans doute convenable pour les parties de routes voisines des grandes villes, mais on pourra la réduire sans inconvénient à 3½ sagènes pour les parties intermédiaires, où les transports seront moins nombreux. Cette largeur sera encore supérieure à celle de la plûpart des grandes chaussées de France, même dans les environs de Paris, et diminuera considérablement les dépenses. Une pareille réduction ne nuira d'ailleurs en aucune manière à la célérité des transports, puisque sans avoir égard aux accotements sur lesquels on passera dans les temps secs, la chaussée seule pourra permettre le passage de quatre voitures de front, deux équipages de poste, et deux convois de charrettes allant en sens opposés.

Dans un ouvrage fort intéressant sur les grands chemins d'Angleterre, qui peut servir d'autorité sous beaucoup de rapports, à cause de la justesse des observations, Mr. MAC-ADAM prescrit de tenir les routes aussi basses que possible, et pour une chaussée de 30 pieds de largeur, il désire que l'axe ne soit élevé que de 3 pouces au-dessus des bords. On voit que par cette précaution, il a voulu éviter les inconvénients des chaussées trop bombées où les voitures sont exposées à rouler sur un talus dangereux; mais il me semble qu'on doit en général tâcher de concilier la commodité du roulage avec la nécessité d'offrir un moyen d'écoulement prompt et facile aux eaux qui tombent sur la chaussée. J'ignore si la différence de 3 pouces adoptée par Mr. MAC-ADAM, suffit en Angleterre pour remplir ce dernier objet, mais je crois qu'elle serait insuffisante en Russie.

Quoiqu'il paraisse constant que la quantité moyenne d'eau qui tombe annuellement, soit moindre dans les provinces septentrionales de l'Empire que dans les environs de Londres, cependant on doit considérer que la dégradation d'une chaussée dépend moins de la quantité d'eau qui tombe, que du nombre moyen des jours pluvieux; or, l'observation a fait voir que ce nombre augmente en même temps que la latitude, et qu'en conséquence il est plus considérable ici qu'en Angleterre. Le tassement des neiges pendant la longue durée de l'hiver, et la lenteur avec la quelle s'opère le dégel au printemps, sont d'ailleurs des causes de détérioration si constantes et si particulières au climat, qu'elles ne permettent point de s'en rapporter pour les pentes du profil, à des exemples tirés de contrées plus méridionales. La fixation de ces pentes est soumise à tant de variations, qu'en France on donne en général $\frac{1}{25}$ de bombement à la chaussée, et $\frac{1}{20}$ d'inclinaison aux accotements. Dans le profil que je propose, je ne me suis astreint à aucune de ces déterminations. La chaussée a pour bombement le 28^{me} de sa demi-largeur, et les accotements ayant $\frac{1}{16}$ de pente, sont presque tangents à la surface extérieure de l'empierrement, avantage précieux pour la facilité de l'écoulement des eaux. Si l'on réfléchit que cette pente est un peu moins considérable que celle qu'on a adoptée pour les trottoirs de St.-Petersbourg, on se convaincra qu'elle n'a rien d'exagéré, et qu'elle ne produira sur les équipages qu'une déviation presque insensible de la position verticale.

Les profils transversaux d'une route doivent être modifiés suivant les localités. Aussi n'ai-je point prétendu donner un profil général, applicable à tous les cas. En m'arrêtant à une circonstance particulière, je n'ai voulu que présenter un exemple des raisonnements qui doivent servir de guides. Les seules choses qu'on peut regarder comme étant constantes pour tous les profils, sont le bombement et l'épaisseur de la chaussée, et c'est sur ce dernier objet, que je me propose d'entrer maintenant dans quelques détails.

En France, les chaussées en empierrement sont ordinairement formées de trois couches. La première, de 9 pouces de hauteur, est composée de moellons inégaux, posés à la main, de manière à ne laisser aucun vide à leur base, et présentant à leur partie supérieure des pointes ou aspérités, qui servent ensuite à lier cette première couche avec la seconde. Celle-ci, de 3 pouces de hauteur, se compose de pierres concassées dont le volume est d'environ 2 pouces cubes, et qu'on place avec assez de soin pour remplir tous les intervalles de la couche inférieure. Enfin la troisième couche, dont l'épaisseur est également de 3 pouces, est formée de pierrailles dont le volume est réduit par le cassage à un pouce cube seulement.

En Angleterre et dans les autres contrées occidentales de l'Europe, les empierrements se composent à peu près de la même manière. Les pierrailles de la couche supérieure, étant pressées et légèrement broyées par les charges qu'elles supportent, s'aglomèrent entre elles, et forment bientôt une croûte imperméable et solide, capable de résister à de très grands fardeaux.

Si la surface extérieure de l'empierrement était partout formée de pierres concassées semblables à celles dont nous venons de parler, toutes les chaussées présenteraient à très peu près le même dégré de solidité; maies il s'en faut de beaucoup que cette circonstance ait lieu. Suivant les localités, on emploie pour la couche supérieure, tantôt du gravier pur ou mêlé de sable et d'argile, tantôt des cailloux roulés de différents volumes, et mélangés de diverses proportions de terre et de sable, tantôt enfin des pierres calcaires ou siliceuses concassées. Ces derniers matériaux sont ceux qui forment les meilleures chaussées. Les autres, composés de substances hétérogènes et de grains arrondis, n'ont point ces parties angulaires à l'aide desquelles se joignent les pierres concassées, et se laissent plus ou moins diviser ou déplacer par l'action des roues, et pénétrer par l'humidité. En général, le mauvais état des routes construites avec ces matériaux, démontre d'une manière convaincante qu'un empierrement quelconque ne doit être considéré que comme une enveloppe solide et imperméable, destinée à maintenir la surface en terre sur laquelle il repose, dans un état de sécheresse permanent. Or l'expérience a fait voir que dans une chaussée bien exécutée et depuis long-temps battue, la croûte formée par le broiement et la compression des pierres concassées supérieures, ne s'étend jamais que sur une hauteur de 3 à 4 pouces, tandis que les matériaux inférieurs conservent, à un léger resserrement près, les positions qu'ils ont prises au moment de la pose. Ces considérations nous conduisent naturellement à une conséquence bien remarquable, et dont je ne crois pas qu'on ait encore fait mention jusqu'à présent: *C'est que dans une chaussée quelconque, l'épaisseur à donner à l'empierrement doit varier avec la nature des matériaux qui le composent, et qu'elle peut se réduire à la rigueur à celle de la croûte solide et impénétrable que ces matériaux tendent à former par suite de l'action des roues.* Je n'ai par besoin de dire que cette proposition, pour être vraie, exige qu'en élevant, ainsi que je l'ai fait, le massif de la chaussée au dessus des terrains environnants, on ait mis la surface en terre qui supporte l'empierrement, à l'abri des effets de la capillarité. Ainsi par exemple, si l'on voulait construire une chaussée en fer, il suffirait d'employer des feuilles de tôle très minces, comme satisfaisant à la condition de ne point se laisser pénétrer par l'humidité; et en effet il est bien évident que la surface en terre qui se trouverait sous ces feuilles de tôle, conservant un degré de sécheresse constant, ne serait soumise à aucune cause de dégradation, et resterait dans tous les temps dure et parfaitement plane. Par une raison semblable, puisque les pierres concassées jouissent de la propriété de former à leur partie supérieure une croûte imperméable, dont l'épaisseur ne dépasse pas 4 pouces, on doit en conclure théoriquement que cette épaisseur est celle qu'il conviendrait d'adopter pour l'empierrement. Ce résultat, quelque singulier qu'il paraisse, se trouve parfaitement d'accord avec les assertions de Mr. MAC-ADAM. „Il est aussi inutile que dispendieux, dit-il, de donner une grande épaisseur aux chaussées. 12 pouces est le maximum; 3 à 4 pouces ont suffi quelquefois.“ — Malgré cette autorité, j'avouerai qu'il serait peut-être imprudent de s'en rapporter pour la pratique à l'évaluation que je vieus d'indiquer; cependant elle n'en est pas moins une conséquence rigoureuse de principes qu'il est impossible de révoquer en doute. On peut juger d'après cela combien on s'est égaré jusqu'à présent dans la fixation de l'épaisseur nécessaire à l'empierrement des chaussées. C'est à l'expérience qu'il appartient maintenant de faire connaître de combien on doit augmenter l'évaluation théorique. Je ne crois pas que dans aucun cas, il soit possible d'y ajouter moins d'un pouce, comme sûreté pratique, et je pense qu'il est indispensable de faire des essais sur des portions égales de routes, dont les épaisseurs varient depuis 5 jusqu'à 10 pouces. C'est entre ces limites que sera comprise l'épaisseur constante qu'il conviendra de donner à la chaussée. Si l'on confie la surveillance et l'entretien de cet ouvrage à des cantonniers actifs et permanents, je suis persuadé que l'on conclura des expériences qu'on aura faites, qu'une épaisseur de 6 à 7 pouces sera généralement suffisante. Le profil de la Fig. 2 est tracé d'aprés la seconde de ces déterminations.

Dans les cas assez rares, à mon avis, où, soit à cause de la nature du sol, soit par le grand nombre de transports qui fréquenteraient la chaussée, on se trouverait dans l'obligation d'adopter une épaisseur supérieure à 6 ou 7 pouces, on devrait former l'empierrement de deux couches superposées, de quatre à cinq pouces d'épaisseur chacune. La première, en contact avec le terrain, serait composée d'éclats de pierres cassées, qui seraient posés de champ, à la main, et la pointe en haut, de manière à ne laisser aucun vide à leur base. La seconde serait formée de blocailles ou petites pierres concassées dont le volume n'excéderait pas un pouce cube $\frac{1}{4}$. On économiserait par là, pour la couche inférieure, les frais du concassement, opération toujours pénible et dispendieuse.

Quelle que soit l'épaisseur de la chaussée, son empierrement sera maintenu à l'instar de toutes les constructions de même espèce, par deux bordures *m* (Fig. 2) formées de grosses pierres de choix tellement disposées, que leurs surfaces supérieures soient cachées par la blocaille, et ne montrent que leurs arêtes d'intersection avec les accotements. Ces arêtes *n* seront ainsi parallèles à l'axe de la route. Comme les roues qui passeront près de ces bordures, seront exposées à tomber sur l'accotement, et tendront ainsi à former une ornière qu'il est nécessaire d'éviter, j'ai placé à la rencontre des accotements un cailloutage *c* caché par la terre, et destiné à résister à l'effort des roues.

Il est à désirer qu'on embellisse les nouvelles chaussées de siéges de repos, de fontaines et d'abreuvoirs, ainsi qu'on le pratique dans les pays étrangers. Ces petits monuments d'utilité publique pourraient être élevés du côté opposé au chemin des bestiaux. Les arbres dont la plantation régulière ajoute à la beauté d'une grande route, et dont l'ombrage protège les voyageurs contre les ardeurs de l'été, ne doivent pas être négligés: on pourrait les disposer comme on le voit sur le profil de la Figure 1. En les espaçant d'une manière convenable, on évitera l'inconvénient reproché aux plantations trop serrées, qui s'opposent à l'assèchement de la chaussée, en la privant des rayons du soleil. Aussi n'ai-je indiqué qu'une seule rangée d'arbres sur le chemin latéral. Comme ce chemin n'a qu'une largeur de 5 sagènes, une seconde rangée y maintiendrait une humidité qui disparaîtrait difficilement.

Les poteaux de verstes, devant être assez élevés au-dessus du sol, à cause de la hauteur des neiges pendant l'hiver, ne pourraient être remplacés qu'à très grands frais par des bornes milliaires en pierre. Je crois qu'on pourrait sans trop de dépenses, leur substituer des piliers de même forme en fer fondu, qui porteraient les indications en relief des nombres de verstes, que l'on peint aujourd'hui sur les poteaux. Des piliers semblables, avec des inscriptions également en relief, seraient destinés à prévenir l'incertitude du voyageur auprès des embranchements.

Toutes les dimensions du profil étant déterminées ainsi que je viens de l'exposer, je calculerai la grandeur des trois fossés, qui devront avoir une égale profondeur au dessous du terrain naturel. La Figure 3 représentant le profil de la nouvelle route à gauche de l'axe principal AF, la somme des remblais que l'excavation des fossés devra fournir, sera égale au double de la somme des volumes $ABCDF$ et $abdcf$. De plus, comme le massif de la chaussée AG se creusera de 7 pouces pour y placer l'empierrement, on emploiera les déblais qui en résulteront pour exhausser la surface du chemin latéral. Le volume de ces déblais sera très sensiblement égal à $2GI \times \frac{1}{12}$, en prenant la sagène pour unité linéaire. Le creusage des fossés devra donc donner une quantité de terre représentée par:

$$2\left\{ABCDF + abcdf - \frac{1}{12}GI\right\}.$$

Si nous admettons que la largeur du fond soit d'une archine, ou de $\frac{1}{3}$, et qu'on règle les talus sur 2 de base pour 1 de hauteur, afin d'éviter toute espèce de dégradation, nous aurons en appelant x la profondeur inconnue du fossé:

$$2\left\{ABCDF + abcdf - \frac{1}{12}GI\right\} = \frac{3}{2}\left(4x + \frac{2}{3}\right)x;$$

Mais les dimensions que nous avons établies pour les diverses parties de la chaussée, donnent:

$$GI = \frac{3\frac{1}{2}}{2},\quad AI = \frac{1}{28} \times \frac{3\frac{1}{2}}{2},\quad BE = 4\tfrac{3}{4},$$

$$BC = bc = \frac{1}{8},\quad CD = cd = \frac{1}{4},\quad bi = 2\tfrac{1}{2},\quad ai = \frac{1}{28} \times 2\tfrac{1}{2}.$$

La substitution de ces valeurs conduit à l'équation suivante du second dégré:

$$x^2 + \tfrac{1}{6}x = 0{,}51333,$$

d'où l'on tire: $x = 0{,}638$, ou un peu moins de 4 pieds 6 pouces.

On remarquera sans doute que les terres qui seront enlevées pour la pose de l'empierrement, seront assujéties à un double transport; mais outre que leur volume est peu considérable, puisqu'il n'est que de $\frac{7}{24}$ de sagène cube par sagène courante, ce double transport est absolument indispensable pour donner à la forme de la chaussée toute la solidité convenable.

Dans une route comme celle que je propose, le constructeur doit principalement attacher son attention à la composition de l'empierrement. Les principes d'après lesquels j'ai déterminé son épaisseur, ne permettent point d'admettre de mélange dans les blocailles qui doivent le former. Ces blocailles seront donc uniquement de petites pierres de silex ou de granit concassées, parmi lesquelles n'entreront ni sable, ni gravier terreux, ni substances schisteuses ou calcaires, susceptibles de se laisser pénétrer par les eaux de pluie, ou de leur livrer passage.

Les matériaux destinés à l'empierrement, ayant ainsi été préparés avec soin, et de manière à ce que le volume de chaque petite pierre n'excède pas sensiblement $\frac{5}{4}$ de pouce cube, on les répandra également sur la forme de la chaussée, au moyen d'un instrument particulier qu'on devra substituer à la pelle ordinaire. Cet instrument ne sera autre chose qu'une espèce de fourche à 7 ou 8 dents, assez rapprochées pour retenir la blocaille, et assez distantes pour laisser passer les petits fragments et la poussière qui résultent du cassage. Après avoir élevé l'empierrement jusqu'à la hauteur déterminée, on égalisera la surface supérieure au rateau, et on livrera sur le champ la route au passage des voitures. La blocaille sera d'abord dérangée, et tendra à former une surface inégale, mais des manoeuvres, au moyen de rateaux, devront régaler cette surface, jusqu'à ce qu'elle forme une croûte inattaquable aux roues et impénétrable à l'eau.

L'entretien de la chaussée s'effectuera d'une manière analogue. Toutes les fois qu'on aura besoin de recharger l'empierrement, on le piquera tout-à-l'entour de la partie à réparer, afin que les nouveax matériaux puissent faire corps avec les anciens, et l'on égalisera le tout en y promenant le rateau.

Quoique les pierres concassées soient préférables pour l'empierrement au gravier pur, c'est-à-dire à des fragments de silex naturellement arrondis, il ne s'ensuit pas qu'il soit impossible de faire une excellente chaussée avec ces derniers matériaux. Il suffira dans ce cas de briser les plus gros fragments, pour en former la couche supérieure de l'empierrement sur une hauteur de 3 pouces, et de réserver les fragments plus petits, pour les employer tels que les fournit la carrière, à la formation de la couche inférieure. Cette remarque est d'autant plus importante à faire, que dans un grand nombre de localités, on trouvera d'abondantes gravelières, et que les frais du cassage étant moins considérables, la chaussée en deviendra moins dispendieuse.

C'est dans la recherche de ces gravelières, et en général de tous les matériaux propres à la construction de l'empierrement, que doit consister l'une des principales occupations des agens préposés à la construction des chaussées. Les découvertes qu'ils feront sous ce rapport, contribueront singulièrement au succès des travaux, et épargneront à la couronne une partie des frais immenses qu'elle serait obligée de faire, en achetant ces matériaux à des entrepreneurs. Je ne doute pas qu'avec le temps, on ne parvienne à ouvrir une foule de carrières non exploitées jusqu'à présent, et qu'on n'obtienne ainsi un moyen facile et peu coûteux de multiplier les nouvelles chaussées, et de fournir à leur entretien.

Cette circonstance nous conduit à l'examen de plusieurs questions intéressantes, que je ne crois pas qu'on ait encore traitées avec toute la rigueur dont elles sont susceptibles.

Une longueur de route déterminée, devant être fournie de matériaux par un nombre aussi déterminé de carrières, dont la position est donnée, il est nécessaire d'évaluer le prix que doit coûter chaque sagène cube de ces matériaux, transportée à pied d'oeuvre.

Jusqu'ici cette évaluation a été complètement négligée, ou n'a été faite que d'une manière inexacte. Comme les dédommagements à payer aux propriétaires pour les pierres prises dans leurs possessions, ont été fixés par les lois, il ne reste d'incertitude que sur le prix du transport. Si donc on pouvait toujours tenir compte de la position des lieux où gisent les matériaux, et qu'on pût déterminer par un calcul rigoureux ce qu'ils doivent coûter, une fois rendus sur les travaux, on serait à même de juger de l'exigence des fournisseurs, et de les contraindre à diminuer leurs prétentions, ou de prendre les mesures convenables pour effectuer les fournitures par des moyens économiques.

Les bases d'après lesquelles on effectuera le calcul dont je viens de parler, doivent être puisées dans les circonstances locales qui accompagnent ordinairement l'approvisionnement des matériaux. Les pierres dont on fait usage pour la construction des chaussées, se présentent de deux manières: ou elles sont répandues à la surface du sol, comme les blocs de silex ou de granit roulés que l'on rencontre dans la campagne; ou elles sont rassemblées en masses dans des carrières, comme le sont les diverses espèces de gravier. Ces deux cas, les seuls possibles, se ramènent au dernier, à cause de la nécessité où l'on est de ramasser les pierres éparses dans les champs, et de les mettre en tas avant que la neige ne les ait couvertes. Le transport s'effectue ensuite pendant l'hiver, par le moyen du traînage. La première question dont il paraîtrait qu'on dût s'occuper, consisterait donc à déterminer le point le plus convenable pour amonceler les pierres répandues çà et là sur une portion de terrain, terminée par des lignes droites, ainsi que le sont en général les propriétés foncières.

Il est évident que ce point serait celui pour lequel la somme des distances à tous les autres points de la surface, serait un minimum. Mais la solution de cette question conduirait à des résultats plus curieux qu'utiles, à cause de l'impossibilité de les appliquer à la pratique. L'état de culture du terrain, la disposition des chemins ou des sentiers praticables, le volume et l'emplacement des blocs que l'on doit réunir, sont autant de variables qui empêchent qu'on ne puisse soumettre l'opération du rassemblement des pierres à des règles rigoureuses. La manière la plus avantageuse de procéder à ce rassemblement, dépendra donc uniquement des localités. On formera ainsi des amas de pierres que l'on pourra regarder comme autant de carrières partielles, qui ne différeront des carrières naturelles, qu'en ce qu'on peut en général extraire de celles-ci des quantités indéfinies de matériaux, tandis que les premières ne peuvent en fournir que des quantités peu considérables.

D'après ces considérations, j'examinerai dans les calculs qui vont suivre: 1. Le cas où les carrières permettront de disposer de quantités de matériaux à peu près indéterminées, et seront conséquemment applicables à de grandes longueurs. 2. Le cas où ces carrières consisteront en des amas de pierres rassemblées dans les champs, dont les volumes seront susceptibles d'être mesurés à l'avance.

L'évaluation du prix du transport pour un nombre quelconque de sagènes cubes de matériaux extraits d'une ou de plusieurs carrières, dépend de la connaissance de la *distance moyenne* à laquelle ces matériaux doivent être transportés. Pour donner une idée exacte de ce qu'il faut entendre par cette distance moyenne, j'appellerai:

P le prix cherché du transport d'une sagène cube;

V la valeur de la journée d'une voiture de transport;

n le nombre de voyages que cette voiture peut faire en un jour;

et C la charge qu'elle porte à chaque voyage.

On aura évidemment:

$$V = nPC, \text{ d'où } P = \frac{V}{nC},$$

Dans cette formule C et V sont des quantités toujours données à priori: n seule est inconnue. Pour la déterminer avec toute la rigueur convenable, je supposerai que le nombre d'heures de travail par jour soit égal à H, que S représente le nombre de sagènes parcourues en une minute par chaque voiture de transport, et que T soit le temps perdu pour la charge et la décharge à chacun des voyages. Enfin je nommerai D la distance de la carrière au lieu des travaux. Il est clair que le nombre n de voyages faits en un jour, sera égal au temps du travail de la journée, divisé par le temps nécessaire à un seul voyage, en ayant égard aux instants perdus. Or H étant le nombre d'heures employées par jour au transport, $60H$ sera le nombre de minutes consacrées au travail. T exprimant en minutes le temps qui se perd à chaque voyage, et le temps nécessaire pour aller et venir de la carrière ou pour parcourir $2D$ étant représenté par $\frac{2D}{S}$, on aura:

$$n = \frac{60H}{T + \frac{2D}{S}} = \frac{60HS}{ST + 2D}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de P, on obtient pour le prix du transport d'une sagène cube:

$$P = \frac{V(TS + 2D)}{60\,CHS} \quad \ldots \quad (1)$$

Toutes les quantités qui entrent dans cette formule, sont connues, à l'exception de D, distance du transport. Cette distance n'est constante que dans le cas particulier où les matériaux doivent être transportés d'une même carrière dans un même lieu. Elle devient variable, toutes les fois qu'il s'agit de transporter les matériaux d'une ou de plusieurs carrières, sur différents points des travaux, et c'est là le cas le plus ordinaire.

Dans cette dernière circonstance, il est aisé de voir que la quantité D dans la valeur de P, n'est autre chose qu'une distance imaginaire, qui n'est point réellement parcourue par les voitures de transport, mais qui doit jouir de cette propriété, qu'étant multipliée par le nombre de voyages faits, elle donne la distance effective parcourue: C'est ce qu'on appelle la *distance moyenne.*

Pour la déterminer, soit un nombre quelconque de quantités de matériaux m, m', m'', etc., à transporter à des distances respectives a, a', a'', etc.

Une voiture portant à chaque voyage une charge égale à C, devra faire $\frac{m}{C}$ voyages pour transporter la masse m, et comme à chaque fois elle parcourra la distance a, il s'ensuivra que la distance totale qu'elle aura parcourue, sera égale à $\frac{ma}{C}$.

De même la distance effective parcourue pour la masse m', sera $\frac{m'a'}{C}$; pour la masse m'', $\frac{m''a''}{C}$, et ainsi de suite. Le nombre total de voyages étant $\frac{m}{C}+\frac{m'}{C}+\frac{m''}{C}+$ etc., il viendra d'après la définition de la distance moyenne, que nous représenterons par X:

$$X\left[\frac{m+m'+m''+\ldots\text{ etc.}}{C}\right]=\frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots\text{ etc.}}{C}$$

d'où

$$X=\frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots\text{ etc.}}{m+m'+m''+\ldots\text{ etc.}}\quad\ldots\quad(2).$$

L'application de cette formule aux travaux des routes, conduit à des résultats indépendants des quantités de matériaux à fournir. En effet, considérons en premier lieu le cas des carrières indéfinies, et examinons successivement toutes les circonstances qui peuvent se présenter.

1. Supposons que la longueur de route, sur laquelle les matériaux doivent être approvisionnés, soit égale à d, et que la carrière soit située à l'extrémité de cette longueur au point A (Fig. 4). Appelons M le volume de chacun des tas égaux qui doivent être formés sur l'étendue d, et c la longueur de chaussée, ou l'intervalle qu'on peut construire avec la quantité M de matériaux. Si d comprend n de ces intervalles, il est visible qu'on devra répandre sur cette longueur un nombre $n-1$ de tas égaux à M. Remplaçant dans la valeur

de X, m, m', m'' etc., par M, et les distances a, a, a'', etc., par c, $2c$, $3c$, etc., $(n-1)c$, il vient:

$$X = \frac{M\,[c + 2c + 3c + \ldots\ldots\ldots + (n-1)\,c]}{(n-1)\,M},$$

ou

$$X = \tfrac{1}{2}nc = \tfrac{1}{2}d.$$

Ce résultat fait voir, comme on devait s'y attendre, que distribuer des quantités égales de matériaux sur une longueur quelconque d, c'est la même chose, quant au transport, que réunir au milieu de cette longueur une masse égale à celle qu'on doit y répandre. Si donc il s'agit d'approvisionner des matériaux sur $AB + AC$ on $d + d'$, la carrière étant située en A (Fig. 5), il suffira pour déterminer la distance moyenne, de considérer deux masses égales à celles qui seront répandues sur d, et sur d', comme si elles devaient se transporter aux milieux de ces deux distances. Or en nommant N la quantité de matériaux répandue sur l'unité de longueur, les masses distribuées sur les distances d et d', seront représentées par Nd et Nd'. On aura donc, en introduisant ces deux dernières quantités, au lieu de m et m', dans l'expression (2), et en remplaçant a et a' par $\frac{1}{2}d$ et $\frac{1}{2}d'$;

$$X = \frac{\frac{1}{2}Nd^2 + \frac{1}{2}Nd'^2}{N\,(d + d')},$$

ou

$$X = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2 + d'^2}{d + d'} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

formule trés simple, qui n'est fonction que des distances d et d'.

2. Si la longueur de route, sur laquelle on doit répandre des matériaux, étant toujours égale à d, la carrière se trouvait située en E (Fig. 6), à une distance δ de son extrémité, il est évident qu'il faudroit considérer la masse Nd de matériaux à distribuer, comme devant être transportée à la distance $\frac{1}{2}d + \delta$. Ainsi dans le cas où les matériaux extraits d'une même carrière située en E (Fig. 7), devront être répandus sur les distances AB et AC ou d et d', on remplacera dans l'équation (2) les quantités m et m', par Nd et Nd', et les distances a et a', par $\frac{1}{2}d + \delta$ et $\frac{1}{2}d' + \delta$. On obtiendra de cette manière:

$$X = \frac{Nd\left(\frac{d}{2}+\delta\right) + Nd'\left(\frac{d'}{2}+\delta\right)}{N\,(d+d')},$$

ou

$$X = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2+d'^2}{d+d'} + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

ce qui apprend que la distance moyenne donnée par l'équation (3), doit être seulement augmentée de δ, distance de la carrière à la route.

3. Je considérerai maintenant le cas général où une longueur de route *DB* (Fig. 8), doit être fournie de matériaux par un nombre quelconque de carrières E, E', etc., disposées à diverses distances. Je réduirai d'abord pour plus de simplicité ce nombre de carrières à deux. Il est visible que le point F où sur la distance AC ou d', on cessera de se servir de la carrière E pour recourir à la carrière E', sera tel que $\delta' + x'' = \delta + x' = \frac{1}{2}(\delta + \delta' + d')$. On aura donc à considérer quatre masses: Nd, Nd'', Nx', Nx'', à transporter aux distances respectives $\frac{1}{2}d + \delta$, $\frac{1}{2}d'' + \delta'$, $\frac{1}{2}x' + \delta$, $\frac{1}{2}x'' + \delta'$, et l'on aura en substituant dans l'expression (2), et en opérant les réductions convenables:

$$X = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2+d''^2+x'^2+x''^2+2\,[\,\delta\,(d+x')+\delta'\,(d''+x'')\,]}{d+d'+d''}.$$

Si pour la longueur de route *GB* (Fig. 9), on devait extraire les matériaux des trois carrières E, E', E'', situées aux distances δ, δ', δ'', on diviserait les parties d' et d'' de cette longueur aux points F et F', de manière à satisfaire aux conditions:

$$\delta' + x'' = \delta + x' = \tfrac{1}{2}\,(d' + \delta + \delta'),$$
$$\delta' + x''' = \delta'' + x'''' = \tfrac{1}{2}\,(d'' + \delta' + \delta''),$$

et l'on trouverait par des substitutions analogues aux précédentes, pour l'expression de la distance moyenne:

$$X = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2+d'''^2+x'^2+x''^2+x'''^2+x''''^2+2\,[\,\delta\,(d+x')+\delta'\,(x''+x'')+\delta''\,(x''''+d''')]}{d+d'+d''+d'''}.$$

Les mêmes calculs s'étendraient avec une égale facilité à un nombre de carrières supérieur à trois. Je ne m'y arrêterai pas, et je passerai à l'examen du cas où les carrières, au lieu de fournir des quantités indéfinies de matériaux, consistent en des amas de pierres rassemblées à l'avance dans la campagne.

Supposons donc un nombre quelconque de tas de matériaux m, m', m'', etc., disposés dans les champs d'une manière arbitraire. Soient AB (Fig. 10) la direction de la route à construire. et A l'origine de la longueur sur laquelle les volumes m, m', etc., doivent être transportés. La somme de ces volumes étant égale à $m + m' + m'' + ..$ etc., le quotient $\frac{m + m' + m'' + \ldots \text{etc.}}{M}$ représentera le nombre de tas égaux que l'on pourra former, et c continuant de désigner l'intervalle constant qui doit régner entre les approvisionnements, on aura pour la longueur de route sur la quelle devront être répandues les masses données:

$$\frac{m + m' + m'' + \cdots \text{etc.}}{M} c = AB.$$

On partagera cette longueur en un nombre de parties AC, CD, DB, etc., égal au nombre de volumes m, m', m'', etc., et proportionelles à ces volumes. Chacune de ces parties devenant ainsi susceptible d'être approvisionnée par le volume correspondant, on aura:

$$AC = \frac{mc}{M},$$

$$CD = \frac{m'c}{M},$$

$$BD = \frac{m''c}{M}, \text{ etc., etc.}$$

Il suit de là qu'en nommant les distances AC, CD, BD, etc., d, d', d'', etc., et représentant toujours par N la quantité de matériaux répandue sur l'unité de longueur, les volumes m, m', m'', etc. deviendront respectivement égaux à Nd, Nd', Nd'', etc.

Si l'on convient de transporter les volumes m, m', m'', etc., sur la longueur AB, en passant par les extrémités C, D, B, etc., les plus voisines de ces volumes, le cas actuel reviendra à considérer les masses Nd, Nd', Nd', etc., comme devant être transportées aux distances moyennes $\frac{1}{2}d + \delta$, $\frac{1}{2}d' + \delta'$,

$\frac{1}{2}d'' + \delta''$. etc. La substitution dans la formule (2) donnera donc pour la distance moyenne cherchée:

$$X = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 + d'^2 + d''^2 + \cdots \text{etc.} + 2(d\delta + d'\delta' + d''\delta'' + \cdots\cdot \text{etc.})}{d + d' + d'' + \cdots \text{etc.}}.$$

Il est à remarquer que le transport ayant lieu ordinairement en hiver, la direction à suivre pour l'effectuer, devient à très peu près arbitraire. On peut donc la soumettre aux conditions les plus favorables, et ceci nous conduit à la solution du problème suivant, qu'on peut également appliquer aux deux espèces de carrières que nous avons distinguées. *Etant donnée une masse quelconque* m *de matériaux, qui doit être répandue par tas égaux sur une distance connue* AB (*Fig.* 11), *déterminer quelle est celle de toutes les lignes* mF *passant par le point* m, *pour laquelle la distance moyenne est un minimum.*

Il est aisé de s'assurer en effet que la direction à suivre pour aller du point m à la ligne AB, n'est par du tout indifférente. Pour cela il suffit de comparer, par exemple, les expressions de la distance moyenne, quand on suit le chemin mA, ou quand on prend le chemin mC, le point C étant le milieu de AB.

Soient $AB = d$, les coordonnées $mH = b$, $AH = a$: on trouvera pour la distance moyenne:

1. suivant mA, $X' = \frac{1}{2}d + \sqrt{b^2 + a^2}$;
2. suivant mC, $X'' = \frac{1}{4}d + \sqrt{b^2 + (a - \frac{d}{2})^2}$.

On aura donc, en prenant leur différence:

$$X' - X'' = \tfrac{1}{4}d + \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + (a - \tfrac{d}{2})^2}.$$

Or on voit que cette expression n'est pas seulement positive, mais qu'elle est égale au quart de AB, augmenté de AK ou de $mA - mC$.

Pour déterminer la position du point F qui convient à la distance moyenne minimum, nous ferons $AF = x$, et nous obtiendrons d'après l'équation (4):

$$X = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + (d - x)^2}{d} + \sqrt{b^2 + (a - x)^2}.$$

En différentiant cette valeur de X par rapport à x, et en égalant à zéro le numérateur du coëfficient différentiel $\frac{dX}{dx}$, nous aurons:

$$(2x - d) \sqrt{b^2 + (a - x)^2} = (a - x)\, d \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Cette équation étant assez compliquée, exigerait dans chaque cas particulier des calculs longs et pénibles. De plus comme elle est du 4^{me} degré, et qu'elle donnerait ainsi quatre racines, parmi lesquelles une seule satisfait à la question proposée, nous compléterons nos recherches, en indiquant un moyen simple de la résoudre géométriquement, et de distinguer parmi ses quatre solutions, celle dont on doit faire usage.

Si l'on suppose $mF = z$, $a - x$ ou FH deviendra égale à $\sqrt{z^2 - b^2}$, et l'équation (5) donnera:

$$(2x - d)\, z = d \sqrt{z^2 - b^2},$$

d'où $$x = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{z};$$

ce qui fait voir que la valeur de x se compose de la moitié AC de la longueur donnée, plus d'une quantité $CF = AC \cdot \frac{FH}{mF}$. De cette dernière expression on déduit: $\frac{CF}{AC} = \frac{FH}{mF}$, c'est-à-dire que si l'on élève au point F la perpendiculaire FD, et qu'on mène par le point C une parallèle à mF, la partie CD de cette parallèle sera égale à AC ou $\frac{d}{2}$. En effet la similitude des triangles CFD et FHm donne immédiatement: $\frac{CF}{CD} = \frac{FH}{Fm}$; d'où, à cause de la proportion précédente, $CD = AC$.

Pour trouver le point D, nous chercherons le lieu de tous les points de même espèce qu'on peut obtenir, en menant du point m (Fig. 12) une suite de lignes arbitraires mf, en élevant les perpendiculaires fL, et en coupant ces perpendiculaires par les lignes CL tracées parallèlement à mf. Les points L obtenus de cette manière, formeront entre eux une certaine ligne courbe. Nous déterminerons l'intersection de cette ligne courbe avec la circonférence de cercle décrite du point C comme centre avec CA ou CB pour rayon, et nous aurons ainsi le point cherché D.

Prenant CB et CE pour axes des coordonnées, l'équation de l'une quelconque des droites mf, menées par le point m dont les coordonnées sont a et b, sera :

$$y - b = A\,(x - a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

A étant un coëfficient variable avec l'angle mfB. Les lignes CL parallèles à mf, auront donc pour équation générale :

$$y = Ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Si l'on fait $y = 0$ dans l'équation (6) pour obtenir l'abscisse Cf, on aura :

$$-\,b = A\,(x - a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

et cette équation sera celle de la perpendiculaire fL.

Eliminant A entre (7) et (8), il viendra pour l'équation de la courbe, lieu de tous les points L :

$$-\,b = \frac{y}{x}\,(x - a)$$

ou $$xy - ay + bx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Nous simplifierons cette équation, en transformant les coordonnées x et y en d'autres qui leur soient parallèles, et pour lesquelles on ait :

$$x = x' + \alpha,$$
$$y = y' + \varphi.$$

Nous disposerons ainsi des indéterminées α et φ, pour faire disparaître les termes en x' et y'. La substitution donnera :

$$x'y' + (\alpha - a)\,y' + (\varphi + b)\,x' + \alpha\varphi - \varphi a + ab = 0.$$

Des deux conditions : $\alpha - a = 0$, et $\varphi + b = 0$, on déduira : $\alpha = a$, et $\varphi = -\,b$, et la dernière équation se réduira à :

$$x'y' = -\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

résultat qui caractérise une hyperbole équilatère, passant par le point C (Fig. 13), et qui a pour asymptotes les nouveaux axes MB' et Mm menés par le point M, pour lequel $MG = Gm$.

L'intersection de cette hyperbole avec la circonférence *BDE* donnera le point *D*. Joignant *CD*, et traçant *mF* parallèle à cette ligne, on aura la direction qui convient à la plus petite distance moyenne pour le transport des matériaux.

Si l'on prolonge *mF* jusqu'au point *K*, on verra que *FK* étant égale à *CD* ou $\frac{1}{2}$ *AB*, le problème proposé revient à : *mener par le point donné* m, *une ligne* MK *telle que la partie comprise dans l'angle* BCK, *soit égale à la moitié de la longueur* AB.

Ce qui précède démontre que la solution rigoureuse de cette question consiste dans la recherche de l'intersection d'une circonférence donnée et d'une hyperbole qu'il est aisé de construire. Mais on peut substituer à cette construction un moyen pratique extrêmement simple, en marquant sur une règle une longueur *FK* égale à la moitié de la distance *AB*, et en faisant promener les points *F* et *K* sur les côtés *CB* et *CK*, jusqu'à ce que la règle passe par le point *m*.

Le problème qui vient de nous occuper, est susceptible de quatre solutions, ainsi que l'indique l'équation à laquelle nous avons été conduits. Ces quatre solutions sont représentées dans la figure 14 où les quatre lignes *FK*, *ON*, *GH* et *LI* sont égales chacune à *CB* ou $\frac{1}{2}$ *AB*. On s'assurera que *mF* est la seule de ces directions qui satisfasse à la question, en revenant à l'expression générale de la distance moyenne :

$$X = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + (d-x)^2}{d} + \sqrt{b^2 + (a-x)^2}.$$

Pour que la première partie soit la plus petite possible, il faut $\frac{d[x^2 + (d-x)^2]}{dx} = 0$, ou que $x = \frac{1}{2}d$. Conséquemment plus l'abscisse du point dans lequel la direction cherchée rencontre *AB*, sera près d'être égale à *AC*, plus la première partie de *X* sera petite. Or des quatre points *N*, *F*, *H*, *I*, le point *F* est manifestement celui qui satisfait le mieux à cette condition. De plus la seconde partie de *X* ou $\sqrt{b^2 + (a-x)^2}$, représente indifféremment les quatre longueurs

mN, mF, mH, mI, et il est visible que mF est plus courte que les trois autres, car si l'on abaisse mP perpendiculaire sur CB, et qu'on prenne $PR = PF$, en joignant R et m, la ligne mQ sera égale à mK, et conséquemment plus grande que FK ou CB. Puisque $GH = CB$, il faut donc que le point G se trouve au dessous du point Q, ou que mH soit plus longue que mF. Une même conséquence ayant lieu à plus forte raison pour mN et mI, on en conclut que parmi les quatre directions que fournit la solution complète du problème, mF est celle qui donne pour la distance moyenne X la plus petite valeur, 1° parceque le point F est le plus près du point C; 2° parce que la longueur mF est elle-même plus petite que les trois autres.

APERÇU ABRÉGÉ
DES
FORMULES FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS;

PAR

M. BARTELS,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A L'UNIVERSITÉ IMP. DE DORPAT.

(Lu à l'Académie le 14. Dec. 1825.)

Les Mémoires qui suivront celui-ci *) se fondant principalement sur des théorèmes de la Géométrie à trois dimensions, dont la plupart ne se trouvent pas dans les livres élémentaires, j'ai cru devoir rassembler ici les propositions dont nous aurons besoin plus bas, et pour en faire une espèce d'ensemble j'en ai ajouté d'autres qui, quoiqu'elles soient généralement connues, mériteront peut être quelque attention par la méthode d'après laquelle je les ai traitées.

1. La manière de déterminer la position d'un point dans l'espace par les coordonnées rectangulaires est sans doute la plus simple et la plus élégante que l'on ait pu imaginer; elle est trop généralement connue pour m'y arrêter. Pour désigner la direction d'une droite, on se sert très souvent des cosinus des angles qu'elle fait avec trois lignes parallèles aux axes des coordonnées. L'emploi de ces quantités pour le calcul, lui donne presque toujours une élégance qu'il ac-

---

*) Ils se trouveront dans l'une des prochaines livraisons.

querrait rarement d'une autre manière. Comme je ferai fréquemment usage de ces quantités, je me servirai d'une nouvelle dénomination: Je nommerai les cosinus des angles que fait une droite avec les lignes parallèles aux trois axes des coordonnées rectangulaires, les *déterminantes de la droite*, et pour les désigner, je ferai usage des lettres ξ, η, ζ, de sorte qu'elles soient respectivement relatives aux axes des x, y, z. Il n'est pas difficile de voir que ces déterminantes ne sont proprement que les coordonnées d'un point quelconque de la droite et relatives à un système d'axes parallèles aux axes primitifs, dont le centre est un autre point de la droite, distant du premier de la quantité $= 1$. Pour un point de la même droite également éloigné du centre des axes, les coordonnées seront de la même grandeur que celles du premier, et ne s'en distingueront que par le signe $+$ ou $-$, de sorte que les déterminantes de la droite AB étant ξ, η, ζ, celles de la même droite, mais considérée dans un sens opposé BA, seront $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$.

Je n'ai pas besoin de remarquer, que des droites parallèles entr'elles ont les mêmes déterminantes et qu'elles restent les mêmes de quelque manière que l'on change le système d'axes, pourvu que les axes mêmes ne changent pas de direction.

2. Comme la direction d'un plan est donnée par celle d'une perpendiculaire quelconque sur ce plan, je nommerai aussi les déterminantes d'une telle perpendiculaire, *déterminantes du plan*.

Quelquefois il est aussi nécessaire de distinguer les déterminantes du même plan par le signe $+$ ou $-$, selon que l'on considère l'un ou l'autre côté du plan comme positif.

3. Éclaircissons ce que nous venons de dire à l'égard des déterminantes par quelques exemples;

1) Lorsque la longitude λ et la latitude β d'un astre sont données; que l'on suppose que le plan xy est celui de l'écliptique et que l'axe des x est dirigé vers le premier point du Bélier, celui des y vers le premier point de

la Balance, on trouvera pour les déterminantes de la droite menée du centre des axes à l'astre

$$\xi = \cos.\beta \cos.\lambda, \quad \eta = \cos.\beta \sin.\lambda, \quad \zeta = \sin.\beta.$$

Car si l'on décrit de l'origine des coordonnées comme centre une sphère dont le rayon est $= 1$, et qu'on nomme les intersections de la surface de la sphère avec les trois axes X, Y, Z, et P celle avec la droite menée à l'astre, on aura $\cos. PX = \xi$, $\cos. PY = \eta$, $\cos. PZ = \zeta$. De plus, en prolongeant l'arc de grand cercle XP jusqu' à la rencontre de D avec l'arc de grand cercle XY, il y aura $PD = \beta$, $XD = \lambda$, $DY = 90° - \lambda$. Mais puisque $\cos. PX = \cos. PD \cdot \cos. DX$, $\cos. PY = \cos. PD \cdot \cos. DY$ on a comme ci-dessus:

$$\xi = \cos.\beta \cos.\lambda, \quad \eta = \cos.\beta \sin.\lambda, \quad \zeta = \sin.\beta.$$

Réciproquement les déterminantes d'une droite menée à un astre P étant données, on en trouve la longitude et la latitude.

2) L'inclinaisan de l'orbite d'une planète sur l'écliptique étant supposée égale à ω, et la longitude de son noeud ascendant $N = \psi$, la longitude du pôle de l'orbite sera $\psi - 90°$, sa latitude, $90° - \omega$; et par conséquent les déterminantes de l'axe de l'orbite, ou ce qui est le même, celles du plan de l'orbite seront:

$$\begin{aligned} \xi &= \cos.(90° - \omega) \cos.(\psi - 90°) &&= \sin.\omega \sin.\psi \\ \eta &= \cos.(90° - \omega) \sin.(\psi - 90°) &&= - \sin.\omega \cos.\psi \\ \zeta &= \sin.(90° - \omega) &&= \cos.\omega. \end{aligned}$$

3) Supposons en outre que l'argument de latitude d'une planète P soit φ, on aura:

$$\begin{aligned} \cos. PX &= \cos. XN \cos. PN + \sin. XN \cdot \sin. PN \cdot \cos. PNX \\ \cos. PY &= \cos. YN \cos. PN + \sin. YN \cdot \sin. PN \cdot \cos. PNY \\ \cos. PZ &= \cos. ZN \cos. PN + \sin. ZN \cdot \sin. PN \cdot \cos. PNZ; \end{aligned}$$

et puisque $XN = \psi$, $YN = 90° - \psi$, $ZN = 90°$,

$$PN = \varphi, \ PNX = 180° - \omega, \ PNY = \omega, \ PNZ = 90° - \omega,$$

on trouvera en désignant les déterminantes de la droite menée de l'origine des coordonnées à la planète par ξ', η', ζ'

$$\xi' = \cos.\psi\ \cos.\varphi - \sin.\psi\ \sin.\varphi\ \cos.\omega$$
$$\eta' = \sin.\psi\ \cos.\varphi + \cos.\psi\ \sin.\varphi\ \cos.\omega$$
$$\zeta' = \sin.\varphi\ \sin.\omega.$$

D'où l'on peut déduire par les équations du premier exemple la longitude et la latitude de la planète.

4) Si l'on prolonge l'arc NP de grand cercle du côté P jusqu'à Q, de manière que PQ soit égale à 90°, et que l'on substitue dans les expressions que nous venons de trouver pour les déterminantes de OP, $\varphi + 90^\circ$ au lieu de φ, on aura pour la droite OQ celles-ci:

$$\xi'' = -\cos.\psi\ \sin.\varphi - \sin.\psi\ \cos.\varphi\ \cos.\omega$$
$$\eta'' = -\sin.\psi\ \sin.\varphi + \cos.\psi\ \cos.\varphi\ \cos.\omega$$
$$\zeta'' = \cos.\varphi\ \sin.\omega.$$

L'axe de l'orbite de la planète et les droites OP, OQ étant trois droites perpendiculaires entr'elles, elles peuvent être considérées comme les axes des coordonnées x, y, z, d'un nouveau système quelconque dont la position est tellement déterminée, que ω soit l'angle que le plan des coordonnées x, y, fait avec celui des coordonnées des x, y; et ψ l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe des x, et enfin φ l'angle que l'axe des x fait avec cette même ligne d'intersection. De cette manière les neuf dernières équations que nous venons de trouver et qui sont généralement connues, peuvent servir à déduire les neuf déterminantes des trois axes d'un nouveau système des trois quantités angulaires ω, ψ, φ.

4. Les coordonnées de deux points étant x, y, z; x', y', z', et leur distance mutuelle r, on aura:

$$r = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$$

et les déterminantes de la droite entre ces deux points seront:

$$\xi = \frac{x' - x}{r}, \quad \eta = \frac{y' - y}{r}, \quad \zeta = \frac{z' - z}{r}$$

Si cette droite passait par l'origine des coordonnées, de sorte que x, y, z soient zéro, on aurait:

$$\xi = \frac{x'}{r}, \quad \eta = \frac{y'}{r}, \quad \zeta = \frac{z'}{r}.$$

De ces expressions des déterminantes il s'ensuit immédiatement cette équation de condition:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ce qui se confirmera en l'appliquant aux expressions des déterminantes dans l'article (3).

Donc ayant les rapports de trois déterminantes

$$\xi : \eta : \zeta = A : B : C,$$

on en déduira

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \zeta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. En faisant passer par l'origine O des coordonnées, deux droites OA, OB parallèles à deux droites dont les déterminantes soient ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; les coordonnées de A, B seront, en supposant OA et $OB = 1$, ξ, η, ζ; et ξ', η', ζ', et par conséquent par l'article précédent

$$AB^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = 2 - 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')$$

Mais AB étant aussi égale à $2 \sin. \tfrac{1}{2} AOB = \sqrt{2(1 - \cos. AOB)}$, on aura le cosinus de l'angle AOB, qui exprime la différence de direction des deux droites, égal à $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$, d'où l'on déduit facilement

$$\begin{aligned} \sin. AOB &= \sqrt{[(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2]} \\ &= \sqrt{[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2]}. \end{aligned}$$

6. De ce que nous venons de démontrer, on peu tirer plusieurs conséquences utiles.

1) Les déterminantes ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' de deux plans étant données, on en trouve l'angle ω de leur inclinaison mutuelle par

$$\cos.\ \omega = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

2) Les déterminantes ξ, η, ζ d'une droite, et celles ξ', η', ζ' d'un plan étant données, on en aura l'inclinaison ϑ de la droite sur le plan

$$\sin.\ \vartheta = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

3) Entre les déterminantes ξ, η, ζ; ξ', η', ζ', de deux droites ou de deux plans perpendiculaires entr'eux, il y a toujours cette équation de condition,

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0.$$

Cette équation aura aussi lieu, si ξ, η, ζ sont les déterminantes d'une droite, et ξ', η', ζ' celles d'un plan parallèle à la droite.

7. Si l'on a les déterminantes ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' de deux droites, on en déterminera celles ξ'', η'', ζ'' d'un plan parallèle à ces deux droites par les deux équations

$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = 0,$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0.$$

Car on tire de ces deux équations

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = \eta\zeta' - \zeta\eta' : \zeta\xi' - \xi\zeta' : \xi\eta' - \eta\xi',$$

et puisqu'en dénotant par γ la différence de direction des deux droites (art. 5)

$$\sin.\gamma = \sqrt{[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi)^2]}$$

on aura

$$\xi'' = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sin.\gamma},\quad \eta'' = \frac{\zeta\xi' - \xi\zeta'}{\sin.\gamma},\quad \zeta'' = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\sin.\gamma}.$$

Comme les projections de ces deux droites sur leur plan parallèle doivent s'entrecouper toujours, si elles ne sont pas parallèles entr'elles, la perpendiculaire à ce plan, érigée au point d'intersection des deux droites qui s'y trouvent projetées, coupera évidemment les deux droites à angle droit. Donc les quantités que nous venons de trouver pour ξ'', η'', ζ'' seront aussi les déterminantes de cette perpendiculaire commune.

8. Supposons maintenant que la droite, dont les déterminantes sont ξ, η, ζ, passe par un point A donné par les coordonnées a, b, c; et celle qui a pour déterminantes ξ', η', ζ' par un point B dont les coordonnées soient a', b', c';

et dénotons les coordonnées des deux points d'intersection **P**, **Q** de ces deux droites avec leur perpendiculaire commune respectivement par x, y, z et x', y', z; nous aurons en faisant $AP = r$, $QB = r'$, $PQ = r''$ ces neuf équations:

$$\begin{array}{lll} a - x = r\xi, & x' - a' = r'\xi', & x - x' = r''\xi'' \\ b - y = r\eta, & y' - b' = r'\eta', & y - y' = r''\eta'' \\ c - z = r\zeta, & z' - c' = r'\zeta', & z - z' = r''\zeta'' \end{array}$$

et de là

$$\begin{aligned} r\xi + r'\xi' + r''\xi'' &= a - a' \\ r\eta + r'\eta' + r''\eta'' &= b - b' \\ r\zeta + r'\zeta' + r''\zeta'' &= c - c'. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces trois équations après les avoir multipliées respectivement d'abord par $\xi - \xi' \cos. \gamma$, $\eta - \eta' \cos. \gamma$, $\zeta - \zeta' \cos. \gamma$; ensuite par $\xi' - \xi \cos. \gamma$, $\eta' - \eta \cos. \gamma$, $\zeta' - \zeta \cos. \gamma$ et enfin par ξ'', η'', ζ'', on aura, puisque $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \cos. \gamma$,

$$\begin{aligned} r \sin.^2\gamma &= (a-a')(\xi - \xi' \cos.\gamma) + (b-b')(\eta - \eta' \cos.\gamma) + (c-c')(\zeta - \zeta' \cos.\gamma) \\ r' \sin.^2\gamma &= (a-a')(\xi' - \xi \cos.\gamma) + (b-b')(\eta' - \eta \cos.\gamma) + (c-c')(\zeta' - \zeta \cos.\gamma) \\ r'' \quad &= (a-a')\,\xi'' \qquad\qquad + (b-b')\,\eta'' \qquad\qquad + (c-c')\,\zeta'' \end{aligned}$$

Par les deux premières de ces trois équations on obtient r et r' en quantités données, de sorte que les coordonnées des deux points **P**, **Q** sont données par les équations

$$\begin{array}{lll} x = a - r\xi, & y = b - r\eta, & z = c - r\zeta \\ x' = a' + r'\xi', & y' = b' + r'\eta', & z' = c' + r'\zeta'. \end{array}$$

La dernière nous donne la distance des deux droites

$$r'' = \frac{1}{\sin.\gamma}\left[(a-a')(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (b-b')(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (c-c')(\xi\eta' - \eta\xi')\right],$$

et en même tems l'équation de condition qui doit avoir lieu, si les deux droites s'entrecoupent, savoir:

$$(a-a')(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (b-b')(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (c-c')(\xi\eta' - \eta\xi') = 0.$$

9. Reprenons à présent l'équation $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \cos. \omega$, et supposons que ξ, η, ζ soient les déterminantes d'une perpendiculaire $OQ = p$, abaissée du

centre des axes sur un plan donné, et ξ', η', ζ' celles d'une droite $OP = r$, menée de ce centre à un point P quelconque du plan dont les coordonnées soient x, y, z; on aura $\xi' = \frac{x}{r}$, $\eta' = \frac{y}{r}$, $\zeta' = \frac{z'}{r}$ et $\cos.\ \omega = \frac{p}{r}$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \cos.\ \omega$, nous aurons, en la multipliant par r,

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p.$$

C'est l'équation entre les coordonnées d'un point quelconque d'un plan dont les déterminantes sont ξ, η, ζ, et dont la distance au centre des axes est égale à p.

On peut aussi mettre cette équation sous la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

équation où a, b, c désignent les distances du centre des axes aux intersections des trois axes avec le plan donné. Il est superflu de remarquer que l'équation générale du premier degré

$$Ax + By + Cz = D$$

peut toujours être réduite à l'une ou à l'autre des formes trouvées.

10. Considérons à présent un triangle sphérique ABC, et supposons que les déterminantes du rayon AO soient ξ, η, ζ; celles de OB, ξ', η', ζ' et celles de OC, ξ'', η'', ζ''; O étant le centre de la sphère et celui des axes des coordonnées, on aura (art. 5), en faisant $\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$

$$\begin{aligned}
\cos.\ a &= \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'',\\
\cos.\ b &= \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta,\\
\cos.\ c &= \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta',
\end{aligned}$$

et si, pour plus de simplicité, nous faisons

$$\begin{aligned}
&\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = \mathfrak{X}, \quad \eta''\zeta - \zeta''\eta = \mathfrak{X}', \quad \eta\zeta' - \zeta\eta' = \mathfrak{X}''\\
&\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = \mathfrak{Y}, \quad \zeta''\xi - \xi''\zeta = \mathfrak{Y}', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \mathfrak{Y}''\\
&\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = \mathfrak{Z}, \quad \xi''\eta - \eta''\xi = \mathfrak{Z}', \quad \xi\eta' - \eta\xi' = \mathfrak{Z}'
\end{aligned}$$

nous aurons aussi (art. 5),

$$\begin{aligned}\sin.\, a &= \sqrt{[\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2]}\\ \sin.\, b &= \sqrt{[\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2]}\\ \sin.\, c &= \sqrt{[\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2]}\end{aligned}$$

11. Par l'art. (7) on trouve pour les déterminantes respectives des plans des arcs a, b, c de grand cercle, les quantités suivantes:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathfrak{X}}{\sin.\, a}, & \dfrac{\mathfrak{Y}}{\sin.\, a}, & \dfrac{\mathfrak{Z}}{\sin.\, a} \\ \dfrac{\mathfrak{X}'}{\sin.\, b}, & \dfrac{\mathfrak{Y}'}{\sin.\, b}, & \dfrac{\mathfrak{Z}'}{\sin.\, b} \\ \dfrac{\mathfrak{X}''}{\sin.\, c}, & \dfrac{\mathfrak{Y}''}{\sin.\, c}, & \dfrac{\mathfrak{Z}''}{\sin.\, c}. \end{array}$$

Donc en désignant par A', B', C' les angles de l'inclinaison mutuelle des arcs b et c, c et a, a et b on aura

$$\begin{aligned}\cos.\, A' &= \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}''}{\sin.\, b\ \sin.\, c}\\ \cos.\, B' &= \frac{\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Z}}{\sin.\, c\ \sin.\, a}\\ \cos.\, C' &= \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'}{\sin.\, a\ \sin.\, b}.\end{aligned}$$

En supposant que le point B coïncide avec C, on a $\xi' = \xi''$, $\eta' = \eta''$, $\zeta' = \zeta''$, par conséquent $\mathfrak{X}'' = -\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'' = -\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'' = -\mathfrak{Z}'$ et $\sin.\, b = \sin.\, c$ et de là

$$\cos.\, A' = \frac{-\mathfrak{X}'^2 - \mathfrak{Y}'^2 - \mathfrak{Z}'^2}{\sin.\, ^2 b} = -1 \quad \text{et} \quad A' = 180^\circ,$$

d'où l'on voit que les angles A', B', C' sont les supplémens des angles du triangle sphérique.

12. Faisons à présent

$$\xi\eta'\zeta'' + \xi'\eta''\zeta + \xi''\eta\zeta' - \zeta\eta'\xi'' - \zeta'\eta''\xi - \zeta''\eta\xi' = K,$$

nous trouverons par le développement

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'' = \xi K, & \mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y} = \xi' K, & \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}' = \xi'' K \\ \mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'' = \eta K, & \mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z} = \eta' K, & \mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}' = \eta'' K \\ \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'' = \zeta K, & \mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X} = \zeta' K, & \mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}' = \zeta'' K \end{array}$$

et de là, en faisant usage des déterminantes des plans des arcs a, b, c (art. 11),

$$\sin. A' = \frac{\sqrt{[(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'')^2 + (\mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'')^2 + (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'')^2]}}{\sin. b \sin. c} = \frac{K}{\sin. b \sin. c}$$

$$\sin. B' = \frac{\sqrt{[(\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y})^2 + (\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z})^2 + (\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X})^2]}}{\sin. c \sin. a} = \frac{K}{\sin. c \sin. a}$$

$$\sin. C' = \frac{\sqrt{[(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}')^2 + (\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}')^2 + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}')^2]}}{\sin. a \sin. b} = \frac{K}{\sin. a \sin. b}.$$

Ainsi,

$$K = \sin. b \sin. c \sin. A' = \sin. c \sin. a \sin. B' = \sin. a \sin. b \sin. C'.$$

13. Si on désigne les angles d'inclinaison des rayons OA, OB, OC sur les plans de leurs côtés opposés a, b, c respectivement par α, β, γ on aura (art. 6, 2°)

$$\sin. \alpha = \frac{\xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z}}{\sin. a} = \frac{K}{\sin. a}$$

$$\sin. \beta = \frac{\xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}'}{\sin. b} = \frac{K}{\sin. b}$$

$$\sin. \gamma = \frac{\xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta''\mathfrak{Z}''}{\sin. c} = \frac{K}{\sin. c},$$

et de là

$$K = \sin. \alpha \sin. a = \sin. \beta \sin. b = \sin. \gamma \sin. c.$$

Mais les rayons OA, OB, OC étant égaux à l'unité, sin. a, sin. b, sin. c seront les expressions des doubles des surfaces des triangles rectilignes OBC, OCA, OAB, et sin. α, sin. β, sin. γ les perpendiculaires abaissées des points A, B, C sur les plans de ces triangles. D'où il résulte que K est l'expression de six fois la solidité de la pyramide triangulaire qui a son sommet au centre de la sphère, et qui s'appuie sur le triangle sphérique, c'est à dire qui a pour base le triangle rectiligne formé par les cordes des trois arcs BC, CA, AB.

14. En désignant par β, β', β'' les angles d'inclinaison des rayons OA, OB, OC sur le plan xy, et par λ, λ', λ'' les angles que font leurs projections respectives sur ce plan avec l'axe des x, on peut aussi mettre la quantité K sous cette forme,

$$K = \cos. \beta \cos. \beta' \cos. \beta'' [\tan. \beta \sin. (\lambda'' - \lambda') + \tan. \beta' \sin. (\lambda - \lambda'') + \tan. \beta'' \sin. (\lambda' - \lambda)]$$

15. Lorsque les arêtes OA, OB, OC de la pyramide triangulaire qui a

son sommet au centre O de la sphère, et qui a pour base le triangle rectiligne ABC, ne sont pas égales à l'unité, mais $OA = f$, $OB = g$, $OC = h$, le double de la surface du triangle rectiligne OBC sera $= gh$ sin. a, et la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan de ce triangle sera $= f$ sin. α; par conséquent six fois la solidité de la pyramide $OABC$ sera $= fgh$ sin. α sin. a et de là aussi $= fgh \cdot K$. Or les coordonnées des points A, B, C étant x, y, z; x', y', z' et x'', y'', z''; ou aura

$x = f\xi$, $y = f\eta$, $z = f\zeta$; $x' = g\xi'$, $y' = g\eta'$, $z' = g\zeta'$, $x'' = h\xi''$, $y'' = h\eta''$, $z'' = h\zeta''$,
d'où l'on déduit

$$fgh \cdot K = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx',$$

expression tout-à-fait analogue à celle de K.

16 Des expressions que nous venons de trouver pour les cosinus et les sinus des côtés et des angles supplémentaires d'un triangle sphérique, on peut aussi déduire facilement les quatre formules fondamentales de la trigonométrie sphérique

1. Par l'art. 12 on a

$$\sin. a : \sin. b : \sin. c = \sin. A' : \sin. B' : \sin. C'$$

2. L'expression

$$(\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta)(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')$$

peut se mettre sous la forme

$$(\eta''\zeta - \zeta''\eta)(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (\zeta''\xi - \xi''\zeta)(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (\xi''\eta - \eta''\xi)(\xi\eta' - \eta\xi')$$

On aura donc par les art. 10 et 11

$$\cos. b \cos. c - \cos. a = \sin. b \sin. c \cos. A'$$

de même
$$\cos. c \cos. a - \cos. b = \sin. c \sin. a \cos. B'$$
$$\cos. a \cos. b - \cos. c = \sin. a \sin. b \cos. C'$$

3. De l'équation

$$(\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Z})(\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}') - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')$$
$$= (\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}') + (\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z})(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}') + (\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}')$$

on déduira

$$\cos. B' \cos. C' - \cos. A' = \sin. B' \sin. C' \cos. a$$

et de là $$\cos. C' \cos. A' - \cos. B' = \sin. C' \sin. A' \cos. b$$

$$\cos. A' \cos. B' - \cos. C' = \sin. A' \sin. B' \cos. c.$$

4. En éliminant de ces deux dernières équations $\cos. C'$, et substituant $\frac{\sin. c \sin. A'}{\sin. a}$ à la place de $\sin. C$, on obtient, en faisant les réductions nécessaires,

$$\sin. A' \cot. B' + \cot. b \sin. c + \cos. A' \cos. c = 0.$$

Par l'élimination de l'angle B' on aurait obtenu

$$\sin. A' \cot. C' + \cot. c \sin. b + \cos. A' \cos. b = 0.$$

Ces deux équations donnent, en substituant successivement b, c, a au lieu de a, b, c et B', C', A' à la place de A', B', C', encore quatre équations analytiquement différentes.

17. Chacune des trois équations art. préc. 2° peut servir à en déduire encore deux autres expressions de K^2. Prenons p. e. la première

$$\sin. b \sin. c \cos. A' = \cos. b \cos. c - \cos. a,$$

nous en obtiendrons

1°. $\text{Sin.}^2 b \sin.^2 c \sin.^2 A' = K^2 = 1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \cos. b \cos. c$,

et par des transformations connues, en faisant $a + b + c = s$,

2°. $K^2 = 4 \sin. \tfrac{1}{2}s \sin. (\tfrac{1}{2}s - a) \sin. (\tfrac{1}{2}s - b) \sin. (\tfrac{1}{2}s - c)$,

Il est à remarquer que K^2 ou $1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \cos. b \cos. c$ devient $= 0$, lorsque s ou $a + b + c = 180°$ ou $= 360°$, et que réciproquement K étant $= 0$, $a + b + c$ doit être $= 180°$ ou $= 360°$.

18. Il est important de remarquer que, si la relation qui existe entre les déterminantes de trois droites est telle que la quantité K devienne zéro, on doit en conclure que ces trois droites se trouvent dans un même plan ou du moins qu'elles sont parallèles à un même plan.

En effet si l'on suppose que les déterminantes de trois droites soient ξ, η, ζ: ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' et celles d'un plan parallèle aux deux dernières droites $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, on aura les deux équations suivantes:

$$\xi'\dot{\xi} + \eta'\dot{\eta} + \zeta'\dot{\zeta} = 0$$
$$\xi''\dot{\xi} + \eta''\dot{\eta} + \zeta''\dot{\zeta} = 0;$$

d'où l'on déduit, en se servant des signes de l'art. 10

$$\dot{\xi} : \dot{\eta} : \dot{\zeta} = \mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{Z}.$$

Mais puisque $K = \xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z}$ est supposée égale à zéro, il y aura aussi

$$\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = 0,$$

d'où il suit (art. 6, 3°) que le plan dont les déterminantes sont $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, est aussi parallèle à la première droite.

19. La relation des déterminantes de trois droites étant donnée par les équations

$$\left.\begin{aligned} L\xi + M\xi' + N\xi'' &= 0 \\ L\eta + M\eta' + N\eta'' &= 0 \\ L\zeta + M\zeta' + N\zeta'' &= 0 \end{aligned}\right\} (a)$$

on en peut aussi conclure que ces droites sont parallèles, et qu'en outre les sinus des angles a, b, c, qui expriment respectivement les différences de direction de la seconde et de la troisième, de la 3ième et de la 1ère, de la 1ère et de la 2ieme sont proportionnels aux quantités L, M, N.

Comme les trois expressions $\xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z}$; $\xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}'$, $\xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta''\mathfrak{Z}''$ sont égales entr'elles et $= 1$; et que de plus les expressions

$$\xi'\mathfrak{X} + \eta'\mathfrak{Y} + \zeta'\mathfrak{Z},\ \xi''\mathfrak{X}' + \eta''\mathfrak{Y}' + \zeta''\mathfrak{Z}',\ \xi\mathfrak{X}'' + \eta\mathfrak{Y}'' + \zeta\mathfrak{Z}'',$$
$$\xi''\mathfrak{X} + \eta''\mathfrak{Y} + \zeta''\mathfrak{Z},\ \xi\mathfrak{X}' + \eta\mathfrak{Y}' + \zeta\mathfrak{Z}',\ \xi'\mathfrak{X}'' + \eta'\mathfrak{Y}'' + \zeta'\mathfrak{Z}'',$$

sont égales à zéro, on déduit d'abord des équations (a) $LK = 0$, $MK = 0$, $NK = 0$ et par conséquent aussi $K = 0$. Il faut donc par l'art. préc. que les trois droites soient parallèles au même plan.

En combinant deux à deux les équations (a), on aura (art. 18.)

$$L : M : N = \mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}'' = \mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}'',$$

d'où l'on tire

$$L : M : N = \sqrt{[\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2]} : \sqrt{[\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2]} : \sqrt{[\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2]}$$

ou (art. 10.), égal à

$$\sin. a \ : \ \sin. b \ : \ \sin. c :$$

et si ces trois droites partent d'un même point O, comme les rayons d'une sphère OA, OB, OC, on aura

$$L : M : N = \sin. \widehat{BC} : \sin. \widehat{CA} : \sin. \widehat{AB},$$

de sorte que la somme $\widehat{BC} + \widehat{CA} + \widehat{AB}$ est $= 2\pi$ ou $= o$.

20. Je résoudrai à présent un problème qui, plus bas nous sera d'une grande utilité. Les lieux de trois point A, B, C d'une sphère et les rapports des cosinus de leurs distances angulaires à un quatrième point H étant donnés, trouver la position de ce point.

Soit O le centre de la sphère, et en même tems celui des coordonnées; soient ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'' les déterminantes respectives des rayons OA, OB, OC, et $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ celles du rayon OH; faisons en outre $\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$; $\widehat{HA} = \alpha$, $\widehat{HB} = \beta$, $\widehat{HC} = \gamma$, et supposons que $\cos. \alpha : \cos. \beta : \cos. \gamma = f : g : h$, de sorte que $f = \lambda \cos. \alpha$, $g = \lambda \cos. \beta$, $h = \lambda \cos. \gamma$ où λ dénote une quantité inconnue. Nous aurons d'abord (art. 5.)

$$\left.\begin{aligned} \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} &= \cos. \alpha \\ \xi'\dot{\xi} + \eta'\dot{\eta} + \zeta'\dot{\zeta} &= \cos. \beta \\ \xi''\dot{\xi} + \eta''\dot{\eta} + \zeta''\dot{\zeta} &= \cos. \gamma \end{aligned}\right\} \ (a)$$

et comme les trois quantités $\xi\mathfrak{X} + \xi'\mathfrak{X}' + \xi''\mathfrak{X}''$, $\eta\mathfrak{Y} + \eta'\mathfrak{Y}' + \eta''\mathfrak{Y}''$, $\zeta\mathfrak{Z} + \zeta'\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}''$ sont égales entr'elles et à la quantité K (art. 12.), et qu'en outre les six expressions

$$\eta\mathfrak{X} + \eta'\mathfrak{X}' + \eta''\mathfrak{X}'',\ \zeta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Y}' + \zeta''\mathfrak{Y}'',\ \xi\mathfrak{Z} + \xi\mathfrak{Z} + \xi''\mathfrak{Z}'',$$
$$\zeta\mathfrak{X} + \zeta'\mathfrak{X}' + \zeta''\mathfrak{X}'',\ \xi\mathfrak{Y} + \xi'\mathfrak{Y}' + \xi''\mathfrak{Y}'',\ \eta\mathfrak{Z} + \eta'\mathfrak{Z}' + \eta''\mathfrak{Z}'',$$

sont toutes égales à zéro, les équations ci-dessus donnent:

$$\left.\begin{aligned} \xi K &= \mathfrak{X}\ \cos.\alpha + \mathfrak{X}'\ \cos.\beta + \mathfrak{X}''\ \cos.\gamma \\ \eta K &= \mathfrak{Y}\ \cos.\alpha + \mathfrak{Y}'\ \cos.\beta + \mathfrak{Y}''\ \cos.\gamma \\ \zeta K &= \mathfrak{Z}\ \cos.\alpha + \mathfrak{Z}'\ \cos.\beta + \mathfrak{Z}''\ \cos.\gamma \end{aligned}\right\}\ (b)$$

Si l'on additionne les carrés de ces équations, on aura, en ayant égard aux art. 10, 11, 16,2°, et en multipliant la somme par λ^2, l'équation suivante

$$\begin{aligned} \lambda^2K^2 = f^2\sin.^2a + g^2\sin.^2b + h^2\sin.^2c + 2gh\,(\cos.b\cos.c - \cos.a) \\ + 2hf(\cos.c\cos.a - \cos.b) + 2fg\,(\cos.a\cos.b - \cos.c). \end{aligned}$$

On peut donc trouver l'indéterminée λ, par conséquent aussi $\cos.\alpha = \frac{f}{\lambda}$, $\cos.\beta = \frac{g}{\lambda}$, $\cos.\gamma = \frac{h}{\lambda}$, et de cette manière la position du point sera donnée.

21. L'analyse dont nous venons de faire usage, peut aussi servir à résoudre d'une manière élégante le problème connu de circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire donnée. Supposons pour cet effet que le sommet O de la pyramide qui a pour base le triangle rectiligne $A'B'C'$ soit l'origine des coordonnées, et nommons le centre de la sphère cherchée E en faisant $OA' = f$, $OB' = g$, $OC' = h$, $B'OC' = a$, $C'OA' = b$, $A'OB' = c$, $EOA' = \alpha$, $EOB' = \beta$, $EOC' = \gamma$, nous aurons, en désignant par D le diamètre de la sphère cherchée,

$$f = D\cos.\alpha,\ g = D\cos.\beta,\ h = D\cos.\gamma.$$

Or, en décrivant autour du point O comme centre une sphère dont le rayon soit $= 1$, et dont la surface coupe les droites OA', OB', OC', OE en des points nommés A, B, C, H, nous aurons $\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$, de sorte que l'expression de D ou du diamètre de la sphère cherchée sera tout-à-fait la même que celle que nous avons trouvée dans l'art. préc. pour λ.

22. De l'équation du plan $\xi x + \eta y + \zeta z = p$, que nous avons trouvée (art. 9.) où ξ, η, ζ désignent les déterminantes du plan et p sa distance à l'origine des coordonnées, il est évident à cause de l'équation de condition

$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, que les coordonnées de trois points par lesquels le plan passe, suffiront pour trouver les quantités ξ, η, ζ et p. En effet, les coordonnées de trois points étant dénotées par x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' on aura

$$\begin{aligned}\xi x+\eta y+\zeta z&=p\\ \xi x'+\eta y'+\zeta z'&=p\\ \xi x''+\eta y''+\zeta z''&=p,\end{aligned}$$

et en faisant pour plus de simplicité

$$\begin{array}{lll} y'z''-z'y''=X, & y''z-z''y=X', & yz'-zy'=X'',\\ z'x''-x'z''=Y, & z''x-x''z=Y', & zx'-xz'=Y'',\\ x'y''-y'x''=Z, & x''y-y''x=Z', & xy'-yx'=Z'',\end{array}$$

et

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-zy'x''-z'y''x-z''yx'=K,$$

on trouvera, par des raisonnemens semblables à ceux que nous avons employés (art. 20.),

$$\begin{aligned}\xi K&=p(X+X'+X'')\\ \eta K&=p(Y+Y'+Y'')\\ \zeta K&=p(Z+Z'+Z''),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$K=p\sqrt{[(X+X'+X'')^2+(Y+Y'+Y'')^2+(Z+Z'+Z'')^2]}.$$

On sait par l'art. 15. que K est l'expression de six fois la solidité d'une pyramide triangulaire dont le sommet est l'origine des coordonnées, et qui a pour base un triangle rectiligne dont les sommets sont donnés par les coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''. Donc le double de la surface de ce triangle étant supposé égal à S, on aura $K=pS$, et par conséquent

$$S=\sqrt{[(X+X'+X'')^2+(Y+Y'+Y'')^2+(Z+Z'+Z'')^2]}.$$

De même, il est facile de voir que

$$X+X'+X'',\quad Y+Y'+Y'',\quad Z+Z'+Z''$$

sont les doubles des projections respectives du triangle sur les plans yz, zx, xy, et que par conséquent les déterminantes du plan de ce triangle sont proportionnelles à ces trois projections.

23. Il me reste encore un mot à dire de la transformation des déterminantes et des coordannées. Reprenons pour cela les équations (a) de l'art. 20. et supposons que les arcs de grand cercle $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ soient égaux chacun à 90°; les rayons OA, OB, OC peuvent être considerés comme les axes rectangulaires d'un nouveau système, de sorte que les déterminantes du rayon OH, qui étaient $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ par rapport au système primitif deviennent cos. α, cos. β, cos. γ relativement au nouveau système. En les dénotant par $\ddot\xi$, $\ddot\eta$, $\ddot\zeta$ les équations (a) (art. 20.) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi &= \xi\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta \\ \ddot\eta &= \xi'\dot\xi + \eta'\dot\eta + \zeta'\dot\zeta \\ \ddot\zeta &= \xi''\dot\xi + \eta''\dot\eta + \zeta''\dot\zeta \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

et celles de (b) du même article

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi K &= \mathfrak{X}\ddot\xi + \mathfrak{X}'\ddot\eta + \mathfrak{X}''\ddot\zeta \\ \dot\eta K &= \mathfrak{Y}\ddot\xi + \mathfrak{Y}'\ddot\eta + \mathfrak{Y}''\ddot\zeta \\ \dot\zeta K &= \mathfrak{Z}\ddot\xi + \mathfrak{Z}'\ddot\eta + \mathfrak{Z}''\ddot\zeta \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Puisque K peut aussi être exprimé (art. 13.) par sin. α sin. a, et que α et a sont ici $= 90^\circ$, on aura $K = \pm 1$. Pour décider lequel des deux signes on doit prendre, on n'a qu'à considérer un cas particulier. Supposons donc que le nouveau système des axes coïncide avec le système primitif, on aura $\xi = 1$, $\eta' = 1$, $\zeta'' = 1$ et toutes les autres déterminantes seront zéro, de sorte que l'équation

$$K = \xi\eta'\zeta'' + \xi'\eta''\zeta + \xi''\eta\zeta' - \zeta\eta'\xi'' - \zeta'\eta''\xi - \zeta''\eta\xi$$

devient $= \xi\eta'\zeta'' = + 1$.

Comme les déterminantes des axes du système primitif, en les considérant relativement au nouveau système, sont respectivement ξ, ξ, ξ η, η', η ; ζ, ζ', ζ'', on aura aussi

$$\begin{aligned}\dot\xi &= \xi\ddot\xi + \xi'\ddot\eta + \xi''\ddot\zeta\\ \dot\eta &= \eta\ddot\xi + \eta'\ddot\eta + \eta''\ddot\zeta\\ \dot\zeta &= \zeta\ddot\xi + \zeta'\ddot\eta + \zeta''\ddot\zeta.\end{aligned}$$

En comparant ces équations avec celles de (*b*) ci-dessus, on en obtiendra les équations suivantes très utiles

$$\begin{aligned}&\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = \xi, \quad \eta''\zeta - \zeta''\eta = \xi', \quad \eta\zeta' - \zeta\eta' = \xi''\\ &\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = \eta, \quad \zeta''\xi - \xi''\zeta = \eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \eta''\\ &\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = \zeta, \quad \xi''\eta - \eta''\xi = \zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi' = \zeta''.\end{aligned}$$

25. Supposons maintenant que les coordonnées d'un point P, relatives au système primitif soient x, y, z, et par rapport à un nouveau système, dont le centre O' est donné par les coordonnées a, b, c et ses axes par les déterminantes ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; les déterminantes de la droite $O'P = r$ relatives au système primitif seront

$$\frac{x-a}{r}, \quad \frac{y-b}{r}, \quad \frac{z-c}{r}$$

et celles par rapport au nouveau système

$$\frac{x'}{r}, \quad \frac{y'}{r}, \quad \frac{z'}{r}.$$

Or en substituant dans les équations (*a*) (*c*) de l'art. préc. celles-ci à la place de $\ddot\xi$, $\ddot\eta$, $\ddot\zeta$ et celles-là au lieu de $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$, et multipliant alors les équations par r, on obtiendra les suivantes

$$\begin{aligned}x' &= \xi(x-a) + \eta(y-b) + \zeta(z-c)\\ y' &= \xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c)\\ z' &= \xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x-a &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z'\\ y-b &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z'\\ z-c &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z'.\end{aligned}$$

On peut aussi exprimer les trois premières de cette manière

$$x' = \xi x + \eta y + \zeta z + a'$$
$$y' = \xi' x + \eta' y + \zeta' z + b'$$
$$z' = \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z + c'$$

où a', b', c' dénotent les coordonnées du centre des axes du système primitif par rapport au nouveau système (25). Il faut encore remarquer ces six équations de condition:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,\quad \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0,\quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0,\quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

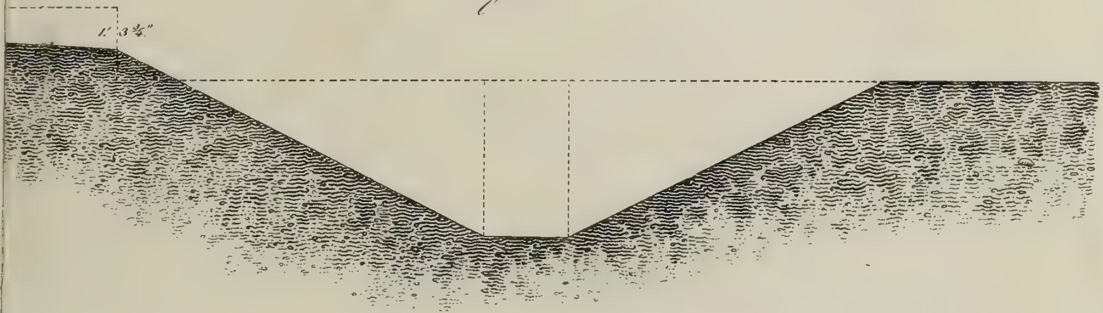
ou celles-ci:

$$\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1,\quad \eta^2 + \eta'^2 + \eta''^2 = 1,\quad \zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2 = 1$$
$$\eta\zeta + \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' = 0,\quad \zeta\xi + \zeta'\xi' + \zeta''\xi'' = 0,\quad \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = 0$$

au moyen desquelles on peut réduire les neuf déterminantes à trois quantités, comme nous l'avons déjà montré (art. 3, 4°).

NATURAL HISTORY

Fig. 2.



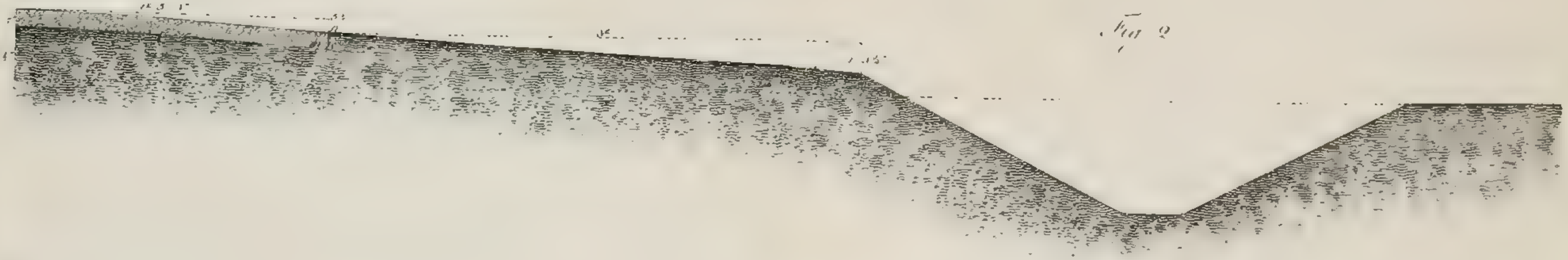


Fig 2

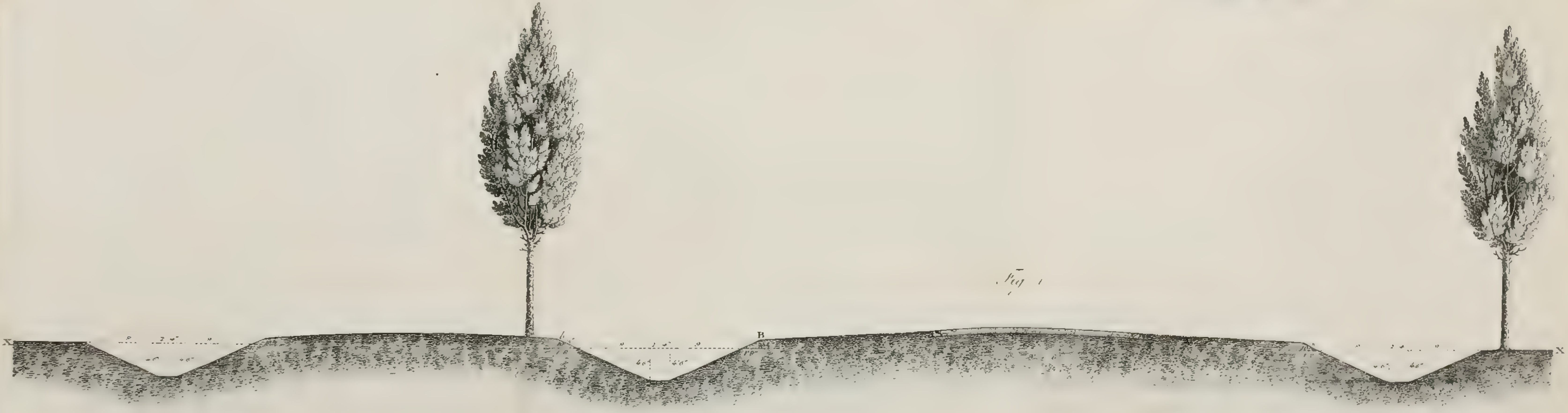
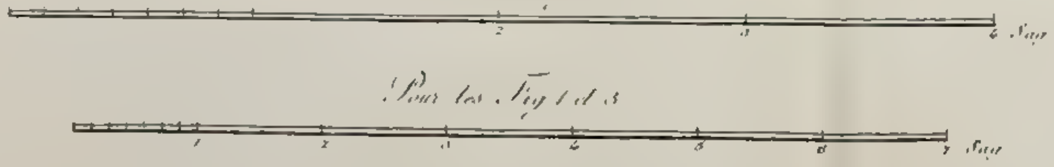


Fig 1

Pour la Fig 2

Pour les Fig 1 et 3


2
3
4 Sag
1
2
3
4
5
6
7 Sag

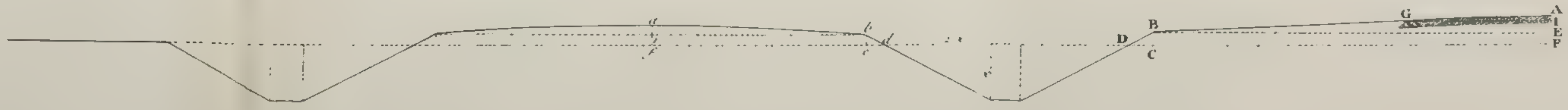


Fig 3

a
f
b
c
d
D
B
C
G
A
E
F

3.

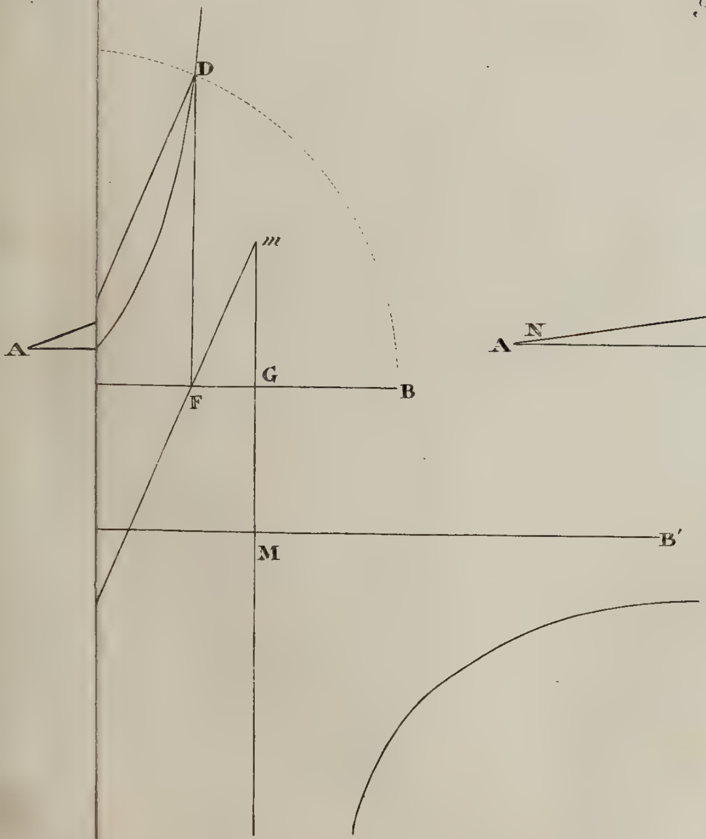


Fig. 14

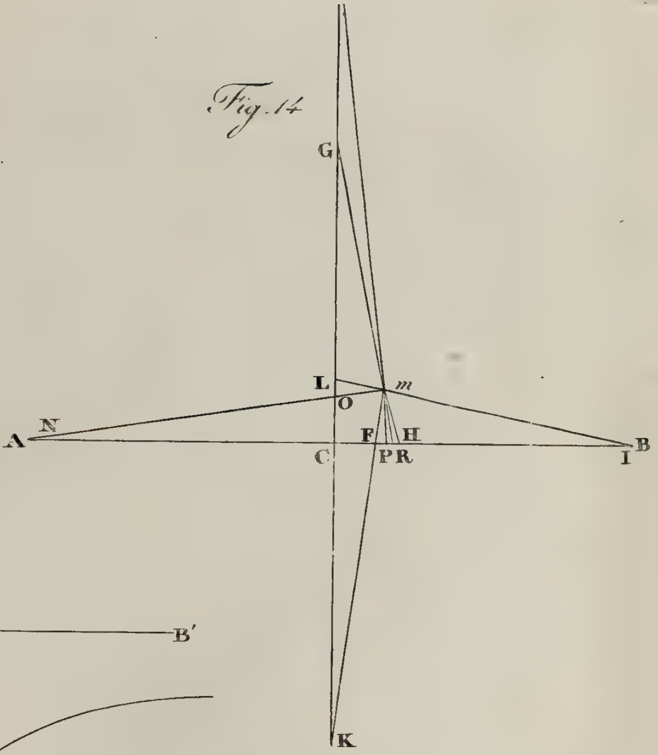

G
L
m
O
N
A
F
H
B
C
P
R
I
K

Fig. 4.

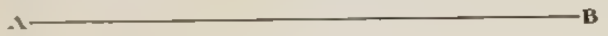


Fig. 5.

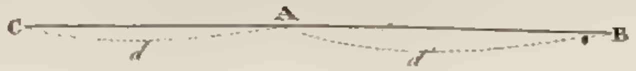


Fig. 6.

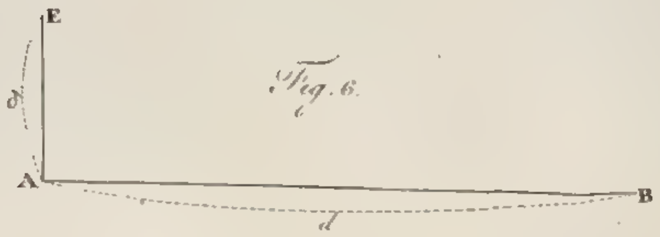


Fig. 7

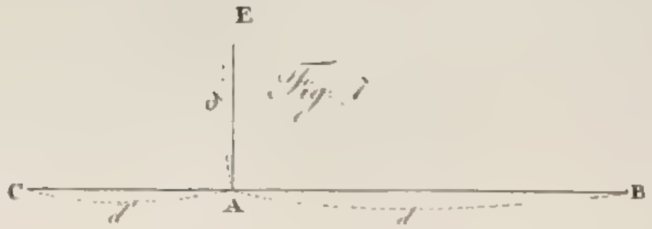


Fig. 8

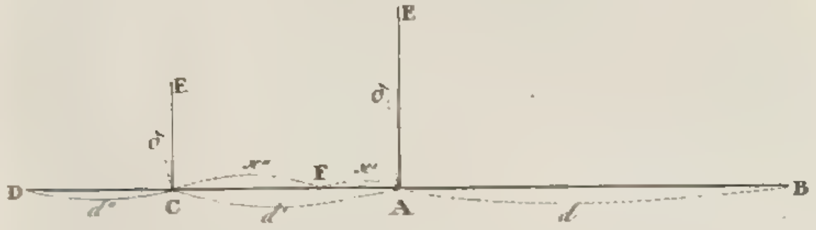

E
E
δ'
δ
x''
F
x'
D
B
d'
C
d
A
d

Fig. 9.

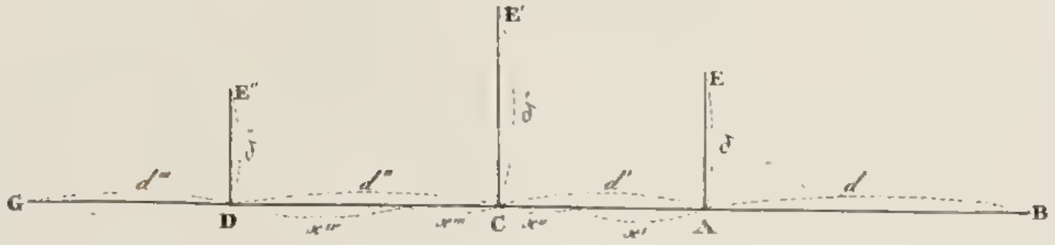

E''
E'
E
δ
δ
δ
d'''
d''
d'
d
G
B
D
x'''
x'''
C
x''
x'
A

Fig. 10

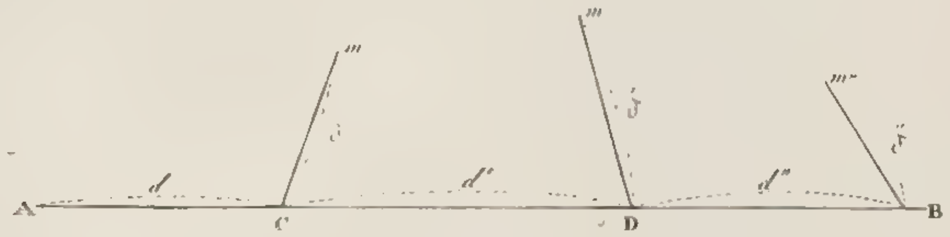

m
m'
m''
δ
δ
δ
d
d'
d''
A
C
D
B

Fig. 11

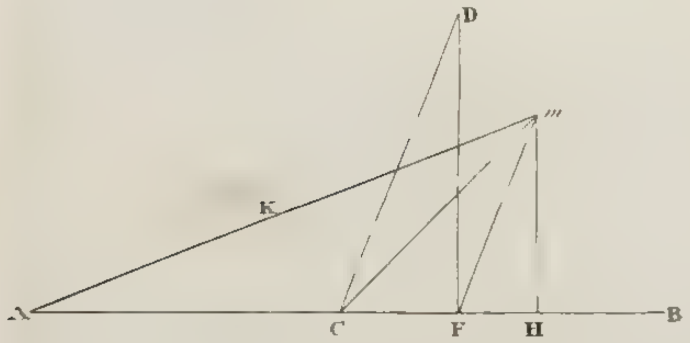


Fig. 12.

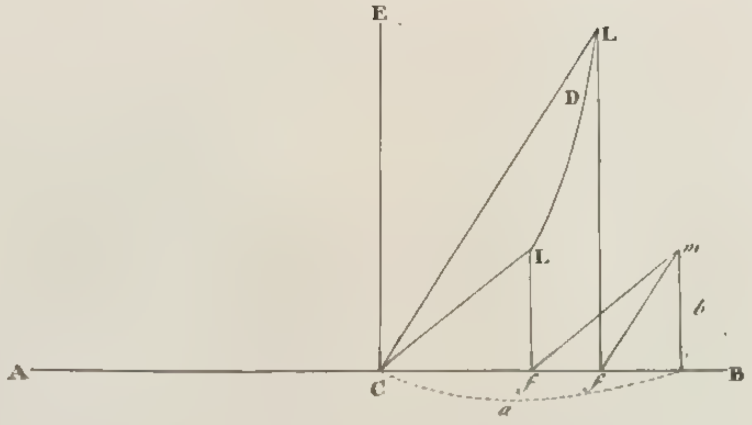

E
L
D
L
m
b
A
C
f
f
B
a

Fig. 13

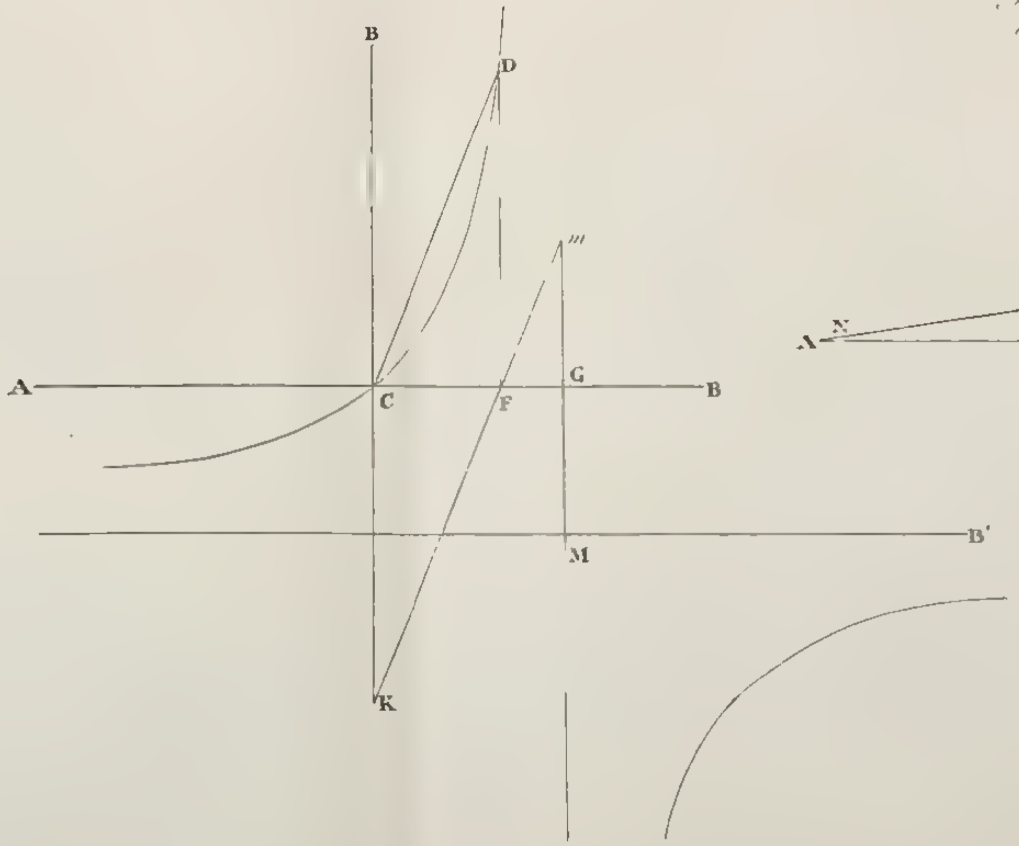
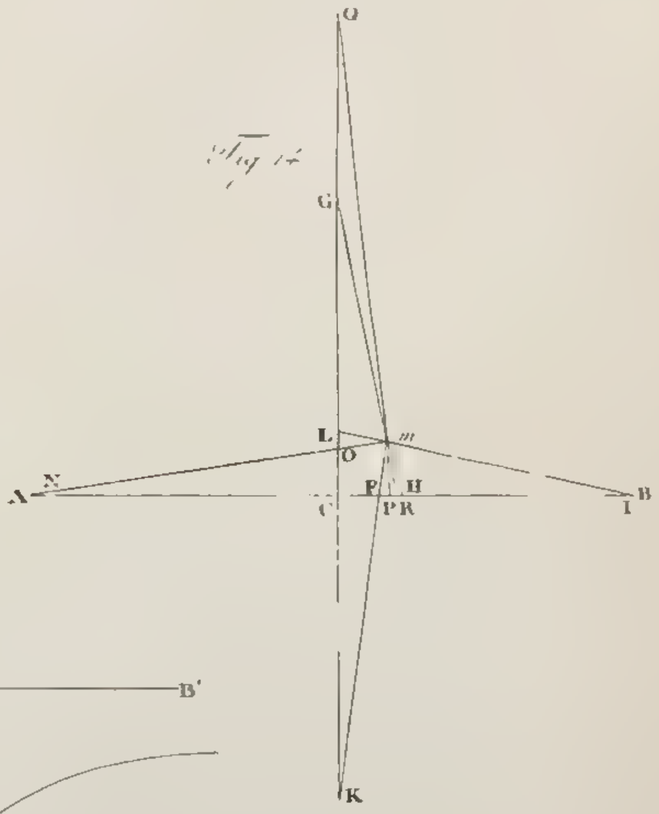

B
D
m
A
C
F
G
B
B'
M
K

Fig. 14


O
G
L
m
O
N
A
C
F
P
R
H
B
I
K

AVIS.

L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg a publié dans le premier siècle de son existence 73 volumes de ses Mémoires. Ce recueil se compose de cinq séries publiées successivement sous les titres suivans: Commentarii Acad. Imp. sc. Petrop. depuis 1726—1747 (14 volumes); Novi Commentarii 1747—1776 (21 volumes); Acta 1776—1783 (12 volumes); Nova Acta 1783—1803 (15 volumes) et Mémoires 1803—1826 (11 volumes). A chacune de ces différentes époques se rattache quelque souvenir remarquable, tels que: en 1726 la première séance publique en présence de S. M. l'Impératrice Cathérine I, ou l'époque de l'inauguration de l'Académie; en 1747 les règlemens donnés à cette société par l'Impératrice Elisabeth fille de Pierre I; en 1776 la célébration solennelle du jubilé semi-séculaire; en 1783 la nomination de M^me^ la Princesse Daschkoff Directeur de l'Académie; en 1803 les nouveaux règlemens donnés par l'Empereur Alexandre; enfin en 1826 la célébration de la fête séculaire honorée de la présence de S. M. l'Empereur NICOLAS I et de toute Son auguste Famille. Le désir de faciliter le débit de ses Mémoires et d'en accélérer la publication ont fait choisir à l'Académie un nouveau mode dans la rédaction de ce recueil dont commence aujourd'hui la sixième série, sous le même titre de *Mémoires*. Cette nouvelle série paraîtra en deux corps d'ouvrage ou sections éparses et indépendantes l'une de l'autre. La première section comprendra les Mémoires de Mathématiques, d'Astronomie, de Physique, de Chimie et des Sciences naturelles; la seconde ceux des Sciences politiques, d'Histoire et de Philologie. Ces deux sections paraîtront par livraisons de 10 à 15 feuilles chacune. Six de ces livraisons formeront un volume, et à la première section sera ajoutée une septième livraison, comme supplément, qui contiendra l'histoire de l'Académie et les rapports lus dans les séances et dont la publication aura été arrêtée. Les mémoires seront placés pèle-mèle dans l'ordre de leur présentation. Les sections seront vendues séparément, mais personne ne pourra acheter des livraisons séparées. En achetant la première livraison on payera le volume entier et on touchera un billet pour recevoir les livraisons suivantes. Les mémoires des savans étrangers seront séparés de ceux de l'Académie et formeront un recueil à part qui se publiera de la même manière, par livraisons de 10 à 15 feuilles imprimées chacune, et dont de même six formeront un volume.

TABLE DES MATIÈRES.

M. Schultén, Investigatio generis percussionum punctum axemve fixum corporis dati solidi vi nulla afficientium 3

M. Degen, Recherches sur la parabole, déterminée par la méthode des moindres carrés, et qui représente le moins défectueusement possible un système quelconque de points donnés dans un plan 13

Ejusdem Tentamen ill. Euleri speculationem de formulis concordibus et discordibus promovendi 29

M. Schultén, Recherche générale sur la quantité de lumière directe ou indirecte envoyée dans l'oeil par des objets lumineux 39

M. Bazaine, Mémoire sur la construction des chaussées 52

M. Bartels, Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géométrie a trois dimensions 77

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS À

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS,

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME PREMIER.

2me LIVRAISON.

ST.-PÉTERSBOURG,
DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1830.

Se vend chez GRAEFF, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison
Stcherbakoff N°. 91 et à Leipzic chez CNOBLOCH.

Publié avec l'approbation de l'Académie.

En Juin 1830.

Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

NATURAL HISTORY

ESSAI
SUR LA
DIRECTION ET L'INTENSITE
DE LA
FORCE MAGNÉTIQUE
A St.-PÉTERSBOURG;

PAR

M. G.-A. Ermann.

(Lu à l'Académie le 11. Juin 1828.)

Les observations magnétiques, dont j'ose présenter les résultats à l'Académie, sont le fruit du séjour d'un mois que je viens de faire à St.-Pétersbourg, pour y attendre l'arrivée de Mr. Hansteen. J'ai cru ne pas mieux pouvoir entrer dans les vues de l'illustre chef de l'expédition à la quelle j'aurai le bonheur d'appartenir, qu'en employant le tems qu'un hasard heureux me permit de passer dans la capitale, à une détermination exacte de ses coordonnées magnétiques. Ce n'est pas, sans doute, à cette détermination en elle-même qu'il est permis d'attacher quelque prix, puisque à tout moment elle peut être répétée avec beaucoup plus de commodité et d'exactitude par un des savans physiciens que l'Académie range au nombre des siens; mais c'est plutôt d'avoir obtenu par ces observations un point de ralliement pour l'expédition Norvégienne, tant avec les voyages magnétiques que l'Académie voudrait encore faire entreprendre pour le bonheur et l'avancement des sciences, qu'avec nombre d'expéditions pareilles qui déjà ont déterminé les coordonnées magnétiques pour plusieurs endroits de l'intérieur de l'Empire et qui toutes aboutissent à la capitale.

Voilà donc quel a été le but que je me suis proposé en employant les instrumens qui vont servir pendant le trajet de la Sibérie, à la détermination de la *déclinaison* et de *l'inclinaison de l'aiguille aimantée* à St.-Pétersbourg: puissé-je avoir réussi dans ce sens! toutes les expéditions magnétiques qui ont passé ou passeront par la capitale, pourraient alors être censé munies d'instrumens exactement comparables aux nôtres.

Quant à l'observation *d'aiguilles oscillatoires* que j'ai successivement répétée à Berlin et à St.-Pétersbourg, elle fournira les premières données pour la comparaison des *intensités magnétiques* pour ces deux endroits. Or, graces aux travaux de M. de Humbold et Hansteen, l'intensité de la force magnétique à Berlin, a été comparée avec celle qui règne sous l'équateur magnétique et que l'on est convenu de regarder comme unité de force; le transport que nous venons de faire des aiguilles oscillatoires, pourra donc servir à assigner à St.-Pétersbourg, la place qui lui convient dans le *réseau des lignes isodynamiques* que, par nombre d'observations de ce genre, M. Hansteen vient d'étendre sur presque tout le continent occidental de l'Europe. Ce n'est pas, il est vrai, d'après un seul transport de ce genre qu'on peut répondre du résultat, avec toute l'assurance requise dans un objet aussi important; car les pendules magnétiques destinés à être invariables en eux-mêmes, ne sont malheureusement que trop sujets à des changemens accidentels. Néanmoins, l'harmonie presque parfaite qui, dans le cas dont il s'agit ici, règne entre le résultat, obtenu par deux aiguilles différentes, paraît beaucoup ajouter à la probabilité de leur indication.

Local des observations.

La plupart des observations suivantes ont été faites dans un *jardin situé au milieu de la ville* (à Vassilïevsky Ostrow, près de la grande Perspective, entre la

3ème et la 4ème ligne). Bien que l'emplacement des instrumens ait été choisi de manière à les tenir éloignés à plus de 60 pieds de tous les édifices environnans, on pourrait néanmoins soupçonner encore quelque influence accidentelle et locale.

Je dois à la bienveillance de M. le Professeur Fischer, le grand avantage d'avoir pu rejeter les observations au milieu du jardin botanique, sur un champ entièrement libre et ouvert de plus de 400 arpens; or, comme abstraction faite des fautes accidentelles de lecture, etc., les résultats obtenus en pleine campagne et dans le jardin de la ville, sont parfaitement d'accord entr'eux, il n'y a plus lieu d'appréhender des attractions locales.

Sur la déclinaison de l'aiguille aimantée, et ses changemens périodiques pendant le cours d'un jour.

La direction absolue de l'aiguille aimantée a été déterminée au moyen d'un instrument de passage, à la lunette duquel on peut substituer une boussole munie d'un axe horizontal et cylindrique exactement semblable à l'axe de révolution de la lunette. On commence par placer l'instrument de manière que l'axe visuel de la lunette décrive un vertical pas trop différent du méridien; si l'on observe ensuite tour-à-tour des deux côtés du zénith le passage de quelques étoiles dont les coordonnées astronomiques sont bien déterminées, et si entre les observations on change la place de l'axe de révolution de manière à annuller l'influence d'un défaut de collimation, on obtient à la fois: *le tems du lieu pour les momens des observations* et *l'azimut de l'axe de révolution.* On n'a donc qu'à substituer la boussole à la lunette pour avoir sur le champ la différence entre l'azimut astronomique et l'azimuth magnétique ou, ce qui est synonyme, la *déclinaison de l'aiguille.*

M. Bessel, inventeur de ce bel emploi de la lunette de passage, vient de publier un mémoire sur cet objet, où il embrasse la méthode sous tous les points de vue mathématiques et pratiques: (voyez le *Journal Astronomique* de

M. Schumacher) Il nous suffira donc d'avoir indiqué seulement la méthode suivie, et d'ajouter encore que l'instrument est fourni des moyens nécessaires pour s'assurer de la coïncidence de *l'origine des divisions*, avec la ligne qui passe par le milieu de l'axe cylindrique de la boussole.

Quant aux déclinaisons observées en plein jour, elles ont été obtenues par des passages du soleil dont on observait chaque bord séparément aux 5 fils de la lunette. Des observations d'étoiles faites dans les nuits qui précédaient et suivaient le passage du soleil, offrirent alors la correction du chronomètre, dont la marche est assez régulière pour permettre de déterminer par interpolation le *changement de correction pour l'espace de quelques heures.*

Quant aux fautes accidentelles qu'on peut supposer aux résultats obtenus par cette méthode, on peut en fixer la *limite au maximum*, ainsi qu'il suit. L'observation du passage d'une étoile équatoriale, par la lunette employée, prouve que dans le cas extrême on ne saurait être incertain sur le contact de l'étoile avec le fil moyen que *d'une demie seconde.* Supposé donc que la position de l'axe de l'instrument soit assez bien assurée pour ne pas changer *d'inclinaison* entre les observations, *une demie seconde* en tems sera le maximum d'erreur à appréhender pour la détermination du tems, quand on n'a observé qu'une seule étoile de chaque côté du zénith. Il s'entend de soi-même combien l'erreur est diminuée lorsqu'on observe plus de deux étoiles, et l'on peut dire que le maximum d'erreur dans la détermination de l'azimut astronomique ne saurait jamais monter qu'à 5 à 10 secondes en arc. Le limbe de la boussole est immédiatement divisé de 10 en 10 minutes; or, comme la lecture de l'aiguille se fait par des microscopes qui permettent l'estimation exacte à une minute près, et qu'on répète toujours ces lectures de *six à huit fois*, on voit que le maximum d'erreur dérivant de cette source ne saurait jamais surpasser 30 secondes, lequel s'ajoutant à l'incertitude de la partie astronomique de l'opération, donne pour le *montant de l'erreur totale en cas extrême* · · · · · 35″ à 40″.

Voici maintenant les résultats des observations dans l'ordre chronologique, et corrigés déjà tant pour le défaut de paraléllisme de l'axe de révolution avec le diamètre qui passe par le zéro de la boussole, que pour l'inclinaison de l'axe magnétique de l'aiguille à son axe de figure.

Lieu de l'observation.	*Date (nouv. st.) et tems moyen à compter de midi.*	*Déclinaison occidentale.*	*Astres observés:*
En ville	Mai 20. 12^h.10′	6°. 48′. 3″,2	α Couronne; γ et π Serpent.
Item	Mai 28. 13^h.51′	45. 16, 0	La Polaire, α Ophiuchus, ι Ophiuchus, ε et η Hercule.
Item	Mai 29. 2^h.10′	56. 45, 0	Le Soleil.
Item	Mai 31. 13^h.10′	43. 35, 5	La Polaire et α Ophiuchus.
Item	Juin 2. 2^h.21′	57. 20, 0	Le Soleil.
Jardin botanique	Juin 3. 1^h.35′	58. 36, 0	Le Soleil.
Jardin botanique	Juin 3. 14^h.10′	43. 34, 7	La Polaire; ϑ et ο Hercule.

Un coup d'oeil sur ce tableau prouve évidemment que toutes les déclinaisons observées entre 12^h et 14^h sont de 13 à 15 minutes *moindres*, que celles qui ont eu lieu vers les deux heures. Si l'on veut s'arrêter au *milieu* de chacun de ces deux groupes d'observations (celle de 12^h à 14^h, et celle de 2^h) ce qui revient à supposer les changemens de la direction de l'aiguille proportionels au tems pendant l'intervalle de deux heures, on obtient pour résultat définitif:

pour un jour tenant le milieu entre 20 Mai et le 3 Juin (st. nouv.)

déclin. Occidentale

à 13^h 20′,0 …… 6° 45′ 7″,3
à 2^h 8′,0 …… 6° 57′ 33″,7

On voit donc que sans hasarder des suppositions arbitraires on ne saurait encore rien prononcer sur la *déclinaison absolue moyenne*, c. à. d. sur celle qui tient le milieu entre tous les changemens qui arrivent pendant le cours d'un jour. Une étude plus approfondie de ces changemens périodiques de direction, est seule en état de mettre le phénomène dans son véritable jour. Pour obtenir cette donnée importante nous avons observé d'heure en heure pendant deux jours consécutifs les changemens de direction d'un barreau aimanté long de 13 pouces et suspendu à un fil de cocon. Des microscopes et des appareils micrométriques qui servent à déterminer la direction du barreau, permettent de distinguer parfaitement un changement de direction de 4 secondes sexagésimales. C'est avec un instrument exactement semblable au nôtre, et construit par le même artiste (M. Gambei à Paris), que M. Arago est parvenu à mettre dans tout son jour l'influence des aurores boréales sur la direction du méridien magnétique. Il sera donc intéressant de se procurer dans les endroits de l'intérieur de la Sibérie des séries d'observations de ce genre, correspondantes et exactement comparables avec celles qui se font à Paris; mais pour élever de beaucoup le prix de ces observations, il faudrait encore une station située plus à l'Ouest que Paris: d'autant plus que le petit nombre d'observations que nous avons pu faire à St.-Pétersbourg, font déjà entrevoir une différence très remarquable entre la *marche du phénomène* observée jusqu'ici dans les parties occidentales du continent et celle qu'il paraît suivre sous des méridiens plus orientaux.

Nous avons réuni dans le tableau suivant, les oscillations du *méridien magnétique* tels que nous les avons observées à St.-Pétersbourg, le caractère *m* y désigne la *déclinaison moyenne* que l'on obtient en prenant le milieu entre les 24 directions observées d'heure en heure pendant le cours d'un jour. Le signe

+ désigne une progression du méridien à l'Ouest } de la position moyenne.
— . . . . à l'Est }

Les momens des observations sont exprimés en *tems moyen* compté depuis midi.

1ère Série.			2de Série.		
Jours.	*Heures.*	*Déclinaisons.*	*Jours.*	*Heures.*	*Déclinaisons.*
Juin 12.	$0^h.35'$	m + 7′ 20″,1	Juin 13.	$0^h.35'$	m + 5′ 22″,0
—	1. 35	m + 9 37, 7	—	1. 35	m + 9 0, 4
—	2. 35	m + 10 2, 3	—	2. 35	m + 6 34, 8
—	3. 35	m + 7 33, 1	" "	"	" "
—	4. 35	m + 5 18, 5	" "	"	" "
—	5. 35	m + 4 10, 2	" "	"	" "
—	6. 35	m + 0 27, 5	" "	"	" "
—	7. 35	m — 0 36, 9	" "	"	" "
—	8. 35	m — 0 45, 3	" "	"	" "
—	9. 35	m + 0 35, 6	" "	"	" "
—	10. 35	m — 1 9, 3	" "	"	" "
—	11. 35	m — 4 23, 4	Juin 14.	11. 35	m — 1 6, 2
—	12. 35	m — 3 47, 2	—	12. 35	m — 0 21, 7
—	13. 35	m + 2 4, 9	—	13. 35	m — 2 16, 2
—	14. 35	m — 0 53, 4	—	14. 35	m — 2 3, 0
—	15. 35	m — 1 49, 7	—	15. 35	m + 1 19, 3
—	16. 35	m — 2 46, 3	—	16. 35	m — 2 27, 2
—	17. 35	m — 6 0, 5	—	17. 35	m — 5 16, 8
—	18. 35	m — 6 49, 1	—	18. 35	m — 7 6, 2
—	19. 35	m — 7 53, 8	—	19. 35	m — 6 5, 7
—	20. 35	m — 8 26, 2	—	20. 35	m — 4 4, 3
—	21. 35	m — 6 34, 5	—	21. 35	m — 1 6, 0
—	22. 35	m — 0 36, 9	—	22. 35	m — 0 25, 9
Juin 12.	23. 35	m + 0 25, 4	Juin 14.	23. 25	m + 0 18, 1

La comparaison de ces deux séries fait voir que des oscillations du méridien magnétique observées en deux jours différens, ne s'accordent pas parfaitement entr'eux, mais affectent néanmoins une certaine régularité qui se reproduit constamment et malgré toutes les anomalies qui contribuent à la voiler. Ce sont surtout ces *anomalies* (accidentelles en apparence), qui ont porté presque tous les physiciens qui se sont occupés de l'étude de ce phénomène, à regarder des *conditions météorologiques de l'atmosphère*, comme l'agent principalement contribuant à sa production.

Pour déduire maintenant des déclinaisons observées, rapportées plus haut, la *déclinaison moyenne*, on n'a qu'à y ajouter avec un signe contraire les déviations correspondantes du méridien aux mêmes heures. Voici quel a été l'effet de cette réduction :

l'observation de 13^{h}. 20′ réduite par la *déviation* observée
le 12 Juin donne . . . . . 6°. 44′. 30″.
la même réduite par la *déviation* observée
le 14 Juin donne . . . . . 6°. 47′. 11″.
l'observation de 2^{h}. 9′ réduite par la *déviation* observée
le 12 Juin donne . . . . . 6°. 47′. 45″.
la même réduite par la *déviation* observée
le 15 Juin donne . . . . . 6°. 49′. 45″.

Il s'en faut donc de beaucoup que les deux groupes d'observations puissent être mises d'accord en les corrigeant pour les changemens périodiques tels qu'ils ont été observés quelques jours après, mais on voit au contraire qu'aux jours où l'on a observé la déclinaison absolue (entre le 20 Mai et le 3 Juin), les oscillations périodiques ont été de 3 à 4 minutes plus grandes que celles qui se sont offertes à l'observation directe (le 12 et 14 Juin). Il est très digne de remarque, que, depuis le 20 Mai jusqu'au 3 Juin, le *ciel a été très clair et serein* de sorte que la variation de la température atmosphérique a été très grande du jour à la nuit; et qu'au contraire les observations directes des variations du méridien ont été faites par un tems de pluie où le soleil n'a pas paru du matin au soir, et où conséquemment la température n'a presque point varié du tout. Cette circonstance explique parfaitement la *différente étendue de la période diurne* que nous avons trouvée aux deux époques d'observation, pourvu qu'on regarde les variations du méridien magnétique *comme fonction de la température.*

Avant de terminer cet aperçu des observations de déclinaison, il reste encore à tirer quelques conséquences du tableau précédent des *variations périodiques:*

La courbe que l'on obtient en regardant les *déviations du méridien* comme ordonnées, les tems comme abscisses, atteint:

un *maximum* vers 2^h, qui surpasse la *déclinaison moyenne* de 10
et un *minimum* entre 18^h et 20^h, qui diffère de la moyenne de 8.

Quelques autres points d'inflexion et de rebroussement paraissent se rencontrer la nuit, où, lors de nos observations, la courbe coupa l'axe des abscisses à plusieurs reprises; mais elle s'en éloigna de si peu qu'une série de deux jours seulement ne suffit pas pour détacher ce qui est accidentel de ce qui est en règle. Il est très digne de remarque que l'ensemble de toutes les observations de ce genre qui ont été faites dans l'Europe occidentale, assignent aux variations du méridien une marche essentiellement différente de celle que nous venons de voir à St.-Pétersbourg, car il est généralement reçu que sous des méridiens plus occidentaux le maximum de déclinaison occidentale arrive également vers les 2^h, *mais le minimum à* 14^h, tandisque nous ne l'avons vu, que 6 heures plus tard. (comparez Horner dans: Gehlers *physikal. Wörterbuch; neu bearbeitet etc.*, *Tom. II. pag.* 153).

Quant à la *déclinaison moyenne* qui a eu lieu pour St.-Pétersbourg au commencement de Juin 1828 on peut l'égaler à 6°. 47′. 20″, sans craindre une erreur de plus d'une minute.

Sur l'inclinaison de l'aiguille à St.-Pétersbourg.

La boussole d'inclinaison qui a servi à St.-Pétersbourg et qui sera employée en voyage est construite par M. Gambey. Le cercle vertical a dix pouces de diamètre et est divisé de dix en dix minutes. L'instrument est fourni de deux aiguilles parfaitement semblables, à axes cylindriques qui terminent en des pointes d'acier d'environ $\frac{2}{10}$ de ligne en diamètre. C'est avec cette partie effilée que les aiguilles repôsent sur de petites plaques d'agate à surfaces convexes et d'un poli très fin. L'artiste a taché de construire les aiguilles de manière à ne laisser subsister qu'une très légère différence entre la position des centres de *gravité* et de *figure*: on est dispensé par là de l'emploi connu des contrepoids, inventés par Meier; qui, pour des aiguilles moins exactement équilibres, doivent servir à grossir encore les fautes de la position du centre de gravité, pour les éliminer ensuite à l'aide du calcul. On prouve facilement que: lorsque la position du centre de gravité, n'est que peu différente de celle du centre de figure, la formule de Meier se réduit à prendre le milieu arithmétique entre les lectures faites avant et après l'inversion des pôles de l'aiguille pour deux positions contraires du cercle vertical. C'est avec cette modification, conforme à l'individualité de la boussole employée, que nous avons suivi la méthode de Meier. Voici les observation:

I. *Observation faite en ville le 14 Mai.*
A) Le cercle vertical faisant face
à l'orient . . Incl. 71° 51′,75
71 53,00
à l'occident . . Incl. 70 11,0
70 15,5
B) Après l'inversion des pôles.
Le cercle faisant face
à l'orient . . Incl. 72° 23′,00
72 19,00
à l'occident . . Incl. 70 4,50
70 4,75
Résultat . . . 71° 7′ 49″.

II) *Dans le jardin botanique le 3 Juin.*
A) Le cercle faisant face
à l'orient . . Incl. 70° 55′,75
70 54,75
à l'occident . . Incl. 71 52,00
71 54,25
B) Après l'inversion des pôles.
Le cercle faisant face
à l'orient . . Incl. 70° 7′,0″
70 6,0
à l'occident . . Incl. 72 11,5
72 15,0
Résultat . . . 71° 17′ 2″

Résultat moyen: 71° 12′ 25″.

Intensité de la force magnétique à St.-Pétersbourg.

La comparaison de l'intensité de la force magnétique à Berlin, avec celle qui règne à St.-Pétersbourg, a été effectuée au moyen de deux aiguilles horisontalement suspendues.

La première désignée par ***A*** est un petit cylindre de l'acier le plus trempé que l'on peut se procurer: exactement semblable pour la figure et les dimensions aux cylindres dont M. Hansteen s'est servi pour déterminer les intensités dans l'Europe occidentale. Cette aiguille a été aimantée à saturation il y a un an et depuis ce tems-là on ne l'a plus retouchée du tout, parce qu'on peut supposer que l'état magnétique qui s'est établi après l'espace d'un an sera plus longtems conservé que tout autre que l'on pourrait communiquer à l'aiguille par de nouvelles touches.

L'aiguille ***B*** est un barreau de 6 pouces de long qui a été trempé et aimanté par Coulomb. C'est le même barreau dont M. de Humbold s'est servi pour la comparaison des intensités de l'Europe avec celle de *l'équateur magnétique* et il est connu que cette aiguille n'a presque point changé d'intensité pendant tout le cours du voyage. Les tems des oscillations ont été observés au moyen d'un Chronomètre qui bat 5 fois par deux secondes; on a noté le tems de dix en dix oscillations et on a compté cent à chaque fois. Le résultat a été déduit d'une série pareille, d'après la méthode des *moindres carrés* et *l'élongation de l'aiguille* observée au commencement de la 1^re^ et de la 100^me^ oscillation a servi pour réduire le tems d'une oscillation observée à celui que l'aiguille aurait employé à faire des oscillations infiniment petites.

Durée d'une oscillation

	à Berlin.	à St.-Pétersbourg.
de l'aiguille ***A*** .	3″0990	3″2086
de l'aiguille ***B*** .	4″6161	4″7852

L'intensité de la composante horizontale de la force magnétique à St.-Pétersbourg est donc d'après l'indication de $A = \frac{(3\cdot0990)^2}{(3\cdot2086)^2} = 0{,}933$ celle de Berlin étant

$B = \frac{(4\cdot6161)^2}{(4\cdot7852)^2} = 0{,}931$ égalée à *l'unité.*

Pour déduire de cette observation la relation entre les *forces totales* pour les deux endroits, nous avons admis *l'inclinaison de l'aiguille à Berlin* $= 68^\circ\, 39'\, 30$ telle qu'elle a été récemment déterminée avec le *même instrument* et d'après la même méthode que celle de St.-Pétersbourg. Avec ces données et en s'arrêtant au milieu arithmétique entre l'indication des deux aiguilles on trouve pour *l'intensité de la force totale à St.-Petersbourg*

$$\text{l'expression : } \frac{0\cdot 932 \cdot \sec.(71^\circ 12' 25'')}{\sec.(68^\circ 39' 30'')} = 1\cdot 0526$$

'intensité totale à Berlin étant égalée à l'unité.

Je ne saurais rappeler les observations dont j'ai osé exposer ici les résultats, sans être pénétré de la plus vive reconnaissance envers M. Lenz, qui en m'honorant de son assistance, a prouvé qu'en tout ce qui contribue à l'avancement des sciences il s'intéresse jusqu'aux *moindres essais.*

DE
NONNULLIS

PROBLEMATIS ANALYTICIS CAUTE TRACTANDIS.

AUCTORE
MARTINO OHM,
UNIVERSITATIS LITTERARIAE BEROLINENSIS PROFESSORE.

(Conv. exhib. die 31 Aug. 1825.)

Eulerus, qui analyseos hodiernae genitor jure colendus est, series infinitas maximi esse momenti, nos exemplo suo edocuit; iis permultum temporis et studii dicavit, usum earum ostendit, easque summopere et sedulo tractandas commendavit. Ex illo tempore analyseos cultores serierum infinitarum theoriam magis magisque clariorem, praesertim vero earum applicationem faciliorem eoque graviorem reddere conati erant; coëfficientes certos saepissime occurrentes calculo numerico subjecerunt, eorumque tabulas, usui maxime commodas confecerunt. Quem laborem hodie adhuc persequi geometrae indefessi videntur.

Quum vero serierum infinitarum theoria difficillima sit et maxime sublimis, quae hic de nonnullis earum tractandis pauca moneam, haud e re esse putem.

Ne vero nimium spatii impleam diversis problematis primo adspectu sejunctis, attamen nexu interno gaudentibus, initium faciam, antea tamen allatis notationibus, brevitatis caussa valde necessariis, quibus hic uti liceat.

Notationes.

1. Productum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \alpha$, ubi α est numerus integer positivus, signo $\alpha!$ denotatur, ita quidem ut sumatur $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, etc. etc. etc.

2. Signa $n_0, n_1, n_2, n_3, \cdots n_\alpha$, nisi expresse alia iis tributa sit significatio, coëfficientes binomiales exprimant, ita ut sit $n_0 = 1$, $n_1 = n$ et $n_\alpha = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha}$.

3. Series infinita quaecunque termino ejus generali exprimatur, summae signo S ei anteposito. Hujus termini indices litteris graecis minoribus repraesentantur, ita ut quaevis littera graeca minor hic occurrens semper *zero* et *omnes* numeros integros positivos significet.

Ex. gr. series infinitae signis

$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\cdots$, ,, ,, $S\left[(-1)^\alpha \cdot z^\alpha\right]$

$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots\cdots$, ,, ,, $S\left[(\alpha+1) \cdot z^\alpha\right]$

$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$, ,, ,, $S\left[\frac{(-1)^\alpha \cdot x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!}\right]$

$\frac{\sin. x}{1^{2n}} - \frac{\sin. 2x}{2^{2n}} z + \frac{\sin. 3x}{3^{2n}} z^2 + \cdots\cdots$, ,, ,, $S\left[\frac{(-1)^\alpha \cdot \sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n}} \cdot z^\alpha\right]$

scribuntur. Quodsi vero scribas

$$S\left[\frac{(-1)^\alpha \sin.(\alpha+1)x}{2^{2\beta}} z^\alpha\right]$$

seriem habebis secundi ordinis, quae secundum quantitatis z potestates progreditur, cujus singuli vero coëfficientes iterum infinitae sunt series, ita quidem ut ex. gr. coëfficiens potestatis z^p series sit infinita $S\left[\frac{(-1)^p . \sin.(p+1)x}{2^{2\beta}}\right]$ i. e. $(-1)^p . \sin.(p+1)x . \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\cdots\right]$.

4) Iisdem vero signis et tum commodissime utaris, cum series finita exprimenda sit, modo indicis vel indicum valores satis limites. Seriem ex. gr. finitam

$$1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots\cdots \pm z^n,$$

ubi z^n terminus est seriei ultimus, signo

$$S\left[\begin{smallmatrix}(-1)^\alpha z^\alpha \\ \alpha+\beta=n\end{smallmatrix}\right]$$

denotamus, quia aequatio $\alpha + \beta = n$ impedit, quominus loco α numerum numero n majorem ponamus, littera graeca β nunquam valorem negativum admittente.

5. Littera P designante quamcunque quantitatis variabilis x functionem, signis $(P)_o$, $(P)_b$, $(P)_a$ etc. etc. illos functionis P valores exprimo, posito o, vel b, vel a, etc. etc. loco x, evadentes.

Problemata.

§. 1. Problema I.

Functionis datae $(1 + e^x z)^{-1}$ quantitatis variabilis x, differentiale p^{ti} gradus determinare.

Solutio. Determinatis differentialibus primi, secundi vel tertii gradus, elucet differentiale quaesitum $\dfrac{d^p . (1 + e^x z)^{-1}}{dx^p}$ habere hanc formam

$$1)\quad -f_1(p).e^x z(1+e^x z)^{-2} + f_2(p).e^{2x} z^2 (1+e^x z)^{-3} - f_3(p).e^{3x} z^3 (1+e^x z)^{-4} + \text{etc.}$$
$$\pm f_p(p).e^{px} z^p (1+e^x z)^{-p-1},$$

ubi $f_1(p) = 1$, $f_2(p)$, $f_3(p)$, ... $f_p(p)$ vero coëfficientes sunt adhuc determinandi.

Posito hic $p+1$ loco p, expressio (1) in alteram abit ejusdem formae, cujus coëfficientes erunt

$$2)\quad -f_1(p+1),\ +f_2(p+1),\ -f_3(p+1),\ +f_4(p+1), \ldots\ldots \pm f_{p+1}(p+1)$$

qua formula (2) autem differentiale $\dfrac{d^{p+1} . (1+e^x z)^{-1}}{dx^{p+1}}$ expressum erit.

Iterata vero differentiatione formulae (1), idem differentiale $(p+1)^{\text{ti}}$ gradus evadet ad eandem formam relatum, coëfficientibus

$$3)\quad -f_1(p),\ +2[f_1(p)+f_2(p)],\ -3[f_2(p)+f_3(p)],\ +4[f_3(p)+f_4(p)],\ - \text{etc.}$$

affectum. Unde sequitur, formulis (2) et (3) comparatis, esse:

$$f_1(p+1)=f_1(p)=1 \text{ et } f_n(p+1)=n[f_{n-1}(p)+f_n(p)].$$

Jam e differentiarum finitarum theoria notum est, harum coëfficientes eandem legem sequi; unde prodit:

$$f_n(p)=n^p-n_1\cdot(n-1)^p+n_2\cdot(n-2)^p-n_3\cdot(n-3)^p+\cdots\cdots$$

vel

$$f_n(p)=S[(-1)^\alpha n_\alpha\cdot(n-\alpha)^p],$$

ubi n_0, n_1, n_2, etc., coëfficientes sunt binomiales, ita ut n_α evanescat, quoties $\alpha>n$.

Invenimus igitur

$$\text{I.}\quad \frac{d^p\cdot(1+e^x z)^{-1}}{dx^p}=S\Big[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(p)\cdot e^{(\alpha+1)x}z^{\alpha+1}(1+e^x z)^{-\alpha-2}\Big]_{\alpha+\beta=p-1},$$

quoties p numerus est integer positivus, sed non zero, ac differentiarum finitarum coëfficiens $f_n(p)$ datus est ope aequationis

$$\text{II.}\quad f^n(p)=S[(-1)^\alpha n_\alpha\cdot(n-\alpha)^p].$$

Scholion. Aequatio sub termino generali ad dextram formulae (I.) posita, $\alpha+\beta=p-1$, nos edocet, loco α sensim sensimque zero et numeros integros positivos 1, 2, 3, ... $p-1$, sed non numerum numero $p-1$ majorem poni debere: qua de re expressio ad dextram formulae (I.) p gaudet terminis, nec est series infinita. Sed etiam valor ipsius $f_n(p)$ in (II.) non est series infinita, sed $n+1$ tantum terminis constat, propter quod n_α toties evanescit, quoties $\alpha>n$ sumitur.

§. 2. Corollarium.

Posito in formula (I. §. 1) $x=0$ prodibit:

$$\text{III.}\quad \left(\frac{d^p\cdot(1+e^x z)^{-1}}{dx^p}\right)_0=S\Big[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\Big]_{\alpha+\gamma=p-1}$$

§. 3. Problema II.

Seriei infinitae

$$0^p-1^p\cdot z+2^p\cdot z^2-3^p\cdot z^3+4^p\cdot z^4-\text{etc. etc. vel } S[(-1)^\alpha\alpha^p\cdot z^\alpha]$$

summam invenire, quum p sit numerus integer positivus.

Solutio. Est secundum theorema binomiale

$$1)\qquad (1+e^{x}z)^{-1} = 1-e^{x}z+e^{2x}z^{2}-e^{3x}z^{3}+\text{ etc. etc.}$$

$$\text{vel } = S\left[(-1)^{a}e^{ax}z^{a}\right]$$

et porro constat esse:

$$2)\qquad e^{\nu} = 1+\frac{\nu}{1}+\frac{\nu^{2}}{1\cdot 2}+\frac{\nu^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ etc. etc.} = S\left[\frac{\nu^{\beta}}{\beta\,!}\right].$$

Igitur, posito αx loco ν, et quod prodit in (1.) substituto:

$$3)\qquad (1+e^{x}z)^{-1} = S\left[(-1)^{\alpha}\frac{\alpha^{\beta}x^{\beta}}{\beta\,!}z^{\alpha}\right] = S\left[(-1)^{\alpha}\alpha^{\beta}z^{\alpha}\cdot\frac{x^{\beta}}{\beta\,!}\right],$$

ubi series ad dextram est infinita secundi ordinis, quae secundum potestates ipsius x progreditur et cujus Coëfficientes singuli series sunt infinitae secundum z progredientes.

Docuerunt vero Taylorus et Maclaurinus, esse

$$\varphi(x) = S\left[\left(\frac{d^{\beta}\cdot\varphi(x)}{dx^{\beta}}\right)_{0}\cdot\frac{x^{\beta}}{\beta\,!}\right],$$

itaque, $(1+e^{x}z)^{-1}$ loco x posito:

$$4)\qquad (1+e^{x}z)^{-1} = S\left[\left(\frac{d^{\beta}\cdot(1+e^{x}z)^{-1}}{dx^{\beta}}\right)_{0}\cdot\frac{x^{\beta}}{\beta\,!}\right].$$

formulis (3.) et (4.) inter se comparatis, coëfficientes quantitatis $\frac{x^{p}}{p\,!}$ in ambabus seriebus identicas esse elucet, ita ut habeas:

$$5)\qquad S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\alpha^{p}\cdot z^{\alpha}\right] = \left(\frac{d^{p}\cdot(1+e^{x}z)^{-1}}{dx^{p}}\right)_{0}$$

atque, valore (III. §. 2) substituto:

$$\text{IV.}\qquad S\cdot\left[(-1)^{\alpha}\alpha^{p}z^{\alpha}\right] = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\right],$$

quae expressio ad dextram p gaudet terminis et summa erit quaesita.

§. 4. Corollarium.

Posito in aequatione (IV. §. 3.) $-z$ loco z, evadet:

$$\text{V.}\qquad S\left[\alpha^{p}z^{\alpha}\right] = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1-z)^{\alpha+2}}\right],$$

quae formula ad dextram p habet terminos et summa erit seriei infinitae:

$$0^p + 1^p z + 2^p z^2 + 3^p z^3 + 4^p z^4 + \cdots \text{ in inf..}$$

Sin vero aequationes (V. et VI.) quantitatibus $-z$ et z dividantur, sequitur esse:

$$\text{VI.} \qquad S\left[(-1)^\alpha(\alpha+1)^p z^\alpha\right] = S\left[(-1)^\alpha f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+2}}\right]$$

$$\text{VII.} \qquad S\left[(\alpha+1)^p z^\alpha\right] = S\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^\alpha}{(1-z)^{\alpha+2}}\right].$$

Scholion. Ex aequationibus (IV. et V.) facillime summas serierum

$$0^p \pm 2^p \cdot z^2 + 4^p \cdot z^4 \pm 6^p \cdot z^6 + \cdots \text{ in inf.}$$

$$1^p \cdot z \pm 3^p \cdot z^3 + 5^p \cdot z^5 \pm \cdots \text{ in inf.}$$

nec non permultarum aliarum similium deducere possumus, de quibus vero hic non amplius sit sermo.

§. 5. Corollarium.

Quodsi vero in aequatione (IV. §. 3.) $z = 1$ supponas, prodibit

$$\text{VIII.} \qquad S\left[(-1)^\alpha \cdot \alpha^p\right] = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1} f_{\alpha+1}(p) \times \frac{1}{2^{\alpha+2}}\right]$$

ubi expressio ad dextram p habet terminos, dum series ad laevam est haec: $0^p - 1^p + 2^p - 3^p + 4^p - 5^p + \cdots$ in inf. Ubique vero numerus p integer positivus censetur.

§. 6. Regula I.

Attamen hic monere liceat: *quamcunque seriem infinitam*, cujus summa investiganda est, *convergentem esse debere. Caveas igitur, ne summa investigata utaris, cum series ipsa non amplius convergat.*

Quamvis vero series

$$0^p - 1^p \cdot z + 2^p \cdot z^2 - 3^p \cdot z^3 + 4^p \cdot z^4 - \text{ etc. etc. vel } S\left[(-1)^\alpha \alpha^p z^\alpha\right]$$

convergens putari possit, modo quantitas z satis parva sumatur, series tamen

$$0^p - 1^p + 2^p - 3^p + 4^p - \text{ etc. etc.}$$

quia p numerus est integer positivus, neutiquam convergit.

Utaris igitur formula (VIII. §. 5), sed illa restrictione, ut, quae illius ope eruas, alia via adhuc demonstres, seu potius, ut semper adhuc inquiras, utrum, quae ope ejusmodi formulae inventa sint, in omnibus casibus valeant, an singulis tantum specialibus.

§. 7. Regula II.

Porro est consulendum: toties seriei $S\left[A_\alpha z^\alpha\right]$ summam investigare, quoties series $S\left[A_\alpha\right]$ vel series $S\left[(-1)^\alpha A_\alpha\right]$ summari debet, terminis A_0, A_1, A_2, A_3, etc. etc. secundum legem quamcunque progredientibus. Series enim $S\left[A_\alpha z^\alpha\right]$ certe pro valoribus quantitatis z satis parvis converget, et summa exhibita etiam aliarum serierum $S\left[(-1)^\alpha A_\alpha\right]$ et $S\left[A_\alpha\right]$ summam praebebit, si $+1$ vel -1 loco z ponatur, modo series hae ipsae sint convergentes.

Scholion. Hae regulae sequentibus adhuc affirmabuntur.

§. 8. Problema. III.

Numeros Bernoullianos differentiarum finitarum Coëfficientibus $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$, etc. etc. exprimere, ubi $f_n(p) = S\left[(-1)^\alpha n_\alpha \cdot (n-\alpha)^p\right]$ pro quocunque valore integro et positivo quantitatis n, numerus est datus.

Solutio. Quodsi tg. $\frac{1}{2}x$ secundum potestates ipsius x evolutam censemus, aequationi haec forma

$$1)\qquad \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}x = S\left[(-1)^\beta \frac{2^{2\beta+2}-1}{\beta+1} B_{\beta+1} \cdot (-1)^\beta \frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right]$$

tribui poterit, ubi B_1, B_2, B_3 etc. etc. numeri sunt adhuc determinandi, ceterum *numeri Bernoulliani* dicti, ita quidem ut aequationem (1.) tanquam definitionem numerorum Bernoullianorum habeamus.

Est vero secundum Taylorum et Maclaurinum

$$\varphi x = (\varphi x)_0 + \underset{\alpha+\gamma=\beta-1}{S}\left[\left(\frac{d^\beta \cdot \varphi x}{dx^\beta}\right)_0 \cdot \frac{x^\beta}{\beta!}\right]$$

ubi aequatio $\alpha+\gamma=\beta-1$ (vel alia $\delta=\beta-1$) nil exprimit, nisi β valore 0 non gaudere. Ponendo ceterum $(1+e^x z)^{-1}$ loco φx prodit

$$2)\qquad (1+e^x z)^{-1}=(1+z)^{-1}+S\underset{\alpha+\gamma=\beta-1}{\left[\left(\frac{d^\beta\cdot(1+e^x z)^{-1}}{dx^\beta}\right)_0\cdot\frac{x^\beta}{\beta!}\right]}$$

unde, valore (§. 2) substituto,

$$3)\quad (1+e^x z)^{-1}=(1+z)^{-1}+S\underset{\alpha+\gamma=\beta-1}{\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\cdot\frac{x^\beta}{\beta!}\right]}$$

et, $-x$ loco x si ponamus:

$$4)\quad (1+e^{-x}z)^{-1}=(1+z)^{-1}+S\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(p)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\cdot(-1)^\beta\cdot\frac{x^\beta}{\beta!}\right].$$

Has aequationes addendo et subtrahendo, termini pares vel impares evanescent et evadet:

$$5)\quad \frac{(1+e^x z)^{-1}+(1+e^{-x}z)^{-1}}{2}=(1+z)^{-1}+S\underset{\alpha+\gamma=2\beta-1}{\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(2\beta)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\cdot\frac{x^{2\beta}}{(2\beta)!}\right]}$$

$$6)\qquad \frac{(1+e^x z)^{-1}-(1+e^{-x}z)^{-1}}{2}=S\underset{\alpha+\gamma=2\beta}{\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(2\beta+1)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^{\alpha+2}}\cdot\frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right]}$$

Est porro

$$\frac{(1+e^x)^{-1}-(1+e^{-x})^{-1}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot\frac{\sin.(x\sqrt{-1})}{1+\cos.(x\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot\mathrm{tg.}\left(\frac{x}{2}\sqrt{-1}\right).$$

Posito igitur in (6.) $z=1$, prodibit:

$$7)\quad \mathrm{tg.}\ (\tfrac{1}{2}x\sqrt{-1})=-2\sqrt{-1}\cdot S\underset{\alpha+\gamma=2\beta}{\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(2\beta+1)\frac{1}{2^{\alpha+2}}\cdot\frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right]}$$

vel $-x\sqrt{-1}$ loco x substituendo:

$$\text{IX.}\qquad \mathrm{tg.}\ \tfrac{1}{2}x=S\underset{\alpha+\gamma=2\beta}{\left[(-1)^{\alpha}f_{\alpha+1}(2\beta+1)\cdot\frac{1}{2^{\alpha+1}}\cdot(-1)^\beta\frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right]}$$

Quoniam vero series ad dextram formularum (1.) et (IX.) identicae esse debent, etiam Coëfficientes expressionis $\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ aequales sint necesse est; quibus comparatis prodibit $p-1$ loco β ponendo:

$$\text{X.}\qquad (-1)^{p-1}\cdot\frac{2^{2p}-1}{p}B_p = \underset{\alpha+\gamma=2p-2}{S}\left[(-1)^{\alpha}f_{\alpha+1}(2p-1)\cdot\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right],$$

qua aequatione numerus Bernoullianus B_p differentiarum finitarum Coëfficientibus $f_1(2p-1)$, $f_2(2p-1)$, $f_3(2p-1)$, $\cdots f_{2p-1}(2p-1)$ expressus erit, quum denique posteriores aequatione (II. §. 1) sint dati. Ceterum formula (X.) $2p-1$ gaudet terminis.

§. 9. Corollarium.

Quodsi autem in formula (5. §. 8) $z=1$ supponas, gaudebis aequatione

$$8)\qquad \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \underset{\alpha+\gamma=2\beta-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(2\beta)\cdot\frac{1}{2^{\alpha+2}}\cdot\frac{x^{2\beta}}{(2\beta)!}\right]$$

qua ex formula manifestum est, coëfficientem quantitatis $\frac{x^{2p}}{(2p)!}$ zero esse debere, pro p numero integro quocunque positivo. Erit itaque

$$\text{XI.}\qquad \underset{\alpha+\gamma=2p-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1}f_{\alpha+1}(2p)\cdot\frac{1}{2^{\alpha+2}}\right]=0.$$

§. 10. Corollarium.

Posito in (VIII. §. 5) $2p$ loco p, ob formulam (XI. §. 9) habebimus:

$$\text{XII.}\qquad S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\alpha^{2p}\right]=0 \text{ vel } S\left[(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2p}\right]=0$$

$$\text{i. e.}\qquad 1^{2p}-2^{2p}+3^{2p}-4^{2p}+5^{2p}-6^{2p}+\cdots \text{ in inf.} =0.$$

quoties p numerus est integer positivus sed non zero.

Scholion. Hanc aequationem diversis aliis methodis eruere potuisses. Sed caveas, quominus ea sine restrictione utaris, propter quod series ipsa non convergit (Reg. I. §. 6). Quoties igitur hanc adhibebis, toties etiam alia adhuc methodo inquiras, usque ad quem limitem, quae eruisti valeant, vel quibus limitibus valere cessant.

§. 11. Problema. IV.

Serierum infinitarum

$$S\left[\alpha^{p}\cdot\cos.\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right] \text{ et } S\left[\alpha^{p}\cdot\sin.\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right]$$

i. e. $1^p \cdot \overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{}} x \cdot z + 2^p \cdot \overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{}} x \cdot z^2 + 3^p \cdot \overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{}} x \cdot z^3 + \cdots\cdot$ in inf. summas invenire.

Solutio. Posito in formula (V. §. 4) $e^x z$ loco z, prodibit:

$$\text{XIII.} \qquad S\left[\alpha^p e^{ax} z^a\right] = \underset{a+\gamma=p-1}{S}\left[f_{a+1}(p)\cdot\frac{e^{(a+1)x} z^{a+1}}{(1-e^x z)^{a+2}}\right],$$

quae expressio ad dextram p habet terminos, et seriei infinitae $S\cdot[\alpha^p e^{ax} z^a]$ est summa. Hic vero primum $x\sqrt{-1}$, postea $-x\sqrt{-1}$ loco x substitutis, ac aequationibus inde prodeuntibus additis et subtractis, habebis:

$$1)\ S\cdot\left[\alpha^p \cos.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = \tfrac{1}{2}\underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\left(\frac{e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}} + \frac{e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}}\right)\cdot z^{\alpha+1}\right]$$

$$2)\ S\cdot\left[\alpha^p \sin.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\cdot\left[f_{\alpha+1}(p)\left(\frac{e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}} - \frac{e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}}\right)\cdot z^{\alpha+1}\right].$$

Est vero

$$3)\ \frac{e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}} \pm \frac{e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}}{(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}} = \frac{e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} \pm e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{x\sqrt{-1}}}{(1-2z\cdot\cos.\,x+z^2)^{\alpha+2}}$$

et secundum theorema binomiale

$$4)\qquad (1-e^{\mp x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} = S\left[(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta e^{\mp\delta x\sqrt{-1}}z^\delta\right],$$

unde

$$5)\ e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} = S\cdot\left[(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta e^{(\alpha+1-\delta)x\sqrt{-1}}\times z^\delta\right]$$

$$6)\ e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} = S\cdot\left[(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta e^{-(\alpha+1-\delta)x\sqrt{-1}}\times z^\delta\right];$$

atque addendo et subtrahendo

$$7)\ e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} + e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}$$
$$= 2\,S\left[(a+2)_\delta(-1)^\delta \cos.\,(\alpha+1-\delta)x\cdot z^\delta\right]$$

$$8)\ e^{(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{-x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2} - e^{-(\alpha+1)x\sqrt{-1}}(1-e^{x\sqrt{-1}}z)^{\alpha+2}$$
$$= 2\sqrt{-1}\cdot S\left[(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta \sin.\,(\alpha+1-\delta)x\cdot z^\delta\right];$$

quibus valoribus in (3.) eoque etiam in (1.) et in (2.) substitutis, prodibit:

$$\text{XIV.}\quad \left.\begin{array}{r} S\left[\alpha^p \cos.\, \alpha x \cdot z^\alpha\right] \\ \text{vel } S\left[(\alpha+1)^p \cos.\, (\alpha+1)x \cdot z^{\alpha+1}\right] \end{array}\right\} = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta \frac{\cos.\,(\alpha+1-\delta)x\cdot z^{\alpha+1-\delta}}{(1-2z\cos.\,x+z^2)^{\alpha+2}}\right]$$

$$\text{XV.}\quad \left.\begin{array}{r} S\left[\alpha^p \sin.\, \alpha x \cdot z^\alpha\right] \\ \text{vel } S\left[(\alpha+1)^p \sin.\, (\alpha+1)x \cdot z^{\alpha+1}\right] \end{array}\right\} = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot(\alpha+2)_\delta(-1)^\delta \cdot \frac{\sin.\,(\alpha+1-\delta)x\cdot z^{\alpha+1-\delta}}{(1-2z\cdot\cos.\,x+z^2)^{\alpha+2}}\right]$$

ubi expressiones ad dextram p gaudent terminis, dum quivis terminus α^{tus} omnino adhuc constat $\alpha+3$ partibus, ita ut illae non sint series infinitae sed datarum serierum infinitarum summas repraesentent.

Scholion. Ponendo $-z$ loco z in (XIV.) et (XV.), addendo et subtrahendo aequationes inde prodientes, porro iterum $z\sqrt{-1}$ et $-z\sqrt{-1}$ loco z substituendo et additionem et subtractionem repetendo, sicque continuando, multarum aliarum serierum infinitarum similium summam habebis, quibus vero hic non diutius moremur.

§. 12. Corollarium.

In seriebus (§. 11) datis p numerus erat integer et positivus. Casus igitur, in quo $p=0$, separatim erit tractandus. Est vero

$$\frac{1}{1-e^x z} = (1-e^x z)^{-1} = S\left[e^{\alpha x}\cdot z^\alpha\right]$$

et hic $x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$ loco x ponendo, ac aequationibus inde orientibus additis vel subtractis, sequitur esse:

$$\text{XVI.}\qquad S\left[\cos.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = \frac{1-z\cdot\cos.\,x}{1-2z\cdot\cos.\,x+z^2};$$

$$\text{XVII.}\qquad S\left[\sin.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = \frac{z\cdot\sin.\,x}{1-2z\cdot\cos.\,x+z^2},$$

Unde adhuc deducere possumus

$$\text{XVIII.}\qquad S\left[(-1)^\alpha\cos.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = \frac{1+z\cdot\cos.\,x}{1+2z\cdot\cos.\,x+z^2},$$

$$\text{XIX.}\qquad S\left[(-1)^\alpha\cdot\sin.\,\alpha x\cdot z^\alpha\right] = -\frac{z\cdot\sin.\,x}{1+2z\cdot\cos.\,x+z^2},$$

nec non summas serierum infinitarum

$$S\cdot\left[(\pm 1)^{\alpha}\,\overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{\vdots}}\,2\alpha x\cdot z^{2\alpha}\right],\quad S\cdot\left[(\pm 1)^{\alpha}\,\overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{\vdots}}\,2\alpha x\cdot z^{\alpha}\right],$$

etc. etc. etc.

E formulis (XVI—XIX) vero statim adhuc sequentes emanent:

XX. $$S\,[\cos.(\alpha+1)\,x\cdot z^{\alpha}] = \frac{\cos.x - z}{1-2z\cdot\cos.x+z^2},$$

XXI. $$S\,[\sin.(\alpha+1)\,x\cdot z^{\alpha}] = \frac{\sin.x}{1-2z\cdot\cos.x+z^2},$$

XXII. $$S\,[(-1)^{\alpha}\cos.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}] = \frac{\cos.x+z}{1+2z\cdot\cos.x+z^2},$$

XXIII. $$S\,[(-1)^{\alpha}\sin.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}] = \frac{\sin.x}{1+2z\cdot\cos.x+z^2}.$$

§. 13. Corollarium.

Quodsi vero quaeris serierum infinitarum

$$S\,[(\alpha+1)^{p}\cos.\alpha x\cdot z^{\alpha}] \quad\text{et}\quad S\,[(\alpha+1)^{p}\sin.\alpha x\cdot z^{\alpha}]$$

summam; iterum methodum (§. 11) allatam adhibe, modo loco formulae (V. §. 4) alteram (VII. §. 4) substituas. Quo facto evenit:

XXIV. $$S[(\alpha+1)^{p}\cos.\alpha x\cdot z^{\alpha}] = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot(\alpha+2)_{\delta}(-1)^{\delta}\frac{\cos.(\alpha-\delta)x\cdot z^{\alpha+\delta}}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^{\alpha+2}}\right]$$

XXV. $$S[(\alpha+1)^{p}\sin.\alpha x\cdot z^{\alpha}] = \underset{\alpha+\gamma=p-1}{S}\left[f_{\alpha+1}(p)\cdot(\alpha+2)_{\delta}(-1)^{\delta}\frac{\sin.(\alpha-\delta)x\cdot z^{\alpha+\delta}}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^{\alpha+2}}\right]$$

Scholion. Memoriae dignum videtur observare:

1) Serierum $S\left[(\alpha+1)\,\overset{\text{cos.}}{\underset{\text{sin.}}{\vdots}}\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right]$ summam etiam immediate ex aequatione

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

derivari, modo $e^{x\sqrt{-1}}z$ et $e^{-x\sqrt{-1}}z$ loco z ponantur, atque aequationes prodientes addantur vel subtrahantur.

Hac methodo oritur

XXVI. $$S\,[(\alpha+1)\cos.\alpha x\cdot z^{\alpha}] = \frac{1-2z\cdot\cos.x+z^2\cdot\cos.2x}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2};$$

XXVII. $$S[\alpha+1)\sin.\alpha x\cdot z^{\alpha}]=\frac{2z\cdot\sin.x-z^2\sin.2x}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2}.$$

2) Aequatio

$$\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots\cdot$$

gignit, $e^{x\sqrt{-1}}z$ et $e^{-x\sqrt{-1}}z$ loco z si ponatur, additione nec non subtractione peracta, formulas sequentes:

XXVIII. $$S\Big[(\alpha+1)\cos.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha+1}=\frac{z\cdot\cos.x-2z^2+z^3\cos.x}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2};$$

XXIX. $$S[(\alpha+1)\sin.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha+1}]=\frac{z\cdot\sin.x(1-z^2)}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2}.$$

Atque quantitate z dividendo:

XXX. $$S[(\alpha+1)\cos.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}]=\frac{\cos.x-2z+z^2\cdot\cos.x}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2},$$

XXXI. $$S[(\alpha+1)\sin.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}]=\frac{\sin.x\cdot(1-z^2)}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2}.$$

Eaedem vero formulae etiam ex illis (XIV.) et (XV.) deducuntur, posito $p=1$.

3) Differentiationis successivae ope secundum variabilem x, vel secundum variabilem z, e summis (§. 12) inventis scilicet

$\odot)$ $$S[\cos.\alpha x\cdot z^{\alpha}]=\frac{1-z\cdot\cos.x}{1-2z\cdot\cos.x+z^2},$$

☽) $$S[\sin.\alpha x\cdot z^{\alpha}]=\frac{z\cdot\sin.x}{1-2z\cdot\cos.x+z^2},$$

statim etiam serierum

$$S\Big[\alpha^p\cdot\overset{\cos.}{\underset{\sin.}{\cdot}}\alpha x\cdot z^{\alpha}\Big]\text{ i. e. }S\Big[(\alpha+1)^p\overset{\cos.}{\underset{\sin.}{\cdot}}(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha+1}\Big]$$

summam invenire potuisses, nec non quantitate z dividendo, summam serierum

$$S\Big[(\alpha+1)^p\cdot\overset{\cos.}{\underset{\sin.}{\cdot}}(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}\Big],$$

aeque ac, multiplicatis singulis aequationibus quantitate z, et postea demum iis secundum variabilem z differentiatis, serierum

$$S\Big[(\alpha+1)^p\cdot\overset{\cos.}{\underset{\sin.}{\cdot}}\alpha x\cdot z^{\alpha}\Big]$$

summam, uti jam (§§. 11. 13) eas invenimus.

4) Integrationis successivae ope ex iisdem aequationibus (⊙ et ☾ n. 3) etiam summa serierum

$$S\left[\frac{1}{\alpha+1}\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right],\quad S\left[\frac{1}{(\alpha+1^{2})}\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right],\quad S\left[\frac{1}{(\alpha+1)^{p}}\cdot\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\,\alpha x\cdot z^{\alpha}\right]$$

nec non harum

$$S\left[\frac{1}{(\alpha+1)^{p}}\cdot\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}\,(\alpha+1)\,x\cdot z^{\alpha}\right]$$

summa evadet; ceterum integratio ipsa vel secundum variabilem x, vel secundum variabilem z institui potest.

Sumtis vero integralibus a $z=0$ usque ad $z=1$, earundem serierum summa prodibit, posito $z=1$. Nec difficile erit exsequenda prior integratio, quum sequentes vero vix calculo finito subjicere possis.

§. 14. Corollarium.

Aequationem (XXI. §. 12) integrando secundum variabilem z, evadet:

XXXII. $$S\left[\frac{\sin.(\alpha+1)x}{\alpha+1}z^{\alpha+1}\right]=\text{arc. tg.}\left(\frac{z\cdot\sin.x}{1-z\cdot\cos.x}\right)+\text{const.}$$

Aequatione vero (XX. §. 12) integrata, prodibit:

XXXIII. $$S\left[\frac{\cos.(\alpha+1)x}{\alpha+1}z^{\alpha+1}\right]=\log.\frac{1}{\sqrt{1-2z\cdot\cos.x+z^{2}}}+\text{const.}$$

Atque sumtis integralibus a $z=0$ usque ad $z=1$, sequitur esse:

XXXIV. $$S\left[\frac{\sin.(\alpha+1)x}{\alpha+1}\right]=\text{arc. tg.}\left(\frac{\sin.x}{1-\cos.x}\right)=\text{arc. cotg.}\frac{1-\cos.x}{\sin.x},$$

XXXV. $$S\left[\frac{\cos.(\alpha+1)x}{\alpha+1}\right]=\log.\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos.x)}}=\log.\frac{1}{2\sin.\frac{1}{2}x},$$

quae formulae etiam ex nota illa aequatione

$$-\log.(1-z)=S\cdot\left[\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

prodibunt, modo $e^{x\sqrt{-1}}z$ et $e^{-x\sqrt{-1}}z$ loco z ponantur, et aequationes prodeuntes vel addantur vel subtrahantur.

Scholion. Nec loco arc. cotg. $\left(\frac{1-\cos.x}{\sin.x}\right)$ valorem $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x$ ponamus, quia haec expressio infinitas alios adhuc valores habet, hic non omittentes, si formula semper valente gaudere volumus.

§. 15. Corollarium.

Posito $z = 1$ in formulis (XVI. et XXIII. §. 12) sequitur esse

XXXVI. $S[\cos.\ \alpha x] = \frac{1-\cos.\ x}{2(1-\cos.\ x)}$, igitur $= \frac{1}{2}$, nisi $\cos.\ x = 1$;

XXXVII. $S[\sin.\ \alpha x] = \frac{\sin.\ x}{2(1-\cos.\ x)}$, igitur $= \frac{1}{2}\,\text{cotg.}\ \frac{1}{2}x$, nisi $\cos.\ x = 1$;

XXXVIII. $S[(-1)^{\alpha}\cos.\ \alpha x] = \frac{1+\cos.\ x}{2(1+\cos.\ x)}$, igitur $= \frac{1}{2}$, nisi $\cos.\ x = -1$;

XXXIX. $S[(-1)^{\alpha}\sin.\ \alpha x] = -\frac{\sin.\ x}{2(1+\cos.\ x)}$, igit. $= -\frac{1}{2}\,\text{tg.}\ \frac{1}{2}x$, nisi $\cos.\ x = -1$;

XXXX. $S[\cos.(\alpha+1)x] = -\frac{1-\cos.\ x}{2(1-\cos.\ x)}$, igitur $= -\frac{1}{2}$, nisi $\cos.\ x = 1$;

XXXXI. $S[\sin.(\alpha+1)x] = \frac{\sin.\ x}{2(1-\cos.\ x)}$, igitur $= \frac{1}{2}\,\text{cotg.}\ \frac{1}{2}x$, nisi $\cos.\ x = 1$;

XXXXII. $S[(-1)^{\alpha}\cos.(\alpha+1)x] = \frac{1+\cos.\ x}{2(1+\cos.\ x)}$, igitur $= \frac{1}{2}$, nisi $\cos.\ x = -1$;

XXXXIII. $S[(-1)^{\alpha}\sin.(\alpha+1)x] = \frac{\sin.\ x}{2(1+\cos.\ x)}$, igit. $= \frac{1}{2}\,\text{tg.}\ \frac{1}{2}x$, nisi $\cos.\ x = -1$.

Antequam vero hisce formulis utaris, inquirendum tibi erit, an series ipsae convergant (Reg. I. §. 6).

Quod quidem ut perficiamus, seriei finitae

$$\cos.\ x + \cos.\ 2x + \cos.\ 3x + \cdots + \cos.\ nx \quad \text{vel} \quad \underset{\alpha+\beta=n-1}{S}.[\cos.(\alpha+1)x]$$

summam exhibeamus, eamque $= -\frac{1}{2}\left(1 - \cos.\ nx - \sin.\ nx\,\frac{\sin.\ x}{1-\cos.\ x}\right)$ invenimus. Et quia haec summa, si loco n numerus sit substitutus infinite magnus, semper finitum habebit valorem, ($\cos.\ nx$ et $\sin.\ nx$ intra limites $+1$ et -1 manentibus, modo $\sin.\ nx \cdot \frac{\sin.\ x}{1-\cos.\ x}$ non sit infinitus) series *infinita* $S \cdot [\cos.\ (\alpha+1)x]$ pro omnibus valoribus ipsius x convergat necesse est, iis tamen exceptis, qui $\sin.\ nx \cdot \frac{\sin.\ x}{1-\cos.\ x} = \infty$ reddunt. Aequationibus (XXXVI et XXXX.) igitur omnibus in casibus uti possumus, iis exclusis, quibus $x = \pm 2q\pi$, quum q numerus sit integer positivus et arbitrarius.

Eodem modo invenimus summam seriei finitae

$$\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\cdots \text{vel}\, \underset{\alpha+\beta=n-1}{S}\cdot[\sin.(\alpha+1)x]=\tfrac{1}{2}\left(\sin.nx+\frac{\sin.x}{1-\cos.x}(1-\cos.nx)\right);$$

et quia haec summa pro $n=\infty$ non infinite est magna series infinita pro omnibus valoribus ipsius x converget, aequationes (XXXVII. et XXXXI.) igitur pro omnibus ipsius x valoribus valeant necesse est.

In genere eruitur

$$1)\quad S\left[\begin{matrix}\cos.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}\\ \alpha+\beta=n-1\end{matrix}\right]=\frac{\cos.x-z-z^{n}\cdot\cos.(n+1)x+z^{n+1}\cdot\cos.nz}{1-2z\cdot\cos.x+z^{2}}$$

$$2)\quad S\left[\begin{matrix}\sin.(\alpha+1)x\cdot z^{\alpha}\\ \alpha+\beta=n-1\end{matrix}\right]=\frac{\sin.x-z^{n}\sin.(n+1)x+z^{n+1}\sin.nx}{1-2z\cdot\cos.x+z^{2}}.$$

Atque posito $z=-1$ clarum fit, esse:

$$3)\quad S\left[\begin{matrix}(-1)^{\alpha}\cos.(\alpha+1)x\\ \alpha+\beta=n-1\end{matrix}\right]=\tfrac{1}{2}\left[1+(-1)^{n-1}\cos.nx+(-1)^{n}\frac{\sin.x\cdot\sin.nx}{1+\cos.x}\right],$$

$$4)\quad S\left[\begin{matrix}(-1)^{\alpha}\sin.(\alpha+1)x\\ \alpha+\beta=n-1\end{matrix}\right]=\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin.x+(-1)^{n-1}[\sin.(n+1)x+\sin.nx]}{1+\cos.x}$$

Quum vero his summis ad dextram sitis pro $n=\infty$ non sit valor infinite magnus, iis ipsius x valoribus forsan exceptis, quibus $\cos.x=-1$ ergo $x=\pm(2q+1)\pi$, aequationibus (XXXXII et XXXXIII.) etiam omnibus casibus, exceptis excipiendis, uti possumus.

Scholion. Loco $\frac{\sin.x}{1-\cos.x}$ poni poterit $\frac{\sin.\frac{1}{2}x\cdot\cos.\frac{1}{2}x}{\sin.^{2}\frac{1}{2}x}$, postea vero $\text{cotg}.\frac{1}{2}x$, iis tamen valoribus ipsius x exceptis, quibus $\sin.\frac{1}{2}x=0$, quia expressio prior tunc formam indefinitam $\frac{0}{0}$ assequitur, quum tamen $\text{cotg}.\frac{1}{2}x=\infty$ evadat. Idem de expressione $\frac{\sin.x}{1+\cos.x}$ monere non superfluum videtur.

§. 16. Problema. V.

Proponamus nunc invenire summam seriei

$$S\left[\frac{(-1)^{\alpha}\sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right]$$

i. e. seriei

$$\frac{\sin. x}{1^{2n+1}} - \frac{\sin. 2x}{2^{2n+1}} - \frac{\sin. 3x}{3^{2n+1}} - \frac{\sin. 4x}{4^{2n+1}} + \dots \text{ in inf.}$$

ubi n numerum designat integrum positivum, methodo directa, ita ut illa integratione (Schol. n. 4. §. 13) non sit opus.

Solutio. I. Notum est esse:

$$1) \qquad \sin. (p+1)\, x = S\left[\frac{(-1)^{\beta} \cdot (p+1)^{2\beta+1} \cdot x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right];$$

quo igitur valore substituto prodibit:

$$2) \quad S\left[(-1)^{\alpha} \cdot \frac{\sin. (\alpha+1)\, x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right] = S\left[(-1)^{\alpha} (\alpha+1)^{2(\beta-n)} (-1)^{\beta} \cdot \frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right].$$

Quia vero secundum (§. 10) $S[(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2(\beta-n)}] = 0$ si $\beta > n$, $= \frac{1}{2}$ vero, si $\beta = n$, habebimus, posito $\beta + \gamma = n - 1$,

$$3) \; S\left[(-1)^{\alpha} \cdot \frac{\sin. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right] = S \cdot \left[(-1)^{\alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)^{2(n-\beta)}} (-1)^{\beta} \cdot \frac{x^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!}\right] + (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2},$$

ubi series ad dextram n habet terminos et cujusque termini coëfficiens series quidem est infinita, sed ex illis, quae *reciprocae* dicuntur et quarum summa nota jam habetur.

Solutio. II. Ponendo 1) $S\left[\frac{\sin. (\alpha+1)z}{(\alpha+1)^{2n+1}} \cdot z^{\alpha}\right] = P$, erit

$$2) \; \frac{d^{4r+1}P}{dz^{4r+1}} = + S\left[\frac{\cos. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n-4r}} z^{\alpha}\right] \text{ et pro } x = 0, = + S\left[\frac{z^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2n-4r}}\right],$$

$$3) \qquad \frac{d^{4r+2}P}{dx^{4r+2}} = - S\left[\frac{\sin. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n-4r-1}} z^{\alpha}\right] \text{ et pro } x = 0, = 0,$$

$$4) \; \frac{d^{4r+3}P}{dx^{4r+3}} = - S\left[\frac{\cos. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n-4r-2}} z^{\alpha}\right] \text{et pro } x = 0, = - S\left[\frac{z^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2n-4r-2}}\right],$$

$$5) \qquad \frac{d^{4r+4}P}{dx^{4r+4}} = + S\left[\frac{\sin. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n-4r-3}} z^{\alpha}\right] \text{ et pro } x = 0, = 0.$$

Porro

$$6) \frac{d^{2n-1}P}{dx^{2n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot S\left[\frac{\cos. (\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2}} z^{\alpha}\right] \text{et pro } x = 0, = (-1)^{n-1} \cdot S\left[\frac{z^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2}}\right]$$

$$7) \quad \frac{d^{2n}P}{dx^{2n}}=(-1)^{n}\cdot S\left[\frac{\sin.(\alpha+1)x}{\alpha+1}z^{a}\right] \text{ et pro } x=0,\ =0,$$

$$8) \quad \frac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}}=(-1)^{n}\cdot S\left[\cos.(\alpha+1)z^{a}\right] \text{ et pro } x=0,\ =(-1)^{n}\cdot\frac{1}{1-z},$$

$$9) \quad \frac{d^{2n+2}P}{dx^{2n+2}}=(-1)^{n+1}\cdot S\left[(\alpha+1)\sin.(\alpha+1)x\cdot z^{a}\right]$$

$$10) \frac{d^{2n+2r+1}P}{dx^{2n+2r+1}}=(-1)^{n+r}\cdot S\left[(\alpha+1)^{2r}\cos.(\alpha+1)x\cdot z^{a}\right] \text{et pro } x=0, =(-1)^{n+r}\cdot S\big[(\alpha+1)^{2r}z^{a}$$

Igitur, ob $P=(P)_{0}+\left(\frac{dP}{dx}\right)_{0}\cdot\frac{x}{1}+\left(\frac{d^{2}P}{dx^{2}}\right)_{0}\cdot\frac{x^{2}}{2!}+$ etc. etc. etc.

$$11) S\left[\frac{\sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}z^{a}\right]=x\cdot S\left[\frac{z^{a}}{(\alpha+1)^{2n}}\right]-\frac{x^{3}}{3!}\cdot S\left[\frac{z^{a}}{(\alpha+1)^{2n-2}}\right]+\frac{x^{5}}{5!}\cdot S\left[\frac{z^{a}}{(\alpha+1)^{2n-4}}\right],$$
$$-\cdots\cdots+(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{1-z}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}S\left[(\alpha+1)^{2}z^{a}\right]$$
$$+(-1)^{n}\frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!}\cdot S\left[(\alpha+1)^{4}z^{4}\right]+\text{ etc. etc. etc. in inf.}$$

Quoniam vero -1 loco z posito, seriei ad dextram termini posteriores omnes evanescunt, ope aequationis (§. 10), erit pro $z=-1$

$$\text{XXXXIV.} \quad S\left[(-1^{a}\frac{\sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right]=x\cdot S\left[\frac{(-1)^{a}}{(\alpha+1)^{2n}}\right]-\frac{x^{3}}{3!}\cdot S\left[\frac{(-1)^{a}}{(\alpha+1)^{2n-2}}\right]$$
$$+\frac{x^{5}}{5!}\cdot S\left[\frac{(-1)^{a}}{(\alpha+1)^{2n-4}}\right]-\cdots\cdot+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}S\left[\frac{(-1)^{a}}{(\alpha+1)^{2}}\right]$$
$$+(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}, \text{ uti in (sol. I. 3) jam invenimus.}$$

Scholion. Quoniam vero hic formulam (§. 10) adhibuimus ambabus in solutionibus, jure dubitandum erit, an, quae invenimus, uno tantum casu valeant, eoque minus ista summa pro omnibus ipsius x valoribus vera existimanda.

§. 16. Regula. III.

In omnibus ejusmodi casibus, ubi series sunt dictae semi-convergentes, ut illa, quae ad dextram aequationis (II. §. 15) prodit posito $z=-1$, illo Lagrangii theoremate cum maximo commodo utaris, scilicet:

$$(\odot)\cdots f(x+k)=fx+\frac{dfx}{dx}\cdot k+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2!}+\cdots\cdot+\frac{d^{q-1}fx}{dx^{q-1}}\cdot\frac{k^{q-1}}{(q-1)!}$$
$$+\frac{d^qf(x+k')}{dx^q}\cdot\frac{k^q}{q!},$$

si k' intra limites 0 et k cadit, et Coëfficiens $\frac{d^qf(x+k')}{dx^q}$ a $k'=0$ usque ad $k'=k$ nec signum mutat, nec in infinitum abit.

§. 17. Corollarium.

Hanc regulam ad casum nostrum adhibendo, P loco fx, 0 loco x, x loco k, et $2n+2$ loco q ponendo, orietur aequatio (§. 15. n. 11) jam inventa, sed tantum usque ad terminum $(-1)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{1-z}$; omnium reliquorum vero terminorum loco habebis nunc hunc unum

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot S\left[(\alpha+1)\sin.(\alpha+1)x'\cdot z^\alpha\right]$$

vel secundum (XXXI. Schol. §. 13)

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{\sin.x'(1-z^2)}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2}\cdots\cdot(\text{⛢}),$$

modo x' sit valor intra 0 et x situs, atque $\frac{\sin.x'(1-z^2)}{(1-2z\cos.x'+z^2)^2}$ ab $x'=0$ usque ad $x'=x$ nec signum mutet, nec in infinitum abeat.

Jam vero signum quantitatis $\frac{\sin.x'(1-z^2)}{(1-2z\cdot\cos.x+z^2)^2}$ pro omnibus valoribus quantitatis z intra limites $+1$ et -1 sitis, solummodo a signo $\sin.x'$ dependet, igitur idem manebit ab $x=0$ usque ad $x=\pi$. *Aequatio* (XXXXIV. §. 15) *itaque semper valebit ab* $x=0$ *usque ad* $x=\pi$; *sed non amplius valere debet, si loco* x *numerus numero* π *major, ponatur.*

Scholion. In Lagrangii formula ($\odot$ §. 15) $q=2n+2$ assumsimus. Si vero $q=2n+1$ ponamus evadet formula (§. 15. n. 11), omissis tamen terminis $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{1-z}$ omnibusque reliquis, quorum loco hunc unum tantum habebis

$$(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot S \cdot \left[\cos.(\alpha+1)x' \cdot z^{\alpha}\right] = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\cos.\ x' - z}{1 - 2z \cdot \cos. x' + z^2},$$

modo x' situs sit intra limites 0 et x, atque $\frac{\cos.\ x' - z}{1 - 2z \cdot \cos. x' + z^2}$ ab $x' = 0$ usque ad $x' = x$ nec signum mutet, nec in infinitum abeat. — Posito $z = -1$, numerator expressionis $\frac{\cos.\ x' - z}{1 - 2z \cos. x' + z^2}$ in $1 + \cos.\ x'$ abit, quum denominator sit $= 2\,(1 + \cos. x')$, et quia quotiens ipse, vel $S\,[\cos.\,(\alpha+1)\,x'\,(-1)^{\alpha}]$ pro $x' = \pi$ in infinitum abit, iterum formulam (XXXXIV. §. 15) ab $x = 0$ usque ad $x = \pi$ veram esse elucet, sed non amplius locum habere, si loco x numerus numero π major ponatur.

§. 18. Corollarium.

Quodsi vero eruere velis ejusdem seriei $S\left[\frac{(-1)^{\alpha} \sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right]$ summam, pro valoribus quantitatis x, numero π majoribus, adhibens semper Lagrangii theorema (⊙ §. 16) P loco fx, et π, 2π, 3π, 4π, etc. etc. loco x, et $x - \pi$, $x - 2\pi$, $x - 3\pi$, $x - 4\pi$, etc. etc. loco k ponendo. Et si recte inquirere pergas invenies: 1) seriem datam divergere pro omnibus ipsius x valoribus intra $(2q+1)\pi$ et $(2q+2)\pi$ sitis, his vero casibus summam hujus alterius seriei $S\left[\frac{\sin.(\alpha+1)x}{(\alpha+1)^{2n+1}}\right]$ erui; 2) illius seriei summam inveniri toties, quoties x situs sit intra $2q\pi$ et $(2q+1)\pi$, quum haec posterior series hic casibus divergat nec summam habeat.

§. 19. Corollarium.

Posito in formula (XXXXIV. §. 15) ab $x = 0$ usque ad $x = \pi$ valente, π loco x, prodit

$$0 = \pi \cdot S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2n}}\right] - \frac{\pi^3}{3!} S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2n-2}}\right] + \frac{\pi^5}{5!} \cdot S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{2n-4}}\right] - \text{etc. etc.}$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^2}\right] + (-1)^n \cdot \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \tfrac{1}{2}$$

et secundum hanc formulam, paulatim 1, 2, 3, 4, 5, etc. etc. loco n ponendo, summas serierum reciprocarum $S.\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^2}\right]$, $S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^4}\right]$, $S\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha+1)^6}\right]$, etc. etc. invenies, uti Eulerus jam eas exhibuit.

Scholion. Quibus inquisitionibus continuatis permulta adhuc haud parvi momenti erues, de quibus forsan alio tempore uberius loqui licebit. Ut unum tantum leviter adhuc attingam liceat observare, easdem summas, quas in (§§. 15 et 18) exhibuimus, etiam secundum (§. 13. Schol. n. 4) integrationis iteratae ope indicari posse. Quibus diversa methodo inventis inter se comparatis, permulta integralia definita, serierum reciprocarum ope expressa habebis.

OBSERVATIONS
SUR LES SALINES
DE
LA NOUVELLE RUSSIE,

PAR

M. HAÜY,

ANCIEN OFFICIER DU CORPS DES VOIES DE COMMUNICATION.

(Lues à l'Académie le 13 Août 1828.)

La Nouvelle Russie, abondamment pourvue des produits de son sol, paraît posséder peu de richesses minérales; mais en revanche, dans toute cette partie de l'Empire, le sel commun est répandu avec profusion en différens lieux à la surface de la terre, et n'exige, pour être exploité, que la peine de le déblayer à la pelle ou à la pioche.

Avant que d'examiner les salines en particulier, jetons un coup d'oeil rapide sur la configuration du terrain qui compose les steppes de la Russie méridionale. Tout le pays compris depuis le Volga jusqu'au Dniestre, en se dirigeant à peu près entre le 46ème et le 49ème parallèles, offre de vastes plaines ou steppes, dont les pentes longues et douces ne possèdent d'autres mouvements sensibles qu'un petit nombre de ravins ou de rivières de peu d'importance, si l'on en excepte pourtant les grandes vallées du Dnièpre et du Boug qui, de concert avec les deux premiers fleuves, reçoivent les versans secondaires de ces immenses plaines. A partir de l'embouchure dn Don jusqu'à celle du Dniestre, en passant par l'isthme de Pérécop, la hauteur du plateau est fort peu variable et se soutient aux environs de 110 pieds, du niveau de la mer. Les écarts les plus forts, soit en plus soit en moins, vont rarement au-delà de 20 pieds. Mais depuis la rive gauche du Dniepre près de son embouchure, jusqu'aux environs de Jenitchki, le terrain presque plat, est au contraire très bas, et paraît formé d'alluvions.

Si en partant de la côte septentrionale de la mer Noire et de la mer d'Asof, on se dirige du côté du nord, on s'élève lentement en suivant le versant principal, et l'on rencontre un peu vers l'occident les cataractes, ou plutôt, les rapides du Dnièpre, du Boug et du Dniestre, qui, situés à peu près sur le même parallèlle, à 48½° de latitude, paraissent formés par un embranchement de granit souterrain partant des Crapaks, et dont un point culminant est situé non loin d'Olgopol.

Enfin, en rétrogradant vers le sud, nous retrouvons encore les steppes, jusqu'au revers de la chaîne de montagnes qui borde la côte méridionale de la Crimée, et jusqu'au versant septentrional des monts du Caucase. Seulement ici, en partant du point de partage pour se rendre vers la mer Caspienne, les pentes, en général, paraissent beaucoup plus régulières, les ravins sont plus rares, et la surface du sol qui possède tous les caractères d'une plage récemment abandonnée par les eaux, vient se confondre par une pente insensible avec celles de la mer Caspienne. Sans nous étendre davantage sur ce premier ensemble, passons à l'examen des différentes espèces de salines, des phénomènes auxquels on peut attribuer leur formation, de leur exploitation, et des causes qui les font disparaître de la surface du globe.

Une grande partie de la steppe située entre la rive droite du Volga et la rive gauche du Terek offre une terre sablonneuse mêlée de sel, et si peu élevée au-dessus de l'horizon de la mer Caspienne, que les vents du sud, étant prolongés, font refluer l'eau dans quelques endroits, jusqu'à deux verstes du bord et souvent plus. Aussi toute la steppe, jusqu'à trois et quatre milles de la mer, ne se trouve qu'à quelques pouces au-dessus du niveau de l'eau. Cette grande proximité, jointe à ce que l'évaporation est beaucoup plus grande que la quantité moyenne d'eau qui tombe dans un temps donné, conduit à penser que les pluies ne sauraient opérer le lavage de la surface du terrain qui contient beaucoup de sel. Au milieu de la ville d'Astrakhan, dans les parties les plus basses, lorsqu'après une petite pluie le soleil vient à paraître, le sable dont le sol est composé, se couvre rapidement d'une efflorescence semblable à la gelée blanche, et qui disparaît bientôt par l'effet des vents, etc. Les steppes des Tatares nomades offrent des phénomènes analogues, produits par la rosée sur le poil des chameaux, ainsi que sur les feutres dont les kibitkas des habitans sont couverts. Cela a fait supposer à un célèbre naturaliste que, dans cette contrée abondante en sel, la rosée même en contient quelques particules.

Sans chercher à prouver que cela ne peut être, il me semble pourtant que la quantité de sel qui se cristallise sur une surface de nature donnée, celle d'un feutre par exemple, est beaucoup trop considérable pour pouvoir être attribuée au précipité qu'occasionne le refroidissement des corps pendant la nuit. D'ailleurs, ces efflorescences qu'on remarque quelquefois le matin pendant l'été, peuvent s'expliquer d'une manière plus probable, en remarquant que le vent, qui règne souvent dans les steppes, couvre de poussière tout ce qui sy trouve; cette poussière, chargée de sel, est déposée dans le poil des feutres, dans celui des chameaux, etc. de sorte que toutes les parties où le sel s'est trouvé liquéfié par la rosée, sont aussi celles où la cristallisation se manifeste.

Les habitans des steppes dont nous nous occupons, et principalement les Tatares nomades, extraient le sel par lavage d'une manière particulière qui mérite d'être décrite. Dans un espace de 15 à 20 sagènes de large, et d'une longueur double ou triple, on enlève la terre sur une profondeur de six à huit pouces environ, assez peu pourtant pour ne pas arriver jusqu'à l'eau, et on la rejette tout autour de l'emplacement déblayé, pour en former une espèce de bord ou levée. Ensuite on dresse autant que possible cette aire, qu'on pilonne bien, pour la rendre aussi compacte qu'on peut, et s'opposer ainsi aux filtrations qui pourraient avoir lieu. Enfin, sur une surface de moitié environ, et choisie au milieu du rectangle préparé, on élève un tas de terre auquel on donne la forme d'un prisme triangulaire couché, dont les deux extrèmités sont tronquées en biais, comme serait à peu près un toit de maison, ou une pile de boulets: la hauteur du faîte va quelquefois jusqu'à deux sagènes et même plus. Dans cet état de choses, la saline est achevée, et la nature se charge du reste. A chaque pluie, le sel de la surface est dissous, et gagne avec l'eau la partie inférieure du tas, pour s'arrêter à la surface de l'aire sur laquelle, après un certain laps de tems, elle ruisselle et dépose son sel par l'effet de l'évaporation. Quand on juge qu'une partie de la terre est dépouillée de sel, on l'enlève avec précaution pour la jeter hors du bassin, afin d'exposer à de nouvelles pluies la partie du tas encore riche. Chaque fois qu'on le peut, on ramasse les cristaux, qui du reste contiennent beaucoup de terre, et n'offrent qu'une formation confuse. Il se passe souvent deux ans et plus, avant qu'un tas soit complètement lavé. Quelquefois, ce premier sel est dissous de nouveau dans une espèce de cuve et évaporé au soleil; mais cela est rarement pratiqué.

Pour saler un liquide quelconque, on en prend une petite portion dans un vase, on y met le sel nécessaire au tout, et après l'avoir fait fondre, on décante: c'est en mêlant cette partie avec le reste du liquide, qu'on parvient à le saler proprement. Quand c'est de l'eau qu'on veut saler, on se contente le plus souvent d'y mêler de la terre qu'on laisse reposer, et ensuite par décantation, on obtient l'eau salée suffisamment propre.

Mais tous ces moyens, qui n'appartiennent qu'à une industrie domestique, sont incapables de donner naissance au plus petit commerce, et n'ont vraiment de remarquable que cette empreinte de paresse et d'insouciance qui caractérise si bien les peuples errans.

Dans les steppes des Tatares nomades, l'eau est saumâtre, et complètement insupportable pour quiconque n'en a pas fait de longs et pénibles essais.

Nous ne disons rien des amas d'eau salée qu'on rencontre çà et là dans toute cette contrée.

Les salines qui se trouvent près de Pérécop, et qui portent ce nom, sont très riches; leur exploitation, qui a lieu à la fin de chaque été, procure un commerce immense à une grande partie des habitans du midi de la Russie.

En quittant l'isthme de Pérécop, élevé de cinquante à soixante pieds au-dessus du niveau de la mer Noire, pour s'avancer vers le sud-est, on descend pendant dix-huit verstes à peu près, suivant une pente légère, pour remonter ensuite. C'est dans ce bas-fond, tout composé de sable sur une grande étendue, que se trouvent les lacs salés: ils sont très peu éloignés des côtes, et leur niveau moyen paraît être le même que celui des eaux de la mer Noire et du Sivache; il est cependant probable que ce dernier est un peu plus haut que le Pont-Euxin.

Une évaporation annuelle, beaucoup plus considérable que la quantité d'eau pluviale, jointe à ce que les sables d'égale grosseur, dont le pays est composé, permettent dans tous les sens le libre passage de l'eau, paraissent les principales causes auxquelles on doit la formation de ces salines. Nous devons encore ajouter que ces lacs ne reçoivent qu'un petit nombre de ravins: les grands versans conduisent directement les eaux vers la mer Noire et vers le Sivache.

On conçoit qu'une forte pluie, même très prolongée, ne peut presque jamais ruisseler à la surface du sol, d'ailleurs presque horizontal: l'eau le pénètre et s'enfonce aussitôt qu'elle est tombée. Il résulte seulement de là, qu'à mesure qu'on s'éloigne de la côte, la surface des eaux souterraines va en s'élevant, et que sa pente est d'autant plus rapide que les obstacles qui s'opposent à son mouvement sont plus multipliés; mais cet état n'est pas fixe; au contraire, les eaux souterraines tendent constamment à le mettre de niveau avec les deux mers; après de longues sécheresses, la surface des lacs peut se trouver dans le même plan horizontal, et même descendre plus bas que l'eau qui borde la côte. C'est effectivement ce qui a lieu. Le niveau, d'abord au plus haut, surtout après de grandes neiges, descend petit à petit par l'effet de deux causes différentes; l'une est l'évaporation, l'autre est due à la facilité avec laquelle l'eau s'infiltre et se fraie une voie au travers des masses de sable, pour gagner la surface de la mer. Nous devons faire attention que les filtrations diminuent à mesure que le niveau descend, de même que la quantité d'eau évaporée dans un tems donné, pour une même température, puisque cette quantité est une fonction de la surface soumise à l'évaporation, de la vitesse et de la direction des vents, ainsi que de la température de l'atmosphère. Mais sitôt après le printems, cette dernière croît avec tant de rapidité dans les steppes du midi, que malgré la réduction considérable de la surface des lacs, la quantité d'eau évaporée dans un tems donné, va sensiblement en augmentant. C'est alors que les filtrations, qui d'abord avaient leur mouvement vers les côtes, prennent une direction rétrograde, et l'eau de la mer se rend au travers des sables jusque dans ces bassins naturels de graduation, où elle est soumise à une évaporation rapide, pendant laquelle le niveau continuant de descendre, l'eau en abandonnant la plage, dépose une fonte de cristaux, qu'on ramasse vers la fin de chaque été. Telle est une de ces sources inépuisables de richesse que possède la Russie, dans la presqu'île de la Crimée. D'autres lacs salés sont disséminés sur toute la péninsule; mais ils produisent beaucoup moins que ceux de Pérécop. On trouve en outre une prodigieuse quantité de sulfate de soude, dont l'extraction, tout-à-fait négligée, pourrait être une source de grands revenus.

Passons actuellement vers la partie occidentale de la Nouvelle Russie, où nous allons voir des salines ou lacs salés de formation récente.

Aux endroits où les ravins principaux viennent déboucher dans la mer, il s'est formé de vastes vallées remplies d'eau, où se jettent celles des différens versans qui terminent la surface générale du terrain. Ces espèces de golfes étroits, qui s'étendent au loin dans les terres, sont appelés *limans*, qui en Tatare signifie *port*; mais par extension, on a fini par nommer ainsi, dans la Russie méridionale, toute espèce d'amas d'eau contenu dans une vallée, et voisin de la mer, quand même il en serait séparé par une langue de terre. Entre le grand liman qui reçoit le Dnièpre et le Boug, et celui où se jette le Dniestre, on en compte sept principaux, très remarquables par leur étendue: leurs noms sont, en partant de l'Orient: *Bérézane*, *Téligoul*, *le grand Hadjilik*, *le petit Hadjilik*, *le petit Hadji-bey*, *le grand Hadji-bey*, situés au pied d'Odessa, et enfin le *Liman Sec*, qui se trouve entre la ville et le Dniestre. Chacun d'eux offre des circonstances toutes particulières que nous aurons occasion d'examiner séparément, et qui font voir de la manière la plus frappante quelle est la marche de la formation de ces espèces de salines.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, l'aspect de la steppe est celui d'un terrain à peine sillonné par les eaux, terminé par des pentes très douces, et dont les Thalwegs ne sont pour ainsi dire qu'indiqués, tandis que les faîtes, à leur tour, offrent des surfaces larges de quelques verstes et presque horizontales. Un examen attentif de cette disposition de la surface du terrain fait voir facilement qu'à chaque pluie, l'eau ne peut couler qu'avec beaucoup de lenteur, et seulement après que la terre est humectée avec excès. De là il résulte qu'il n'arrive dans les limans qu'une très petite partie des eaux pluviales: la végétation, très active dans les contrées du midi, en absorbe beaucoup; une partie entre en terre, et l'évaporation considérable qui règne en été emporte le reste. Des relevés d'observations météorologiques, faites par Mr. *Challaye* consul de France à Odessa, m'ont donné 324 millimètres pour la hauteur d'eau moyenne déduite de 5 années, et j'ai trouvé par des observations approximatives, que l'évaporation est environ quatre fois aussi considérable. Ainsi en supposant que les versans d'un même liman soient formés d'une matière capable de lui transmettre toute l'eau qu'ils reçoivent, il faudrait qu'ils fussent quatre fois aussi étendus que le liman pour l'alimenter de toute l'eau qu'il perd par l'évaporation; mais malgré l'immense surface des versans, la quantité d'eau qui arrive dans la plupart de ces espèces de golfes, est de beaucoup inférieure à celle que l'évaporation leur enlève, et même elle va en diminuant assez sensiblement chaque année; d'où il suit, qu'en général, c'est l'eau de la mer qui doit entrer dans le liman, à moins que des sources ou des versans plus favorablement disposés ne procurent un accroissement d'eau capable de remplacer ce qui se dissipe en vapeur. Des sept limans dont nous avons parlé, il n'y a que celui de Bérézane qui soit dans ce cas; les autres offrent des variétés plus ou moins sensibles. Passons actuellement au rôle que joue la mer, et qui est fort important.

Les sables abondans dont les côtes sont bordées, suivent leurs sinuosités par l'effet des vents, et forment des barres qui traversent les embouchures des limans. Mais ces amas de sable s'arrêtent toujours à des points qui réglent l'ouverture de la passe, suivant le produit moyen des eaux qui doivent en sortir, de sorte que si toute la quantité d'eau qui se rend dans un liman, n'est pas plus grande que celle que l'évaporation enlève, il peut arriver que la passe se forme et que le liman soit séparé de la mer par une langue de sable. C'est effectivement ce qu'on remarque dans ce cas, avec quelques circonstances particulières dépendantes des localités.

Le liman du Dnièpre, celui de Bérézane, recevant le petit ruisseau de ce nom, et le liman du Dniestre, nous offrent quelques exemples de passes rétrécies, dont le débouché est réglé par les eaux courantes. Tout au contraire, les autres limans nous font voir des bassins fermés par des traverses. Le petit Hadjibey et le liman Sec paraissent être barrés depuis fort long-tems, tandis que ceux de Tétigoul, du grand Hadjilik, du petit Hadjilik, ainsi que le liman du grand Hadjibey, étaient encore ouverts. il y a douze ans. Cette fermeture de la barre n'a pas lieu tout d'un coup: elle se trouve au contraire alternée pendant plusieurs années. Nous allons, pour décrire ces mouvemens, suivre pas-à-pas les observations que j'ai eu occasion de faire sur les eaux du grand Hadjilik.

En 1816, la barre, ou langue de sable, était ouverte par une passe de 12 à 15 sagènes; cette langue, comme on le conçoit facilement, est terminée du côté de la mer, et du côté du liman, par deux courbes qui tournent leur convexité l'une vers l'autre. Elle peut avoir à peu près une verste et un quart de long, et à l'endroit le plus étroit, vers le milieu, où se trouvait la passe, elle a environ 85 sagènes de large. Un pont de bois, établi sur le canal, faisait partie de la grande route qui passe sur la barre. Je n'ai pu savoir au juste depuis quand la communication entre le liman et la mer, était établie; mais il y avait, au dire des gens du pays, plus d'une année qu'elle existait. En 1818, j'ai retrouvé la passe presqu'entièrement comblée par les alluvions, ce qui rendait le pont inutile; mais à la suite de la fonte des neiges de l'hiver de 1820, et après une forte tempête du Nord qui a eu lieu dans les premiers jours d'avril 1821, les sables ont été emportés avec une partie du pont par les eaux du liman, qui ont passé pardessus la barre. Ayant été envoyé pour aviser aux moyens de réparer le dommage, et rétablir la communication sur la route de poste, j'ai trouvé la largeur de la nouvelle passe de 16 sagènes, sur 8 pieds de profondeur, et l'eau de la mer, qui se précipitait dans le liman pour remplacer celle que la tempête en avait chassée, avait encore une vitesse de neuf pieds par seconde. Quatre mois après cette irruption, le chenal était de nouveau comblé par les sables, qui, entre l'embouchure du Dnièpre et celle du Dniestre, marchent sur toute la côte avec une rapidité presqu'inconcevable. Dès cette époque, la passe est restée fermée, et actuellement on ne voit plus que les traces d'un lit très peu profond, que traverse le pont reconstruit en 1821.

Cependant, il y a eu depuis, et à diverses reprises, de grandes quantités de neige, surtout pendant l'hiver qui vient de s'écouler; malgré cela, l'eau n'a pas pu reprendre assez de hauteur, pour être au niveau de celle de la mer.

Nous devons faire observer en passant, que la barre, ou langue de sable, peut augmenter en largeur d'une manière très sensible dans un petit nombre d'années; mais pour un accroissement en hauteur, s'il a lieu, ce ne peut être qu'après un tems très considérable; de sorte que dans le cours des périodes où se passent les phénomènes que nous examinons, il nous est permis de considérer ce niveau de la surface du sol comme constant.

De toute la quantité d'eau qui tombe annuellement, celle qui provient de la fonte des neiges fait monter le niveau des limans d'une manière très sensible, tandis qu'une quantité de pluie souvent plus considérable, produit moins d'effet. Cela se conçoit facilement, puisqu'au moment de la liquéfaction de la neige, l'eau coule librement sur une terre gelée, qui n'en absorbe qu'une partie presque nulle.

D'après tout ce que nous venons de voir, on comprend que puisque la rupture de la barre a lieu dans des intervalles de temps qui vont en croissant, on doit conclure qu'à la première irruption, la quantité d'eau qui arrivait dans le liman était tout au plus égale à celle que l'évaporation lui enlevait, et qu'elle va maintenant en diminuant d'année en année.

Dans les circonstances les plus ordinaires, la masse d'eau évaporée dépasse de beaucoup celle que les pluies restituent, d'où il suit que le niveau baisse constamment, une fois que la passe est fermée. Cet abaissement a lieu par oscillations: à l'automne, on a un minimum de hauteur, au printemps un maximum, et ces maxima et minima vont en diminuant à leur tour. De ces mouvemens résulte une conséquence. Le niveau moyen de la mer étant constant, pour un nombre d'années considérable, tandis que dans le bassin les eaux descendent, il en résulte que la hauteur d'eau à laquelle sont dues les filtrations, va constamment en croissant, et que celles-ci s'établissent enfin, de la mer vers le liman, en traversant la partie inférieure de la barre ou langue de sable. C'est ce qu'on remarque pendant l'été: le revers de cette barre, tourné du côté du liman, offre une foule de petits sillons recevant les eaux de la mer, que les sables laissent passer; mais ces filtrations n'ont lieu que dans l'ancien lit du chenal, puisque c'est là que le sable est le plus récemment déposé, le plus meuble, et que d'ailleurs la passe ne se trouve jamais complètement fermée: elle n'est que barrée du côté de la mer par une traverse beaucoup plus étroite que la langue principale. Ainsi l'eau de la mer entrant sans cesse dans le bassin, y abandonne son sel pour être elle-même rendue à l'atmosphère par l'effet de l'évaporation, ce qui produit à la longue un précipité, et ce qui convertit enfin en marais salans naturels ces immenses vallées remplies d'eau. En général quand le vent de mer souffle, les infiltrations sont plus fortes, en ce que le niveau de la mer s'élève un peu sur la plage, tandis que celui du liman descend, attendu qu'alors ses eaux sont chassées vers l'extrémité opposée à la barre. Le contraire a lieu quand le vent vient du côté des terres: les filtrations diminuent; elles peuvent devenir extérieures, ou enfin dans le cas d'une surabondance d'eaux pluviales, la digue peut être emportée. C'est ce que nous avons déjà vu plus haut. A mesure que l'eau salée se concentre, les différentes espèces d'animaux qui y vivent changent tour-à-tour, et peu de temps avant le maximum de densité, on ne trouve plus dans les limans qu'un petit insecte d'un rouge pâle, en si grande quantité, qu'il donne à toute la masse d'eau une teinte rose, qui disparaît enfin. Passons à quelques particularités qui tiennent à chacun des limans dont nous avons parlé.

Le liman de Téligoul, très remarquable par sa grande étendue, occupe du nord au sud une longueur d'environ soixante verstes. Sa largeur est d'à peu près cinq à six verstes, et celle de la barre qui le sépare de la mer, dans l'endroit le plus étroit est presqu'aussi forte. Jusqu'à l'année 1823, un canal tortueux d'une vingtaine de sagènes de large sur huit à dix pieds de profondeur moyenne établissait une communication entre les eaux du liman et celles de la mer Noire. C'est alors que les alluvions ont comblé une partie de cette passe, qui depuis n'a plus été ouverte, et ne sert qu'à conduire au liman les filtrations dont nous venons de parler précédemment.

Une barre de sable de plus de cinq verstes de large, n'a pas pu se former ainsi dans un court espace de temps: il paraît au contraire, que d'abord très étroite, elle occupait une position moyenne entre les deux courbes qui forment la limite actuelle; qu'à chaque forte tempête, soit du côté de la mer, soit du côté du liman, l'effet des vagues, quoique beaucoup plus faible dans celui-ci, formait une espèce de levée sur le bord de la langue de sable: les alluvions garnissaient derechef le bord de la plage, jusqu'à ce qu'une nouvelle tempête vint former une nouvelle levée.

Ce fait se vérifie en examinant toute la partie de la plaine qui forme la barre voisine de la mer. Là, elle se trouve terminée par une espèce de grève qui traverse, suivant une courbe, la vallée dans toute sa largeur. Cette grève est bordée par un monticule de sable ayant quatre à cinq sagènes de large, trois à quatre pieds de haut, et régnant sur toute la largeur de la barre. Derrière ce monticule s'en trouve un autre à peu près semblable, qui occupe une courbe équidistante de la première; il en vient une troisième, etc. Ces levées ne deviennent bientôt que de faibles irrégularités; mais j'en ai cependant compté jusqu'à dix-huit distinctement, en me plaçant sur la partie de la côte qui domine la plaine, et observant que dans les sillons qui séparent chaque levée l'une de l'autre, l'herbe, dont toute la plaine est couverte, se trouve plus touffue et par conséquent plus foncée en couleur.

Il serait fort intéressant de savoir suivant quelles périodes ces sillons sont marqués. Il m'a été impossible de rien découvrir à cet égard: seulement je pense que la levée qui borde actuellement la langue de sable, est la dernière qui puisse exister, du moins pour un laps de temps très considérable, puisqu'elle se confond avec la plage générale de la côte, en ne laissant qu'un enfoncement peu considérable vers la barre; enfoncement que les alluvions peuvent suivre, sans rencontrer la moindre cause capable de les arrêter.

Vers le bassin, on observe des sillons à peu près semblables à ceux que nous venons de décrire; mais ils sont interrompus par places; ils sont en même temps moins sensibles, probablement parce que la vague est beaucoup plus courte de ce côté, et généralement ils sont loin de posséder cette régularité remarquable qu'on rencontre sur la partie de la barre voisine de la mer. En revanche, la plage du côté du bassin, offre une singularité digne de fixer l'attention. C'est une digue de sable qui suit sa courbure dans toute la longueur de la barre. Cette digue, large de 20 à 30 sagènes à sa base, est aussi régulière que si elle eût été exécutée par la main des hommes. La surface supérieure, parfaitement de niveau, s'élève à peu près à 5 pieds du sol; elle est toute composée de débris de coquilles qui appartenaient très probablement au liman, puisque ces fragmens assez volumineux, sont à peine arrondis par l'effet du frottement. Quand le vent de nord commence à souffler avec violence, les vagues du liman, quoique faibles, amoncellent pourtant le sable sur la plage, et cela ne peut avoir lieu en général que jusqu'à une hauteur que limitent la force du vent, la profondeur de l'eau, et l'étendue de sa surface; mais si le vent se prolonge, la partie méridionale de l'eau du bassin se trouve bientôt, par l'effet du frottement de l'air, plus élevée que la partie septentrionale, et la vague est capable d'élever le sable plus haut sur la première levée. Que le même phénomène se répète de tems en tems, que par intervalles d'autres vents fassent marcher les alluvions au pied de ce commencement de digue, et nous la verrons s'élever jusqu'au point où son sommet parvenu à la plus grande hauteur qu'il peut acquérir, n'admet plus l'addition d'une nouvelle quantité de sable, soit par l'effet des vents prolongés du nord, soit par celui des eaux pluviales, soit enfin par celui de ces deux causes simultanées. Je ne prévois pas du moins d'autre moyen d'expliquer l'érection de cette digue; cela est d'ailleurs tout-à-fait conforme aux observations que j'ai pu faire à ce sujet.

Ce qu'il y a de fort remarquable, c'est que la digue n'existe que depuis que la passe est fermée. C'est alors seulement qu'elle s'est élevée, au moment où les eaux du lac ont commencé à descendre; car on doit bien faire attention que, pour un bassin très long, comme celui de Téligoul, le vent du nord peut faire monter les eaux beaucoup plus vers le sud, quand le lac ne communique pas avec la mer, que quand le vent souffle du sud et que le chenal existe.

Le liman dont nous venons de parler, est d'autant plus remarquable, qu'il paraît certain que c'est l'ancien *Axiace*, sur lequel se trouvait le riche port d'*Odessus* *).

---

*) Voyez: Изслѣдованія о мѣстоположеніи древнихъ греческихъ поселеній на берегахъ Понта Евксинскаго, между Тирасомъ и Борисѳеномъ: И. Стемпковскимъ. Санктъ-Петербургъ 1826 года.

Le liman du grand Hadjilik, d'une vingtaine de verstes de longueur, ne présente d'autres particularités que celle que nous avons examinée plus haut. Il n'a point de digue vers le nord, mais simplement une levée de deux à trois pieds qui se confond avec la surface de la barre; ceci provient sûrement de ce que le bassin n'est pas aussi vaste que celui du Téligoul, et que ses vagues n'agissent que faiblement.

Du côté de la mer, la levée est beaucoup plus sensible; cependant elle n'est suivie d'aucune saillie analogue à celles que nous avons vues précédemment. La courbe que suit la traverse de sable se confond également avec celle de la côte, ce qui peut faire présumer, ainsi que nous l'avons déjà dit, par rapport au Téligoul, que cette levée, du moins de long-temps, ne sera suivie d'aucune autre.

Des détails tout-à-fait analogues se remarquent au liman du petit Hadjilik, dont la longueur est de douze à quinze verstes, sur une largeur de trois quarts de verste. La seule particularité qu'on observe, c'est que la passe, qui s'est trouvée ouverte en 1821, n'est pas au milieu de la barre, mais tout près de la côte orientale qui borde la vallée. C'est aussi là que se trouve comme de raison, la plus petite largeur de la langue.

Pendant plusieurs années de suite, des gardes-côtes avaient ouvert un petit canal qu'ils entretenaient avec beaucoup de peine, et dans lequel ils disposaient leurs filets; mais la nature a toujours pris le dessus, en encombrant de sable l'embouchure de cette passe, et fatigués d'une lutte par trop inégale, ils ont pris le parti d'abandonner leur pêcherie. Cette année seulement, vers les premiers jours d'avril, on a essayé de creuser encore un canal, et après la grande quantité d'eau que la fonte des neiges a fournie aux limans, la communication a été établie pendant quelques jours; les vents du nord ont fait déverser le lac dans la mer, après quoi tout est rentré dans l'ordre primitif.

Les limans du petit et du grand Hadjibey débouchent dans la même vallée, et sont séparés l'un de l'autre par une portion du plateau de la steppe qui s'avance vers le sud en forme de contrefort d'une demi verste de large à son extrémité. Le premier de ces deux limans, long de 15 à 18 verstes et large de trois, distant de la mer de 4 verstes environ, paraît très anciennement privé d'une communication ouverte avec les eaux extérieures; on ne voit pas les moindres traces de la passe qui a du cependant exister. Du reste, toute la langue de sable qui est extrémement basse, surtout du côté du liman, se trouve couverte dans les crues du printemps, par l'eau qui se répand sur cette partie de la barre. Il en est de même du grand Hadjibey, long de 45 verstes et large de 3 à 4; mais ici dans les crues extraordinaires, qui n'ont lieu qu'après plusieurs années, l'eau rencontre le lit de la passe et se verse dans la mer.

Cependant, depuis 1824, je n'ai pas vu de semblables débordemens, et cette année malgré l'énorme quantité de neige, le liman n'a pas été dans le cas de déverser ses eaux. Plus tard, nous parlerons du liman Sec.

Si nous classons tous les amas d'eau que nous venons de décrire, considérés comme des lacs salés, en suivant l'ancienneté de leur formation, nous devons placer en tête le petit Hadjibey, ensuite le grand Hadjilik, le liman de Téligoul, celui du grand Hadjibey, et enfin celui du petit Hadjilik. Toutes choses égales d'ailleurs, la quantité de sel doit donc décroître à mesure que la fermeture définitive de chaque passe est plus récente. C'est en effet ce qui a lieu à peu de chose près; aussi depuis l'automne dernier, le liman du petit Hadjibey est-il converti en une riche saline. Par l'effet de l'évaporation, le sel a été précipité et a donné naissance à une croûte de plus de deux pouces d'épaisseur, qui couvre le fond du lac. Elle est composée de cristaux confus, agglomérés par l'effet d'une nouvelle concentration de la masse liquide. Le peu de profondeur du liman permet aux ouvriers de rompre ces espèces de dalles à la pelle pour en charger des chariots qui les suivent dans l'eau. C'est du moins de cette manière qu'on a travaillé l'année dernière. Cette immense saline contient à peu près 6000 sagènes cubes de sel par verste quarrée, ce qui donne environ 4,200,000 pouds pour la même surface.

Les limans du grand Hadjilik, de Téligoul, du grand Hadjibey et du petit

Hadjilik donnent quelquefois des efflorescences assez considérables; mais l'eau est encore loin du point de saturation, et l'on ne peut considérer ces cristaux que comme les précurseurs d'une vaste source de richesses qui s'ouvrira pour les générations à venir. Il semble que ces salines soient des compensations que la Providence offre aux habitans de la contrée, puisque les grandes sécheresses, si favorables à l'évaporation, ravagent ordinairement les moissons que le laboureur attend avec anxiété.

Tout ce que nous venons de dire sur la formation des lacs salés se remarque, non seulement entre l'embouchure du Dnièpre et celle du Dniestre, mais encore sur toutes les côtes de la Crimée, au-delà du détroit de Taman, et en Bessarabie. Ainsi, toutes ces salines ou limans qui se trouvent le long de ce littoral ont été des bassins ouverts communiquant avec la mer Noire; pour cela il ne s'ensuit pourtant pas que toutes les espèces de golfes ou limans qu'on rencontre le long de la côte soient destinés à devenir un jour des lacs salés. Pour faire sentir combien il serait vicieux d'admettre cette proposition, il faut remarquer les circonstances suivantes, sans lesquelles la fermeture des bassins ne saurait avoir lieu de manière à permettre l'infiltration des eaux de la mer. La nature des alluvions qui cheminent le long des côtes par l'effet des vents régnans, porte une influence majeure sur la destinée future du liman. On conçoit que pour remplir les conditions indispensables à la formation du lac salé, il faut que la marche des alluvions soit rapide, et que le sable qui les compose, soit assez gros et surtout assez égal pour favoriser les filtrations: en outre comme nous l'avons déjà fait remarquer, il est nécessaire que la quantité d'eau qui arrive dans le bassin par l'effet des pluies et des sources soit moindre que celle que l'évaporation dissipe.

Les observations de Mr. Challaye, citées plus haut, font voir que les vents régnans, partent du sud; d'où il résulte que les sables du Danube et du Dniestre sont charriés dans le golfe d'Odessa, et transportés ensuite le long de la plage septentrionale de la mer Noire.

D'un autre côté les sables du Dnièpre et du Boug sont sans cesse rejetés sur la côté, de sorte que dans la partie que nous avons examinée avec le plus d'attention, toutes les circonstances se réunissent pour combler les passes des limans. En considérant avec attention le mouvement des sables depuis l'embouchure du Danube jusqu'au détroit de Taman, nous voyons que ce n'est pas seulement à Odessa et dans ses environs que les vents régnans se dirigent du sud au nord, mais encore sur toute la côte de la Crimée. Effectivement, nous remarquons que la langue de sable qui part du cap de Taman s'étend dans le détroit, en remontant le courant, ce qui ne saurait avoir lieu que par l'effet des vents régnans. La pointe septentrionale de l'île de Tendra est dans le même cas, et tourne vers le nord; la pointe de Kinbourne offre une disposition tout-à-fait semblable.

Enfin, tout le vaste terrain qui se trouve entre Alechki, l'ancien fort de Starokolsky, et la forteresse de Kinbourne, paraît produit par les alluvions du Dnièpre et du Boug que les vents ont refoulées et refoulent encore vers le nord.

La côte méridionale de la Crimée depuis Théodosie jusqu'à Sévastopol, est une immense falaise dont le pied, disposé suivant une pente rapide vers le sud, est toute composée de masses de rochers éboulés, couvertes en partie de terre et couronnées de forêts. Aucun fleuve, aucune rivière, ne descend de cette chaîne escarpée; on remarque pourtant un grand nombre de ruisseaux; mais ils sont trop courts et trop faibles pour rouler des pierres, les réduire en fragmens, et porter du sable à la mer. Il s'ensuit que le bord de la côte n'offre que fort peu de gravier, quelques coquilles, de la vase et beaucoup de masses de rochers. On remarque en effet que les vents régnans ne portent point de sable sur la côte occidentale de la Crimée, et le port de Sévastopol paraît être à l'abri de ces invasions que nous avons remarquées sur la côte septentrionale de la mer Noire.

Sans nous étendre trop longuement sur un sujet inépuisable, voyons comment les limans, après avoir été convertis en lacs salés, disparaissent, et deviennent de vastes vallées qui, probablement un jour, seront données à l'agriculture.

Les eaux pluviales qui suivent les pentes des versans pour se rendre dans les lacs salés, entraînent avec elles une grande quantité de terre végétale qui, tout en comblant le bassin, accélère singulièrement l'évaporation. Pour bien nous rendre compte de ce qui se passe, supposons pour un instant qu'à la fin d'une année l'évaporation fasse équilibre à toute l'eau qui peut arriver dans le lac. A la fin de la même année, il est certain que toute la terre déposée devra déplacer un égal volume d'eau, et par là, faire monter un peu le niveau du liman. Quoique cet accroissement de hauteur soit insensible annuellement, il cesse de l'être en s'ajoutant à celui qui a lieu à la fin de chacune des années suivantes; et comme l'eau en s'élevant dans le lac, s'étend sur la plage, elle augmente en surface. d'où il résulte enfin, que sans que le facteur de l'évaporation augmente, la quantité d'eau réduite en vapeur croît chaque année.

Cela suppose toujours que le liman ne communique pas, par un canal, avec la mer, c'est-à-dire qu'on parte d'un moment où l'eau évaporée soit au moins égale à celle qui se rend dans le bassin par l'effet des pluies et des sources.

De ce que nous venons de voir, il résulte donc que le niveau du fond s'élève: le niveau de la surface de l'eau s'élève également, et la quantité d'eau contenue dans le liman diminue chaque année.

La mer Caspienne bordée à l'orient et au nord par des pentes très douces, est probablement dans ce cas, à moins qu'on n'admette, toutefois, que la quantité d'eau portée par les fleuves qui s'y jettent décroît à son tour, chose qui paraît très vraisemblable.

L'élévation du fond des limans fait encore croître la quantité d'eau évaporée, en ce qu'elle produit une diminution dans la hauteur d'eau, et favorise par là l'élévation de la température moyenne de la masse liquide.

A mesure que le niveau moyen de l'eau s'élève dans les bassins, les filtrations qui arrivent de la mer diminuent, et finissent par devenir nulles, dès que les eaux intérieures et extérieures sont dans le même plan horizontal; de cette diminution dans la hauteur de leau, il résulte encore que la vague devenant plus courte et plus faible, n'est plus en état d'endommager la barre. Enfin l'eau continuant de s'élever et parvenant au-dessus de celle de la mer, elle s'écoule par filtration, et comme à la fin de chaque hiver elle se trouve mélangée avec une nouvelle quantité d'eaux pluviales, le liman perd son sel par ces lavages réitérés: bientôt la plage n'offre plus que de faibles efflorescences, la végétation commence, et les espèces se succèdent dans l'ordre qui convient à leur nature. Nous devons faire remarquer en passant que les filtrations qui amènent l'eau de la mer n'ont lieu que pendant les basses eaux du liman, c'est alors que le sel se dépose tandis que les filtrations dont nous venons de parler actuellement n'existent que pendant les hautes eaux; alors le lavage a lieu, et le sel est emporté.

Le liman Sec nous fait voir, de la manière la plus détaillée, tout ce que nous venons de décrire. La longueur de la vallée qui lui servait de bassin, est d'une douzaine de verstes à peu près, et sa largeur d'une et demie; la traverse de sable peut avoir jusqu'à 150 sagènes de large, et le liman réduit actuellement à un petit lac d'une verste quarrée, est plus élevé que la mer, et beaucoup moins salé qu'elle pendant les hautes eaux, tandis qu'il l'est plus au moment des basses eaux. Tout le sol, en amont du bassin, est composé de terre végétale très fine, ou de vase séchée, qui offre encore de temps à autre quelques efflorescences, surtout du côté du liman; au contraire, à mesure qu'on s'avance vers la naissance de la vallée, la terre paraît moins salée, l'herbe est plus touffue, et près du ravin principal la végétation est très riche. Enfin un lit de quelques pieds de profondeur suit le milieu de la vallée dans toute sa longueur, et sert à porter les eaux pluviales dans le bassin qui reçoit également, ainsi que nous l'avons déjà dit, des dépôts terreux qui finissent par le combler et par le faire disparaître complètement. C'est alors que les eaux sont portées directement à la mer.

Je ne terminerai pas cette note sans parler d'un phénomène remarquable que nous présentent quelques unes des langues de sable dont nous avons donné la description. Sur la vaste plage ou grève qui sépare le grand et le petit Hadjibey de la mer, on trouve au milieu des sables des sources ou puits d'eau douce, en creusant simplement un trou d'un pied, jusqu'à trois pieds et demi de profondeur, sur un pied ou deux de diamètre. Pour obtenir une eau aussi bonne que possible, il faut avoir soin de ne pas creuser le puits trop profond; il ne doit avoir que trois ou quatre pouces d'eau, rarement plus: au-delà elle peut devenir saumâtre. Le niveau de ces puits monte et descend alternativement, et semble suivre, quoique de loin, les variations qu'on observe au bord de la mer, en se tenant toujours de quelques pouces au-dessus de son niveau.

L'idée la plus simple qui se présente pour expliquer cette singularité, est de supposer que des sources qui prennent leur origine sur le plateau de la steppe s'infiltrent au travers des sables, et se répandent sur la barre, en suivant des mouvemens dépendans du plus ou moins de facilité avec laquelle elles peuvent se rendre à la mer. Mais alors, comment cette eau ne paraît-elle pas à la surface, et comment dans des isles de sable, comme à Tendra, par exemple, le même phénomène se présente-t-il, quand les hauteurs les plus proches qui la dominent sont celles d'Otchakoff? Nous devons remarquer encore une autre particularité; c'est que ces sources ne se trouvent pas indistinctement dans tous les points qui appartiennent à la même barre ou langue, à moins que sa formation ne soit la même partout, et convenable au développement du phénomène qui nous occupe.

Pendant plusieurs mois de l'année, les rosées sont nulles dans une grande partie des steppes; mais au bord de la mer elles ne cessent presque jamais, et sont souvent très abondantes; chaque nuit le précipité aqueux dû au refroidissement peut avoir lieu, et l'eau distillée s'infiltre lentement au travers des sables; elle remonte bientôt la couche d'eau salée, y flotte sans se mêler, et suit dans cet état tous les mouvemens, que la mer lui imprime. Cela ne peut cependant avoir lieu que dans un seul cas; c'est quand le sable dont la barre se compose n'est pas trop égal, et qu'il ne permet pas trop librement le passage de l'eau. Autrement le mélange a lieu par affinité, et toute la masse liquide devient saumâtre.

Cette remarque se vérifie parfaitement en examinant le sable qu'on retire des puits d'eau douce; il est, en général, beaucoup moins perméable que celui qu'on rencontre aux endroits où l'eau extraite du sol est salée. D'ailleurs on ne trouve l'eau douce que sur des points éloignés du passage des filtrations qui partent de la mer pour se rendre aux limans.

Ce qui me fortifie dans l'opinion que j'avance ici, c'est la présence de l'eau douce sur toute l'île de Tendra; cette langue de sable, élevée d'environ trois à quatre pieds au-dessus de la mer, est couverte d'une légère couche de terre végétale où croissent de riches pâtures. A quelqu'endroit qu'on la creuse entre ces herbes, on est certain de rencontrer l'eau douce, située toujours à quelques pouces au-dessus du niveau de la mer, et suivant constamment ses oscillations. Sur toute l'île, les rosées sont très fortes; l'on sent que la présence d'une multitude de végétaux touffus accélère singulièrement le précipité aqueux, en ce que pendant la nuit, la chaleur rayonnée du sol est peu sensible, puisque durant le jour la terre en reçoit beaucoup moins que si le sable était à nu.

Nous venons de voir, en traçant l'histoire de la formation et de la disparition des lacs salés, que tous les phénomènes dépendaient en grande partie d'une évaporation considérable, jointe à l'action de l'eau qui ruisselle à la surface de la steppe. Mais ces eaux courantes ne constituent à leur tour qu'une portion de celles qui sont précipitées de l'atmosphère, de sorte qu'il nous reste encore, afin de compléter l'ensemble des effets qui résultent du mouvement des eaux atmosphériques à examiner celui des eaux souterraines; de celles qui après avoir pénétré la surface de la terre, s'infiltrent dans son sein jusqu'à la couche imperméable, et la suivent pour sourdre le long des côtes où elles produisent des mouvemens de terrain dignes de fixer l'attention du Naturaliste.

Des observations sur les effets des eaux souterraines forment la seconde partie de cet essai, sous le titre d'*Examen du littoral de la mer Noire*, *compris entre les embouchures du Boug et du Dniestre.*

EXAMEN
DU
LITTORAL DE LA MER NOIRE
COMPRIS
ENTRE LES EMBOUCHURES
DU BOUG ET DU DNIESTRE,

PAR

M. HAÜY,

ANCIEN OFFICIER DU CORPS DES VOIES DE COMMUNICATION

FAISANT SUITE AUX

OBSERVATIONS SUR LES SALINES DE LA NOUVELLE RUSSIE.

(Lu à l'Académie le 16 Decembre 1828.)

Ainsi que nous l'avons vu au commencement de la première partie de cet essai, le plateau de la steppe comprise entre les embouchures du Boug et du Dniestre se trouve à peu près à 110 pieds au-dessus du niveau de la mer, et présente, quant à ses mouvemens, fort peu de variété, si l'on excepte toutefois le petit nombre de vallées et de ravins qui reçoivent les eaux pluviales.

La côte dont le sommet est à pic, offre également une grande monotonie, mais possède pourtant des caractères dignes d'être remarqués, puisqu'ils sont généraux, et appartiennent indistinctement à tout le littoral que nous considérons.

La figure 1re fait voir un profil perpendiculaire à la côte, *A* est le plateau de la steppe, coupé à pic en *Ab.* Les mamelons *c*, *e* et *g*, se succèdent en descendant ainsi que la figure le montre, ce qui forme une suite de crêtes parallèles à l'escarpe, et qui occupe, suivant cette direction, une longueur de 100, 150 et même jusqu'à 400 sagènes. Les vallons *b*, *d* et *f*, sont également prolongés. Enfin le tout se termine du côté de la mer par un petit talus rapide en *hi*, au pied duquel se trouve une plage qui, suivant les localités, est sablonneuse ou rocailleuse, ayant deux à trois sagènes de large.

Il faut observer en passant que le tracé, fig. 1re, n'est pas le profil d'un certain endroit marqué sur la côte, mais plutôt son caractère général, déduit d'un grand nombre d'observations. Les mamelons ou crêtes sont le plus souvent au nombre de trois: rarement il y en a moins, et parmi tous les points que j'ai eu l'occasion de visiter, je n'en ai jamais rencontré plus. La pente d'une ligne menée par le sommet *A* et le point *j*, où l'eau rencontre la plage, est le plus ordinairement d'un tiers; elle varie peu, tant au-dessus qu'au-dessous de cette grandeur. Telles sont les principales remarques qui peuvent dépendre des formes extérieures du terrain.

En général les végétaux qui croissent spontanément entre les monticules que nous venons de décrire, n'appartiennent pas tous à ceux qui couvrent le grand plateau, surtout quand la côte est tournée vers le sud, puisqu'alors elle est abritée des vents brûlants et secs du *N. O.*, et qu'elle se trouve en même temps disposée de manière à recevoir les neiges que les vents du nord balaient de la steppe. Enfin, il nous reste encore à faire remarquer qu'à un très petit nombre d'exceptions près, les parties *bc*, *de* et *fg*, sont couvertes d'une couche de terre végétale plus considérable que les autres pentes *Ab*, *cd*, *ef*, et *ghi*, où elle est souvent nulle; ce qui fait que sur celles-ci, la végétation est toujours moins active.

Passons actuellement à la description des phénomènes qu'on observe le long de la côte: nous examinerons ensuite sa structure intérieure, et nous chercherons les causes des affaissemens qui se remarquent de temps à autre.

Le 19 novembre 1821, dans le jardin d'un vigneron, nommé Antonio Rizi, situé à 3 verstes d'Odessa, une masse de terre de plus de 4000 sag. cubes s'est abaissée de 25 pieds, et, par l'effet de sa chute, a communiqué un mouvement de quelques pieds vers la mer à plus de 200,000 sag. cubes de terre et de rochers. A l'entrée de la nuit, le jardinier et ses ouvriers étant rentrés dans une petite maison qui leur sert de logement, située à l'extrémité nord du jardin, ils furent surpris par un mouvement particulier du bâtiment. Le plancher qui se courbait sous leurs pieds semblait devoir s'enfoncer avec eux, tandis que le coin de la maison le plus voisin de la mer ayant quitté le reste de la bâtisse, donna naissance à deux fentes ou ruptures, ayant environ trois pouces de large. Ces malheureux furent glacés d'effroi, en voyant qu'en outre le toit menaçait de les écraser par sa chute; mais ce premier mouvement de terreur étant passé, ils cherchèrent leur salut en se jetant précipitamment hors de la maison, pour gagner en toute hâte un chemin en pente, qui mène du jardin au plateau de la steppe. A peine leurs pieds touchent-ils le sol, qu'ils le voient se fendre parallèlement à la côte. Ces crevasses, qui leur coupent la retraite, sont cependant franchies par eux, au risque même d'être engloutis. Ils parviennent enfin au pied de l'escarpement, d'où ils espèrent se rendre sur la steppe; mais c'est en vain qu'ils comptent sur ce secours; la partie inférieure de la route à déjà disparu, et ils n'arrivent que pour voir l'escarpement supérieur s'enfoncer lentement, sur une longueur de plus de 100 sagènes. Telle a été à peu prés la marche du phénomène qui s'est passé dans l'espace d'un quart d'heure, et après lequel l'équilibre a succédé.

Ayant visité l'emplacement le lendemain, voici ce que j'ai observé. Une bande de terre de 100 et quelques sagènes de long, sur trois sagènes de largeur moyenne, appartenant à la partie supérieure de l'escarpement, s'est enfoncée de 15 pieds vers le nord et de 30 du côté du sud. Cet affaissement a été assez régulier pour que la partie qui appartenait d'abord au plateau supérieur, soit restée, après le mouvement, à peu près dans le même plan, incliné seulement vers

*

le sud de deux dégrés. La ligne de rupture n'était pas droite, elle était composée de parties de courbe d'un très grand rayon, et la surface du nouvel escarpement était sensiblement formée par un cylindre à base irrégulière, dont les génératrices étaient des droites verticales. Toute cette énorme masse de terre, en glissant contre le nouvel escarpement, a suivi la verticale, sans qu'aucun éboulement ait eu lieu, et l'affaissement, qui d'ailleurs s'est passé sans le moindre bruit, n'a laissé en cet endroit aucune fente ni crevasse; la masse de terre s'est enfoncée en ne déplaçant absolument que ce qui s'opposait à son passage.

En me dirigeant vers la mer, j'ai rencontré quatre crevasses principales, à peu près parallèles à la côte. Ces fentes avaient des largeurs très variables; leur mesure m'a donné depuis 2 pieds jusqu'à 5 en haut, sur une longueur de 100 à 150 et jusqu'à 200 sagènes. Quant à leur profondeur, elle m'a paru devoir être considérable; j'ai trouvé moyennement jusqu'à 18 pieds; mais la terre déjà éboulée devait remplir une partie du fond et diminuer mon résultat. Ayant mesuré dans plusieurs endroits la somme des crevasses, j'ai trouvé que la partie inférieure de la côte avait dû s'avancer de 10 à 12 pieds vers la mer. Le mouvement, qui s'est fait en même temps que l'affaissement de l'escarpe, a donné lieu à une circonstance remarquable; c'est que ces masses de terre, dans les différentes positions qu'elles ont successivement occupées, ne sont pas restées parallèles à elles-mêmes: il y a eu rotation, absolument comme si la terre avait roulé sur un plan incliné vers la mer. Cela devient évident en observant que, dans la plupart des crevasses dont je viens de parler, les deux bords ne se trouvaient plus à la même hauteur, et que celui qui est situé vers la mer était toujours plus haut que l'autre. En mesurant ces différences de niveau, j'ai trouvé qu'elles allaient jusqu'à 4 pieds. J'ai trouvé encore une foule d'autres petites crevasses, n'ayant que quelques pouces de large, et une longueur de 10, 15 et 20 pieds. Enfin, dans d'autres endroits, la terre était comme remuée à la houe, et quelquefois comme soulevée par une force dirigée verticalement, ou mieux encore, comme boursouflée sur des espaces qui allaient jusqu'à 20 et 30 sagènes quarrées. Un pommier, qui s'est trouvé justement sur une des fentes principales, a été ouvert en deux parties; chaque moitié de racine est restée fixée au bord de la crevasse, qui, en cet endroit, avait 3 pieds de large. Mais ce qui m'a semblé le plus digne de fixer l'attention, c'est ce qui s'est passé dans la mer, à quelques toises du bord. Dans un endroit où il y avait avant l'affaissement 10 à 12 pieds d'eau, s'est élevé un banc de rocher de 40 sagènes de long, sur 5 environ de large, et qui a dépassé le niveau de l'eau d'à peu près 3 pieds. Il est probable qu'au-dessous de la surface de la mer, cette masse de pierre s'étend au-delà des mesures que j'ai trouvées, et qui ont été prises à la ligne d'eau.

Les détails qui précèdent suffiront pour donner une idée exacte du phénomène, et ce n'est pas sans un grand intérêt que nous allons voir que la marche est exactement la même pour tous les mouvemens de terre qui se passent sur la côte, quelle que soit d'ailleurs la vitesse avec laquelle ils ont lieu. Je ne dois pas omettre ici, que le 5 novembre, c'est-à-dire quinze jours avant l'affaissement, on a ressenti à Odessa, et fort loin aux environs, à 2 heures ½ après midi, une violente secousse de tremblement de terre, ce qui m'a d'abord fait soupçonner que l'affaissement de la côte en était la suite naturelle; mais quelques années après, en septembre 1824, des mouvemens se sont manifestés sur le sol sur lequel reposait une bâtisse que je venais d'achever à la quarantaine. Ces mouvemens, quoique beaucoup plus lents et moins considérables que ceux qui ont eu lieu dans le jardin d'Antonio Rizi, m'ont cependant paru être dus à une seule et même cause, absolument étrangère aux tremblemens de terre qu'on observe quelquefois ici. Une description succincte des observations que j'ai recueillies à ce sujet, rendra ce fait palpable, et sera j'espère de quelqu'utilité; en faisant connaître un terrain qui, par la suite et dans différens lieux, a confirmé les tristes observations que j'ai pu faire.

La fig. 2 fait voir le plan général de la partie inférieure de la quarantaine, et la fig. 3 indique une coupe suivant la ligne *LM* du plan. Les explications sont suffisantes pour faire bien connaître les relations que ces deux dessins ont entr'eux. La ligne *a*, *b*, *c*, *d*, fig. 3, est la coupe de l'ancien terrain, tel qu'il était avant l'exécution du bâtiment. Les parties qui tiennent à l'intérieur de la coupe ont été déterminées au moyen de 16 trous de sonde faits avec soin le long de la ligne ***LM***. Depuis *A* jusqu'en *D*, fig. 2, la rupture de la côte n'a été observée que sur les murs des anciens magasins ***A***, ***B***, ***C*** et ***D***, attendu qu'elle était trop faible pour sillonner la terre d'une manière sensible, les murs ne s'étant fendus que de $\frac{1}{4}$ de pouce enrivon. Le petit magasin ***E***, que j'ai construit en même temps que les bâtisses ***F***, qui composent le *quartier des pestiférés*, n'a cependant éprouvé aucun dommage, tandis que ces derniers bâtimens, soumis pendant 8 mois à des mouvemens de terre, qui paraissent ne pas s'être arrêtés un seul instant, présentent des ruines d'un caractère tout particulier. L'angle *a* s'est avancé vers la mer de 14 pouces, l'autre *b*, de 8 pouces seulement. Les fentes qui sont résultées de ces mouvemens, partent depuis les fondations jusqu'au sommet des constructions, qui sont tout entières traversées par les lignes de rupture marquées sur les figures. J'ai observé un mouvement de 2 pouces à peu près en *G*, sur le grand mur de la quarantaine, construit il y a 20 ans. Sur le même mur, qui a dix pieds d'épaisseur sur 28 de haut, sont deux autres ruptures en ***H*** et en *I*, dont la somme est de 10 pouces; de semblables crevasses se prolongent probablement sous terre vers le point ***J***, et au-delà; car on remarque plus loin, même jusqu'à une verste, les preuves d'un mouvement de rotation analogue à ce que nous avons déjà vu au jardin d'Antonio Rizi. Une batterie, un four à boulets, un petit magasin à poudre et d'autres constructions offrent des inclinaisons plus ou moins grandes vers la mer, depuis 3 degrés jusqu'à 5 et 6 pour les plus basses.

Le mur *TV*, qui doit avoir été construit en ligne droite, fait un ventre de 6 pouces environ en *U*; il est en outre tout couvert de petites crevasses qui n'excèdent pas une ligne de large. Ces ruptures proviennent sûrement de l'extension qu'a dû prendre le mur, quand le ventre s'est formé.

Un puits, situé entre le quartier des pestiférés et le magasin *E*, qui a fourni toute l'eau nécessaire aux travaux, m'a offert par hasard une observation intéressante qui prouve l'existence d'un mouvement antérieur à celui qu'on a remarqué en septembre 1824. Ce puits, ayant été tari à la fin de l'été de la même année, est représenté par une coupe fig. 4, faite suivant la ligne ***PR*** du plan fig. 2. Toute la partie *AB* est aplatie et elliptique, le petit axe dans le sens ***PR*** qui est celui de la pression. Cette même partie elliptique n'est plus verticale, tandis que le bas du puits *BC* est resté cylindrique et perpendiculaire à l'horizon. En *B* l'on remarque quatre assises qui ont glissé les unes sur les autres, et qui appartiennent au plan suivant lequel le terrain s'est avancé. Ayant donné deux coups de sonde en *R* et en *P*, fig. 4, je n'ai cependant pas trouvé, comme on pouvait le supposer, un changement de couche à la hauteur du lit *B*; au contraire, j'ai remarqué assez d'homogénéité dans cet endroit; et le changement de couche est marqué sur la figure. Telles sont à peu près les principales observations que j'ai pu faire dans l'enceinte de la quarantaine, et au-delà sur la côte.

Tous les mouvemens dont nous venons de parler n'ont pas eu lieu en même temps, et en exceptant celui du quartier des pestiférés, on ne sait absolument pas quand ils ont commencé; peut-être même que des observations suivies et délicates prouveraient que la côte s'avance encore. Cette extrême lenteur dans la marche est un caractère distinctif d'une variété du phénomène dont nous nous occupons, et j'ai eu occasion de remarquer que beaucoup de points du littoral sont soumis à de semblables translations. Passons à d'autres observations qui vont jeter un nouveau jour sur notre sujet.

Dans un jardin appartenant à M. de Ribas, consul général du Roi de Naples, un affaissement remarquable a eu lieu le 2 avril 1826. Ce jardin situé sur le bord du plateau, se trouve à 6 verstes de la ville; une belle source occupait la partie inférieure de la côte, qui dans cet endroit, sur une longueur de 200 sagènes environ, offrait et offre encore beaucoup de différences avec le tracé fig. 1. Cette partie est une véritable falaise comme on en rencontre un petit nombre entre les embouchures du Boug et du Dniestre. Le sommet est élevé seulement de 80 pieds au-dessus de l'eau, à cause d'un ravin qui débouche à une verste de là, et dont les pentes douces et prolongées s'étendent loin de son lit. Le bas de la falaise avant l'affaissement était occupé par un chemin fort étroit établi sur des rochers. Enfin des récifs bordaient le chemin du côté de la mer, de sorte qu'alors il n'y avait pas plus de 5 à 6 sagènes depuis l'escarpe jusqu'aux brisans.

Dans les derniers jours de mars, on a remarqué dans le jardin de M. de Ribas, une fente peu sensible qui se trouvait à 5 ou 6 sagènes du bord, sur une longueur de 30 à 40 sagènes, à peu près parallèlement à toute la côte. Cette crevasse ou rupture a été constamment en augmentant, sans cependant dépasser 6 à 8 pouces de large. L'affaissement a commencé presqu'en même temps que la rupture, et du 24 au 26, la différence de niveau était sensible; mais la vitesse était si petite, que le premier d'avril, dans la matinée, le rocher ne s'était abaissé que de deux pieds.

La vitesse due à la force accélératrice, résultante de l'effet de la pesanteur, joint à celui de l'eau de la source qui n'avait plus d'issue, était croissante quoique très lentement: il paraît que le 2, vers 10 h. du matin, elle a acquis son maximum; l'affaissement était alors de 3 pieds, et une demi-heure après tout paraissait être arrêté, et le rocher avait descendu de 18 pieds. Le cube total de la partie affaissée peut être évaluée à 2000 sagènes.

Par l'effet de ce mouvement, les brisans se sont avancés de 4 à 5 pieds vers la mer, et ceux qui se trouvaient couverts par les eaux sont remontés de plusieurs pieds. De tout ceci on voit que le bas de la côte est actuellement beaucoup plus large qu'avant l'éboulement, puisqu'en effet la partie affaissée fait maintenant partie du bas de la falaise; que celui-ci à son tour a été repoussé vers la mer, d'où enfin est sortie une nouvelle ligne de brisans au-delà de l'ancienne.

La lenteur, avec laquelle tous ces mouvemens ont quelquefois lieu, est une chose tout-à-fait remarquable. Chez M. de Ribas une grande partie d'une des allées principales de son jardin ayant descendu avec la falaise, les jardiniers ont eu tout le loisir, pendant l'affaissement, de déraciner les arbres, pour les replanter sur d'autres points. Les ouvriers descendaient avec la partie de l'allée et passaient les arbres, au moyen d'une échelle appuyée contre la nouvelle falaise, à leurs camarades qui les mettaient immédiatement dans les trous qu'on leur avait préparés.

Quelques jours après l'affaissement qui a fait disparaître complettement la source, on l'a vue se remontrer à peu de distance du lieu qu'elle occupait, du côté du nord.

Le 19 avril de cette année 1828, nous venons d'être témoins, au milieu de la ville, d'un mouvement pareil, très alarmant, quoique moins considérable, et qui mérite de fixer l'attention. Le boulevard d'Odessa est une belle promenade au bord de la mer; sa longueur, de près d'une demi verste, se trouve comme fixée entre les embouchures de deux ravins qui portent à la mer toutes les eaux pluviales que la ville reçoit. Le bas de la côte est analogue à ce que nous avons déjà vu plus haut fig. 1re. C'est une suite de mamelons qui régnent tout le long de l'escarpement. Dans l'après midi du 19, on avait déjà remarqué plusieurs fentes dans une grande masse de terre remblayée, qui s'appuyait contre la falaise: vers les 8 heures du soir, le mouvement s'est manifesté; l'abaissement était alors de 2 pieds, et le 20 au matin, tout était fini. Dans cet affaissement aucune partie de la falaise n'a été endommagée, il n'y a eu que quelques masses de rocher mal assurées qui s'en sont détachées; du reste tout le mouvement s'est fait sentir dans la partie inférieure de la côte, sur une largeur de 50 à 60 sagènes, et sur plus de 200 sagènes de long. L'affaissement a été de 30 pieds environ, du côté de l'est et de quelques pouces seulement vers l'ouest. Le bas de la côte s'est avancé vers la mer, de 15 pieds à l'extrémité orientale, et vers l'ouest, ce mouvement a été à peine sensible. Tout le terrain traversé par trois crevasses principales, portait les traces d'un bouleversement: des parties s'étaient enfoncées, d'autres avaient été relevées de plusieurs pieds en se boursouflant. Une route, qui occupe le bord de la mer, a été coupée en travers, et ses deux parties animées de deux mouvemens tout différens. Le côté de l'est s'est avancé vers la mer, sans paraître changer de niveau, tandisque l'autre morceau s'est élevé de 5 pieds ½, audessus du premier, sur un espace de 12 à 15 sag. quarrées. Enfin, j'ai encore eu l'occasion de remarquer ainsi que chez Rizi, et chez Mr. de Ribas, qu'une longue bande de rochers, qui étaient à 3 et 4 pieds sous l'eau, s'est relevée d'à-peu-près 18 pouces au-dessus de son niveau. Cette ascension a eu lieu sur une longueur de 150 sagènes environ, et a été moins sensible du côté de l'ouest, où l'affaissement était presque nul.

Le mouvement général, qui semblait ne plus avoir lieu dans la journée du 20 avril, a encore continué pendant deux à trois semaines, du moins dans un point que j'ai pu observer commodément. Le mur du jardin de M. le comte de Vorontsoff, situé à l'extrémité occidentale du boulevard, est construit en échelons et traverse le bas de la côte, en partant de la falaise pour aller rejoindre la route qui longe la mer. Ce mur, au pied duquel toutes les crevasses du terrain sont venues se perdre, a été fendu dans toute sa hauteur, le jour de l'affaissement, sur une largeur de ¾ de pouces. Huit jours après, il y avait deux lésardes au lieu d'une, et la somme de leur largeur allait jusqu'à 2 pouces. Enfin, dans les premiers jours de Mai, j'ai trouvé pour cette somme trois pouces ¼, au lieu de deux. Ce mouvement doit évidemment provenir d'une translation de la côte, puisque les fentes occupent toute la hauteur du mur, et qu'elles ont une largeur sensiblement constante, depuis le bas jusqu'en haut.

Une foule d'autres mouvemens, tous semblables. ont eu lieu à différentes époques; j'en ai vu près du phare à 12 verstes de la ville d'Odessa, près du village de Dauphiné, à 18 verstes sur la route de Khersone, etc. Mais n'ayant pu donner des descriptions bien circonstanciées de ces divers affaissemens, j'ai préféré m'en tenir à un petit nombre de faits certains, plutôt qu'à des exemples vagues, qui sont rarement concluans.

Dans ce que nous venons de voir précédemment, nous avons été à même de remarquer deux sortes de mouvemens bien distincts; les affaissemens rapides, qui se passent dans le cours de quelques heures, ou même de quelques jours, et les mouvemens lents, dont les progrès ne peuvent se remarquer qu'après plusieurs mois.

Dans les mouvemens rapides, il y a presque toujours affaissement de quelque partie de la falaise qui se détache, translation, rotation, crevasses dans le bas de la côte et enfin, auprès du rivage, le fond de la mer se trouve toujours relevé.

Dans les mouvemens lents, on n'observe absolument que la translation de la partie inférieure, accompagnée de crevasses et d'un mouvement de rotation: la falaise ne s'affaisse pas, et aucune partie de la plage n'est soulevée du moins visiblement. Ce soulèvement paraît uniquement dû à l'affaissement de l'escarpe; car il est à remarquer que ce n'est qu'en face des parties affaissées qu'on en voit d'autres qui remontent et celles-ci sont portées d'autant plus haut que la chute de la falaise a été plus considérable. D'ailleurs les deux mouvemens s'opèrent dans le même temps.

Quand un affaissement vient d'avoir lieu, les arêtes des blocs de terre sont vives, les crevasses toujours nettes et bien prononcées; cependant les pluies, les neiges et les vents arrondissent successivement ces masses: les eaux sillonnent la nouvelle escarpe, qui dans l'origine est toujours unie et quelquefois lisse, par l'effet du frottement de la partie mobile, au moment de la chute; mais après cinq ou six années, quelquefois plus, tous les caractéres extérieurs deviennent absolument les mêmes que ceux du reste de la côte. Ce fait, très remarquable, prouve que tout le littoral compris entre les embouchures du Boug et du Dniestre, sans en excepter le plus petit espace, est soumis aux mêmes affaissemens que ceux que nous venons de décrire plus haut, et qu'aucun point ne peut être considéré comme définitivement stable.

Dans le grand phénomène que nous étudions, la structure intérieure de la falaise joue un rôle important: le profil fig. 5 donne une idée exacte de la manière dont les couches se succèdent: leurs épaisseurs, très variables, sont cependant comprises entre certaines limites à-peu-près constantes. Examinons la nature de chaque banc en particulier. La terre végétale, dont tout le plateau de la steppe est recouverte a presque partout la même épaisseur, qui dépasse rarement 14 pouces, excepté dans les ravins où elle est souvent assez considérable. Au-dessous, se trouve une couche de terre argileuse, le plus souvent jaunâtre ou bien rougeâtre qui dans ce second état contient quelques morceaux de gypse dont on obtient un fort mauvais plâtre de couleur rose sale.

La terre argileuse jaunâtre est fort homogène: elle se laisse lentement pénétrer par l'eau: elle est extrêmement compacte, ne se coupe qu'à la pioche avec de grandes difficultés: l'épaisseur de cette couche est souvent très considérable, elle va jusqu'à 120 pieds, et beaucoup au-delà, quand on s'éloigne de la côte. Enfin, elle pèse à-peu-près 100 livres le pied cube.

Sous la terre argileuse, se trouve ordinairement un banc calcaire assez dur, d'un grain grossier et sphérique. L'épaisseur de cette espèce de dalle est d'à-peu-près 10 pouces et va jusqu'à 2 pieds. Sa dureté va en décroissant depuis sa surface supérieure jusqu'à l'inférieure qui se termine par une espèce de bousin argileux. Celui-ci repose à son tour sur une couche particulière, connue dans le pays sous le nom de *Dikar*; ce lit, de 2 pieds d'épaisseur est assez régulier et présente un assemblage de fragmens plats d'une pierre calcaire très dure, très dense et parsemée d'une foule de trous analogues à ceux qu'on rencontre dans les pierres meulières, ou dans les grosses éponges communes, ce qui la rend très propre aux constructions, non seulement à cause de la facilité avec laquelle le mortier s'y attache, mais encore à cause du peu de travail qu'exige son extraction de la carrière. Les fragmens, dont ce lit se compose, n'ont guères que 15 à 18 pouces de long sur 3 à 4 d'épaisseur; ils ne forment pas des assises régulièrement stratifiées; les pierres sont rangées comme elles pourraient l'être dans l'intérieur d'un mur et les vides sont occupés par des fragmens gradués de cette même pierre, mêlés de terre argileuse rougeâtre. Les trous, qu'on rencontre dans la pierre même, sont cependant vides; ils ne contiennent autre chose que de petits cristaux calcaires qu'on rencontre rarement.

La couche de calcaire spongieux repose sur un banc ordinairement fort épais, d'une pierre particulière répandue avec profusion sur toute la côte et qui forme son soutien principal. Cette pierre n'est autre chose que des fragmens de coquilles agglomérés, formant un tout très poreux et qui se laisse pénétrer par l'eau d'une manière remarquable. Son peu de dureté la rend fort économique pour les bâtimens; mais en même temps, elle ne procure jamais le moyen de faire des maisons bien sèches.

Pour se former une idée exacte du peu de résistance de cette pierre, il suffit de savoir qu'elle se travaille ordinairement à la hache et à la scie, avec une facilité beaucoup plus grande que celle qu'on rencontre à façonner les bois les plus tendres.

La couche de pierre coquillère tendre possède une épaisseur souvent considérable; elle varie depuis 20 jusqu'à 40 pieds, rarement au-delà.

Enfin la partie inférieure est occupée par une couche d'argile plastique, qui est comme la base de tout l'édifice. C'est sur cette argile imperméable, que coulent les différentes sources qui viennent déboucher le long du littoral. Quelque fois, c'est sur de l'argile brunâtre que repose le banc de pierre coquillère. D'autres fois, les deux variétés de terre sont mélangées par couches ou veines irrégulières et entremêlées.

Le fond d'argile paraît s'étendre fort loin: ayant sondé le terrain dans différens endroits, je l'ai encore trouvé jusqu'à 42 pieds au-dessous du niveau de la mer, et sur toute la côte je n'ai jamais eu occasion de rencontrer, dans la partie inférieure, autre chose que l'argile en question.

Nous ne devons pas négliger de faire remarquer que la coupe fig. 5 est supposée complète, ce qui n'a pas toujours lieu: souvent le banc de calcaire à gros grains manque totalement. Cependant le calcaire spongieux couronne constamment le banc de pierre coquillère et l'accompagne toujours. D'autres fois ces deux dernières disparaissent et le tout est remplacé par une immense couche de terre argileuse, jaunâtre, dominée par la terre végétale, et se posant sur l'argile plastique, qui paraît ne jamais quitter sa place. Enfin l'on conçoit qu'il doit exister beaucoup de variété dans les épaisseurs de ces différentes couches: mais on est frappé de voir qu'excepté la dureté, les propriétés physiques et chimiques restent sensiblement les mêmes, non seulement entre le Boug et le Dniestre, mais encore jusqu'au Don. A Novo-Tcherkask, dans un chemin creux qui descend au bord du Touzlof, j'ai retrouvé le calcaire spongieux et la pierre coquillère; seulement celle-ci contenait des couches de quelques lignes d'épaisseur, composées de cristaux calcaires assez confus.

Portons maintenant notre attention sur l'ordre dans lequel les couches sont superposées dans la partie inférieure de la côte. La fig. 6 nous montre une coupe complète de cette partie, en admettant toutefois une régularité qui n'est jamais aussi parfaite. Quand on observe les pentes *AB*, *CD*, *EF* et *GH*, on retrouve partout les mêmes couches, qui se succèdent dans le même ordre, et possèdent à peu-près la même épaisseur: seulement la terre végétale qui occupe les pentes *BC*, *DE*, etc. se trouvant enlevée petit à petit par l'effet des pluies, va successivement en décroissant, depuis *BC* jusqu'à *FG*, où ordinairement elle est nulle.

IJ sont les débris de rochers restés aprés les éboulemens antérieurs à ceux qui ont lieu en *HI*; ce sont ces masses de pierre qui forment les brisans qu'on rencontre sur le littoral. Il est clair que quand la côte n'est formée que de terre, sans aucune pierre, les formes extérieures sont en général plus arrondies et se rapprochent davantage de la coupe fig. 1. Dans ce cas la plage est presque toujours dépourvue de brisans.

Dans les mouvemens rapides, nous avons vu que toutes les masses allaient en inclinant vers la mer; cela a souvent lieu encore, dans les mouvemens lents;

c'est ce dont je me suis assuré en observant, dans les jardins qui bordent la côte, quelques petites constructions établies sur des points très éloignés les uns des autres, et qui, presque toutes, m'ont donné des preuves d'une variation remarquable dans l'inclinaison des couches. Au reste ce n'est que de cette espèce de mouvement que peuvent résulter les fentes ou crevasses longitudinales, dont nous avons parlé plus haut. Ce qu'il y a encore de remarquable, c'est que cette tendance à se pencher vers la mer, n'est pas constante et générale pour tous les points: que tantôt les mouvemens des masses ont lieu en suivant des positions parallèles entr'elles et quelquefois en s'inclinant vers le terre-plein. Une observation directe prouve, qu'en général, c'est le dernier mouvement qui caractérise la plus grande partie de la côte, puisque presque partout on trouve que les lignes *BC*, *DE* et *FG* vont en convergeant vers *bdf*.

Il est probable que des observations suivies avec soin et faites sur des pillers solidement établis en terre, dont les distances respectives, ainsi que la verticalité originaire, seraient fixées trigonométriquement; il est probable, dis-je, que de semblables observations complèteraient ce que je n'ai pu qu'ébaucher, et ces observations comparées à des sondes poussées très profondément pourraient peut-être faire connaître quelques unes des lois générales suivant lesquelles les mouvemens ont lieu.

Essayons cependant, autant que nos observations le permettent, de déterminer les causes qui produisent les affaissemens, translations et rotations qu'on observe journellement. En nous rappellant quelle est la configuration de la surface de la steppe, nous devons remarquer que les pentes étant en général très faibles et les versans extrêmement prolongés, l'eau ne peut couler qu'avec lenteur et la terre doit en absorber une quantité considérable, même après que l'évaporation a enlevé tout ce qui peut l'être. On se persuade de cette vérité, quand on voit la prodigieuse quantité de sources qui sortent du pied de la côte. Parmi ces sources, il est vrai qu'il y en a peu de considérables, et qui, par leur position, puissent être utilisées; mais quel que soit le lieu où l'on creuse dans la partie la plus basse de la côte, on rencontre partout une eau abondante. Sous le plateau de la steppe, c'est le banc d'argile qui reçoit cette eau, après qu'elle a traversé toutes les couches supérieures; une fois qu'elle a dépassé le point *m*, elle ne se dirige plus suivant un lit, ou une nappe, comme cela avait lieu antérieurement; mais elle pénètre dans toutes sortes de directions entre les masses éboulées et se fraie un chemin pour parvenir jusqu'à la mer.

Avant l'affaissement qui a eu lieu à la campagne de M. de Ribas, on voyait la source sortir de la jonction du banc d'argile avec la couche de pierre, non pas en filet; mais en nappe mince et divisée en gouttes, sur une largeur de plus de 25 sagènes. C'est goutte à goutte que sortaient ainsi 7224 pieds cubes d'eau en 24 heures. Une autre source, connue sous le nom de *grande fontaine*, qui se trouve à 12 verstes au sud de la ville, donne de la même manière 10,080 pieds cubes, suivant une nappe d'eau de 5 sagènes de large. Aux autres sources qui environnent Odessa, le pied de la côte étant encombré par l'effet des éboulemens, l'eau sort à la manière ordinaire, sous forme de ruisseau.

A la fontaine de M. de Ribas, j'ai remarqué un vide d'un pouce à peu près qui se trouvait entre la pierre et l'argile, et par où l'eau sortait. Ce vide, qui probablement diminuait de hauteur, en s'enfonçant sous le plateau de la steppe, était dû à l'effet corrosif des eaux et doit avoir déterminé la chute de la falaise. C'est du moins de cette manière qu'on peut expliquer tous les affaissemens qu'on observe.

A mesure que l'eau s'écoule, elle entraîne avec elle des parties imperceptibles du banc d'argile qui sert de support à l'escarpement de la côte. Il se forme de cette manière un vide qui croît constamment, tant en épaisseur qu'en profondeur et qui gagne ainsi vers le terre-plein. Pendant ce temps, la masse *m*, n'étant plus soutenue par toute la partie inférieure de sa base, tend à s'enfoncer en reportant en arrière l'effort que ses parties supportent; et comme cet effort croît suivant la profondeur du vide produit par les eaux, il s'ensuit qu'il arrive un moment où la résistance que peut opposer une certaine ligne ***RP*** n'est plus capable de faire équilibre au poids de la masse *Rm*, suspendue au-dessus de l'argile. C'est alors que la rupture suivant *RP* a lieu, et que la masse libre, soumise à l'effet de la pesanteur, vient s'asseoir sur la couche qui lui servait de base. Je ne crois pas que ce mouvement originaire excède 2 à 3 pouces; mais il faut observer, qu'une semblable masse une fois en mouvement, même en n'admettant qu'une vitesse initiale très petite, ne peut s'arrêter qu'après avoir dépensé une quantité de force vive immense; et comme tout le dessous de la partie inférieure de la côte est toujours sousminé par l'effet des eaux, que l'argile, moins comprimée, est considérablement ramollie, et que d'ailleurs la pente générale favorise singulièrement le mouvement vers la mer, on conçoit que la chute de la masse *AP* doit continuer long-temps après que l'espace initial est parcouru, en refoulant l'argile de tous côtés. Celui-ci ne trouvant d'autre issue que vers la mer, il se meut de ce côté, entraîne bientôt avec lui tout ce qu'il supporte, et toute la côte est en mouvement. Alors les cavités intérieures donnant naissance à des mouvemens secondaires, qui ont nécessairement lieu dans diverses directions, le terrain se fend ou se boursoufle dans les parties soumises à des poussées dirigées de bas en haut, tandis que dans des circonstances contraires, on voit de nouvelles parties s'enfoncer. Tous ces mouvemens, qui tendent d'un commun accord à comprimer le sol, finissent par n'avoir plus qu'une seule résultante dirigée en *TK*. Le fond de la mer est refoulé en *K*, ce qui le force à remonter, et souvent à dépasser le niveau de l'eau: ce refoulement se termine au point *M*, qui est la limite du phénomène, où tous les efforts viennent se perdre. Enfin, quand toute la quantité de mouvement est épuisée, l'équilibre renaît, les eaux se fraient un nouveau passage, enlevant de nouvelles terres, jusqu'à ce que des cavités suffisantes déterminent une nouvelle série de mouvement. Pendant ce temps, la mer mine le pied *IH* de la côte, et ne laisse que le squelette rocailleux emportant toutes les terres qui sont transportées au loin et cédent leur place aux sables dont la plage est constamment composée.

D'après la forme de l'ouverture *mP*, on devrait supposer que la masse *AP* cédant à l'effet de la gravité, tourne autour du point *P* et se renverse vers la mer; mais le bloc *BCDV* s'oppose par son poids à ce mouvement de rotation, et retient la partie mobile dans une situation verticale, pendant qu'elle descend comme dans une coulisse.

Les pluies et les neiges produisent un autre mouvement que celui que nous venons de voir; il est presqu'insensible dans le cours d'une année; mais à la longue, il endommage considérablement le terrain et accélère les affaissemens.

Les vallons *B*, *D* et *F* sont tellement disposés, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, que les eaux pluviales ne pouvant en sortir, forment des espèces de mares; celles-ci donnent naissance à des infiltrations qui ont lieu le long des joints *Bm*, *Dg* ou *Fh*, et produisent des affaissemens partiels. Si comme cela peut être souvent le cas, la quantité de terre, enlevée dans les joints *Dg*, est plus considérable en *D* qu'en *g*, on conçoit que le point *E*, fig. 7, doit descendre en tournant vers *D*, ce qui détermine une suite de fentes *f*, *f'*, *f''*, etc. Ce mouvement très lent, qui a également lieu sur les autres mamelons *C* et *G*, est très commun sur la côte, et s'observe partout.

Si au contraire, la quantité de terre enlevée depuis le joint *Dg*, est moindre en *D* qu'en *g*, ou si les terres sont poussées par le haut vers la mer, et que le dessous en glissant, se meuve avec plus de lenteur, la rotation qui en résulte doit offrir quelque chose d'analogue aux lignes de rupture marquées sur la fig. 8. C'est alors qu'on remarque, ainsi que nous l'avons déjà dit, en décrivant la marche du phénomène, que le bord des crevasses situé du côté de la mer est constamment plus haut que celui tourné vers la steppe. Dans tout les cas la nature des couches, et surtout la manière dont elles sont alternées par les bancs des rochers, produit de grandes variétés dans la position des ruptures et dans la direction du mouvement de rotation.

Actuellement que nous avons expliqué les causes auxquelles ont peut attribuer les singuliers mouvemens qu'on remarque le long du littoral compris entre les embouchures du Dnièpre et celles du Dniestre, causes qui ne sont autre chose que les dégradations produites par les eaux souterraines, il nous reste à signaler une conséquence très digne d'attention, et qui, je crois, peut être adoptée comme un fait. Nous avons vu précédemment, qu'aux environs d'Odessa, dans un cercle de 6 verstes, trois affaissemens, remarquables par leurs volumes, ont eu lieu à des intervalles de temps très différens. Le second s'est trouvé à 53 mois du premier, et le 3ème à 24 seulement du second. Il est certain que trois observations semblables ne suffisent pas pour assurer que les intervalles de temps, entre deux affaissemens consécutifs, doivent aller en décroissant; cependant de fortes analogies me portent à penser que cela doit avoir lieu.

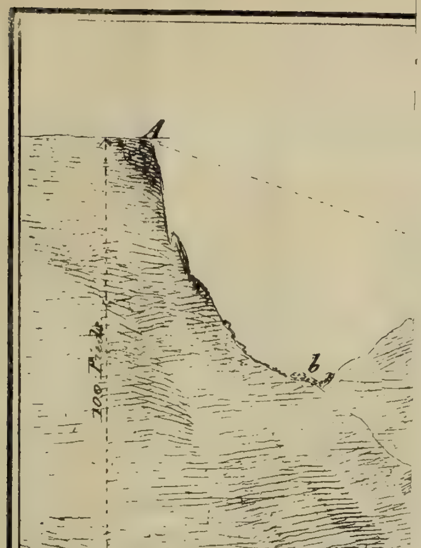
Il faut se rappeller que, dans l'essai précédent, nous avons vu que chaque année la quantité d'eau contenue dans les limans, décroissait pendant l'été d'une manière sensible.

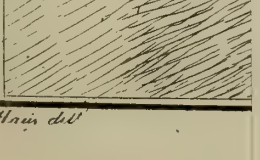
D'après les observations de Monsieur le Consul de France, Challaye, les hauteurs d'eau tombées dans les années

1822, 1823, 1824, 1825, 1826 et 1827
sont de 204, 264, 521, 503, 276, et 355 millimêtres.

Ainsi, ce n'est pas la quantité d'eau tombée qui va en diminuant et produit ainsi l'abaissement observé. D'un autre côté, il n'est guère probable que le facteur de l'évaporation puisse croître aussi sensiblement depuis 6 années. Il faut donc, pour expliquer l'abaissement de niveau dans les limans, recourir à une autre cause, qui me paraît être un prodigieux accroissement de population, qui entraîne nécessairement avec lui une augmentation très considérable dans la surface de terre cultivée chaque année; cette terre, singulièrement disposée pour absorber l'eau pluviale, occasionne la diminution observée. Presque toutes les digues construites dans les gouvernemens du midi, fournissent autant de nouvelles preuves de ce que nous avançons: les étangs sont à peu près à sec depuis plusieurs années, tandis qu'auparavant, ils étaient toujours bien fournis d'eau. Ces observations deviennent d'un intérêt majeur, surtout s'il est question d'établir un canal à point de partage, pour la dépense duquel on compterait sur les eaux pluviales accumulées dans des retenues artificielles : c'est alors qu'il sera important de fixer d'une manière rigoureuse l'abaissement annuel du niveau dans les étangs.

De ce que nous venons de dire, il est visible que la masse d'eau souterraine doit croître de toute la quantité dont celle qui ruisselle à la surface du sol décroît annuellement, et comme il n'y a pas moyen de douter que les affaissemens que nous observons le long de la côte, sont uniquement dus aux affouillemens souterrains, ceux-ci devenant plus considérables par l'effet d'une plus grande quantité d'eau, nous en concluons finalement que les mouvemens de terre que nous venons de tracer, doivent devenir plus fréquens chaque année, ou tout au moins ne pas être plus rares de très long-temps. Cette conclusion, je l'avoue, exige que l'expérience vienne à son appui ; aussi je me propose de continuer des observations à ce sujet, espérant qu'elles complèteront celles que j'ai déjà recueillies, et qu'elles nous mettront à même de connaître exactement, et dans tous ses détails, la marche des singuliers phénomènes dont nous venons d'ébaucher l'histoire.





Hreis del.

Pl. I.

Fig. 1.

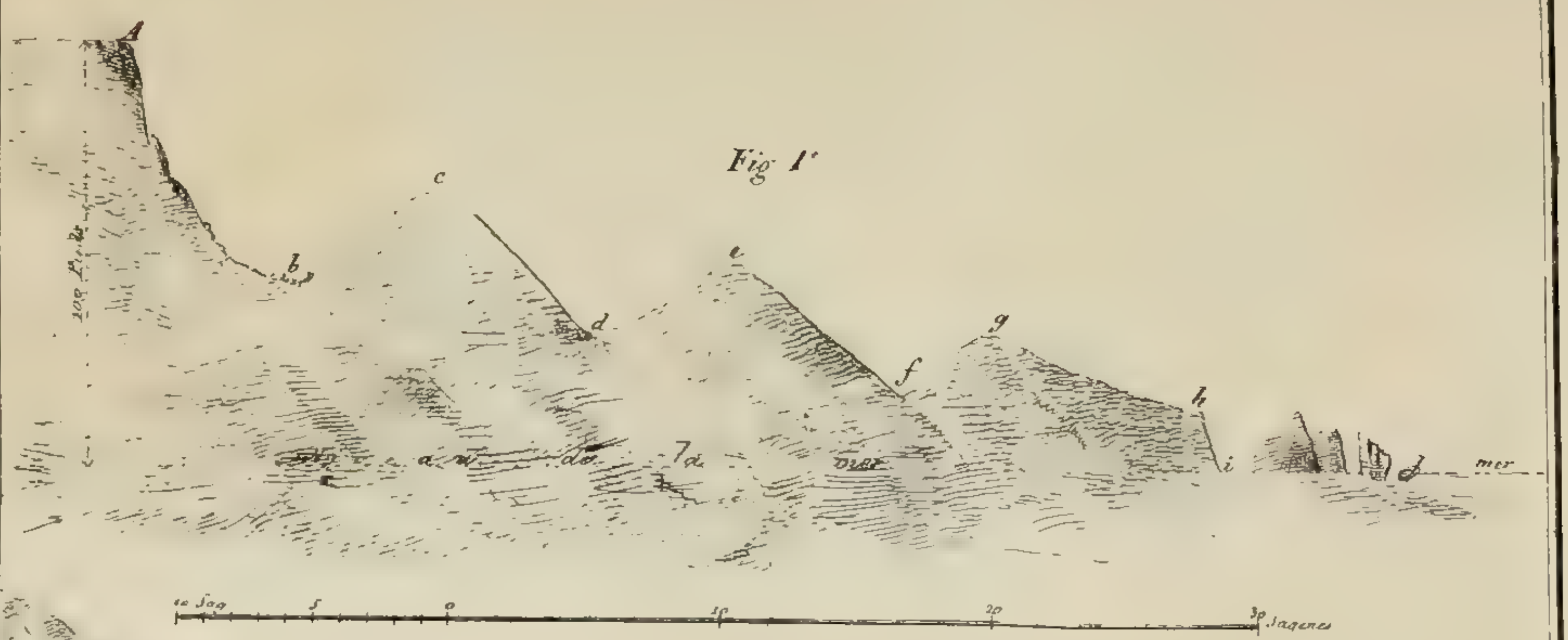

A
108 Pieds
b
c
d
e
f
g
h
i
j
mer
10 Sag. 5 0 10 20 30 Sagenes

Fig. 3.

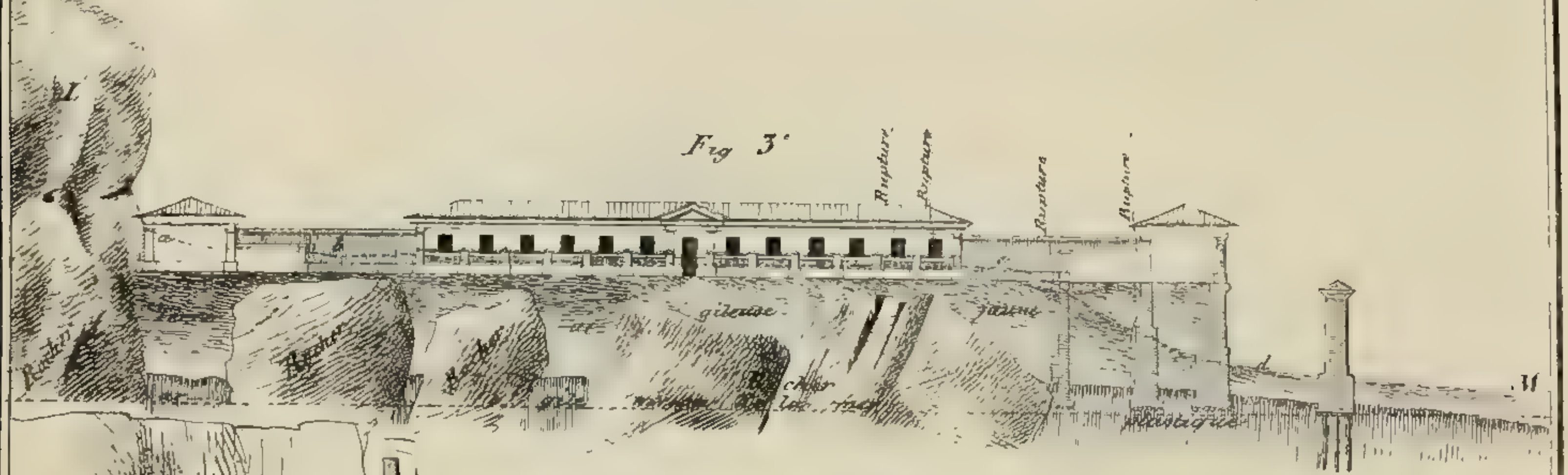

L
Rupture
Rupture
Rupture
Rupture
Rocher
Rocher
Rocher
gileuse
jaune
Rocher de la mer
Plastique
M

Fig. 2.

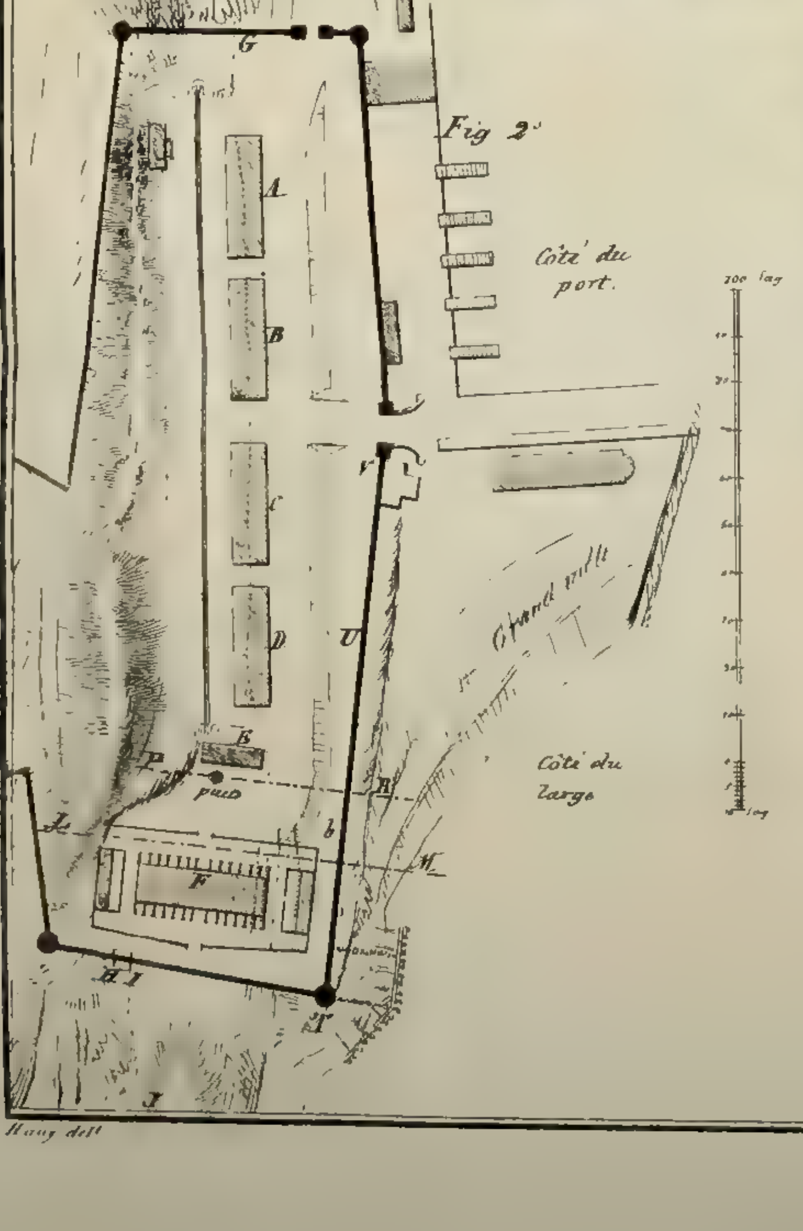
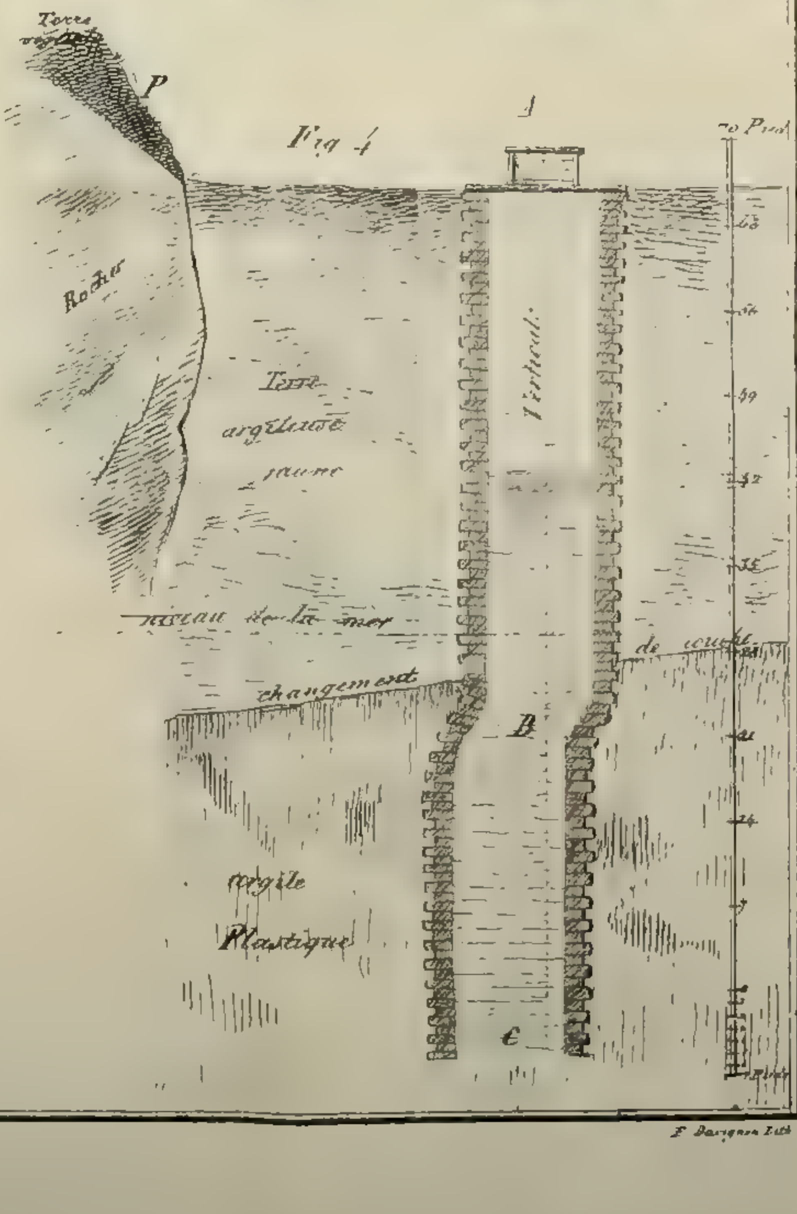

G
A
B
C
D
E
F
puits
P
R
b
L
M
H I
T
J
U
V
Côté du port.
Côté du large
Grand môle
100 Sag.
1 Sag.

Fig. 4.


Terre végétale
P
A
70 Pieds
63
56
49
42
35
28
21
14
7
0 Pied
Rocher
Terre argileuse jaune
Vertical
niveau de la mer
changement de couche
B
Argile Plastique
C

Haug del.

F. Dangnon Lith.

Hain del

Pl: II.

Fig 6.

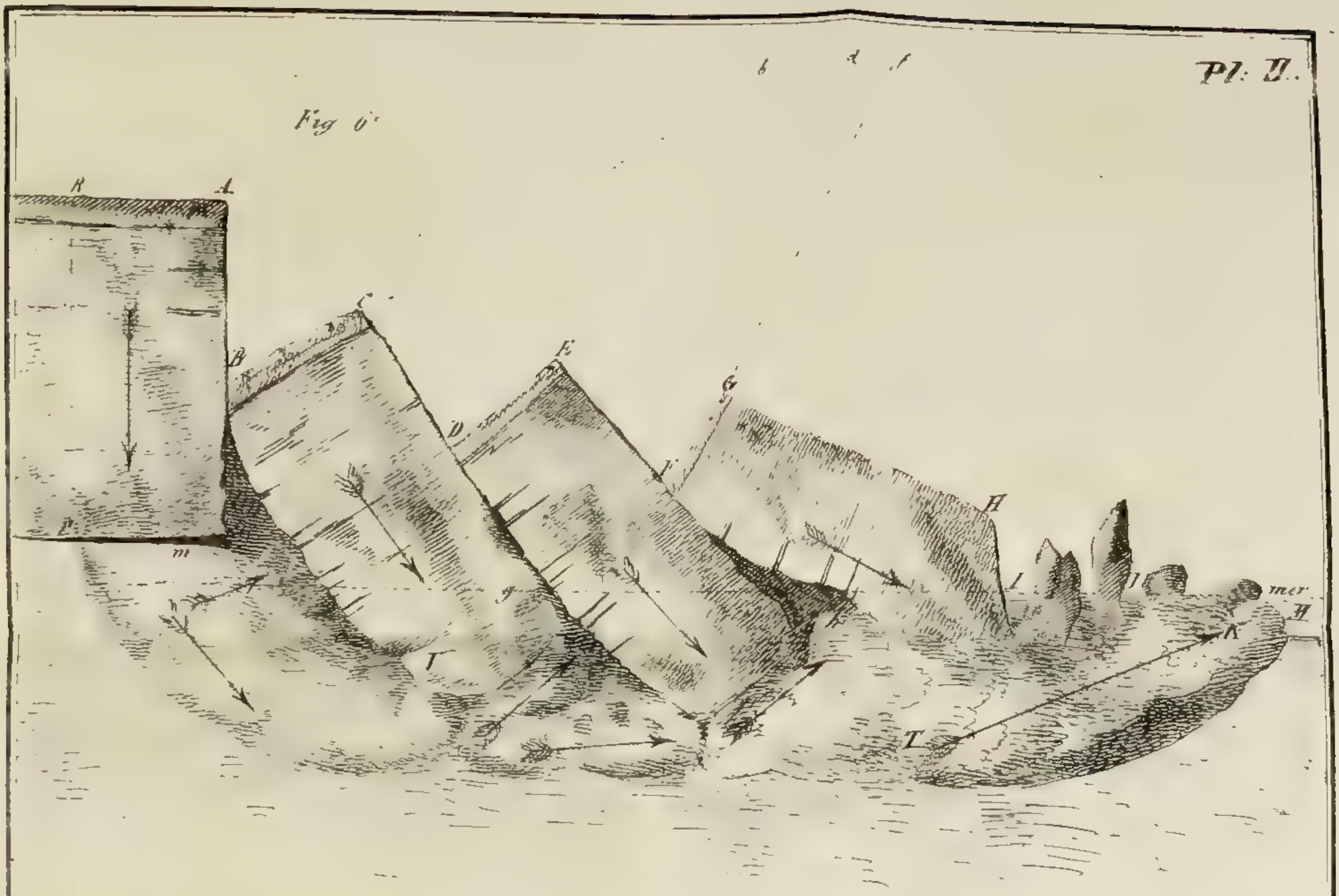

b
d
f
K
A
B
C
D
E
F
G
H
I
m
g
T
T
K
mer
H

Fig 5.

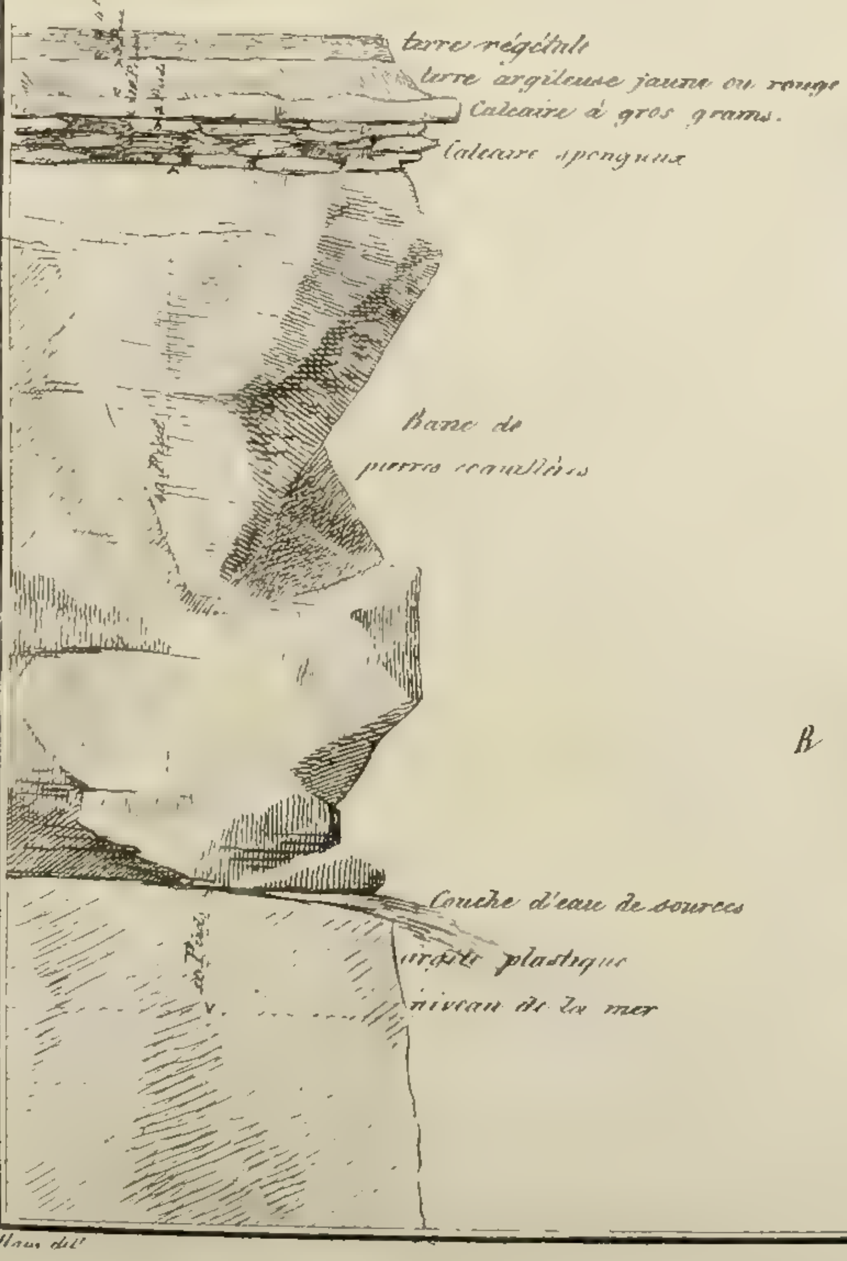

terre végétale
terre argileuse jaune ou rouge
Calcaire à gros grains.
Calcaire spongieux
Banc de pierres écaillères
Couche d'eau de sources
argile plastique
niveau de la mer

Fig 7

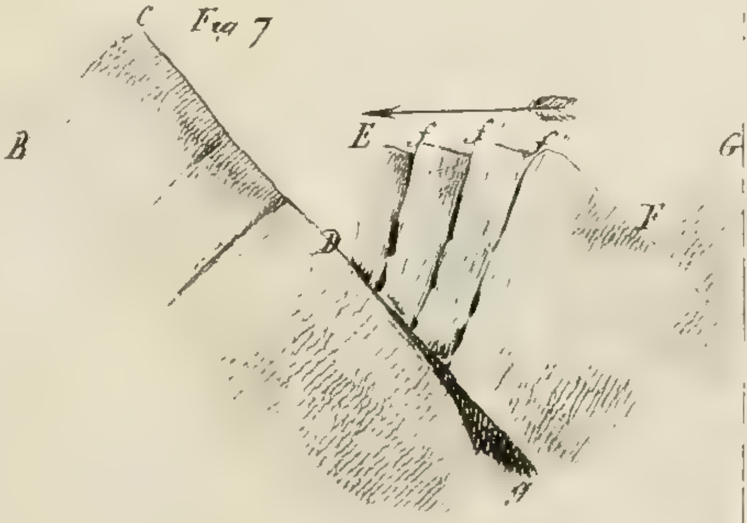
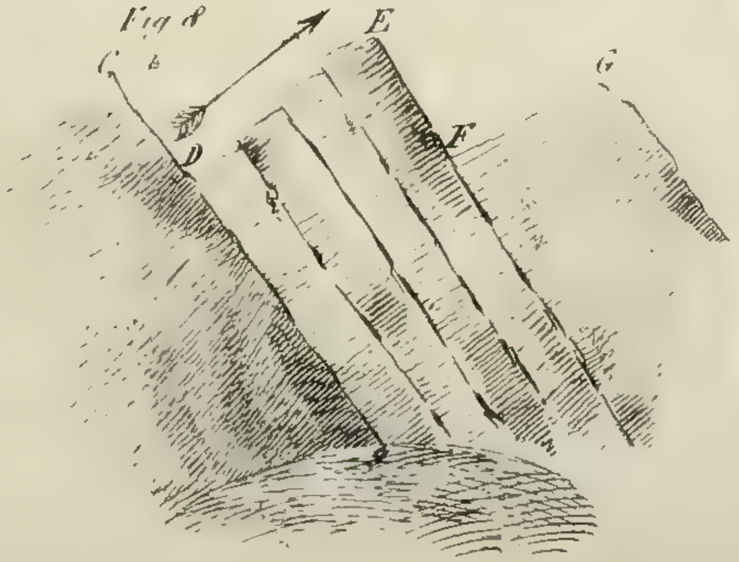

B
C
E
f
f
f
G
F
D
g

Fig 8



Haas del.

F. Darguen Lith.

ÜBER
EINIGE VÖGEL VON CHILI,
BEOBACHTET
IM
MÄRZ UND ANFANG APRIL 1827,
VON

F. H. VON KITTLITZ,
NATURFORSCHER DER EXPEDITION DES SENIAVIN.

(Gelesen den 3. März 1830.)

Bei der Kürze unseres Aufenthalts in diesem merkwürdigen Lande kann hier wol niemand eine Art Katalog der in dieser Jahreszeit die Küste bewohnenden Vögel erwarten, es kann immer nur die Rede seyn von dem zufälligen Ertrage der Bemühungen weniger Tage, worunter freilich diejenigen Arten zuerst erscheinen, die um jene Zeit am häufigsten sind. Inzwischen bedurfte es keines vollen Tages um mich in Erstaunen zu setzen über die Neuheit und Eigenthümlichkeit der dort vorherrschenden Formen, so sehr abweichend von denen anderer, uns mehr bekannter Theile, von Südamerika. Es scheint, dass nach der sehr abwechselnden Beschaffenheit des Bodens und der Vegetation jede der verschiedenen Gegenden auch ihre thierische Bevölkerung für sich hat: welcher Reichthum würde mir höchst wahrscheinlich zugeflossen seyn, wenn ich mehr zu sehen bekommen hätte, als die sehr einförmigen, waldlosen und zur Trockenheit besonders geneigten Umgebungen von Valparaiso. In denen von la Concepcion verweilten wir leider kaum über einen Tag, ich erinnere mich aber nirgends eine ähnliche

Mannigfaltigkeit und Menge von Vögeln gesehn zu haben, als in dieser höchst anmuthigen, an der herrlichsten Waldung reichen Gegend. Den grösseren Theil von denen, so mir überhaupt dort vorkamen, bemühte ich mich vergebens während unseres längeren Verweilens bei Valparaiso wiederzufinden.

Ein im Allgemeinen die Vögel von Chili sehr charakterisirender Zug ist die auffallend vorherrschende Neigung vieler Arten, mit Vernachlässigung des Fluges auf dem Boden zu laufen. Nicht nur, dass gewissen Gattungen diese ganz besonders eigenthümlich ist, auch von den verschiedenartigsten anderen sehen wir einzelne hier einheimische Arten, die ihren Gattungsverwandten zum Trotz die geschicktesten Läufer abgeben. Ich allein bemerkte in meiner kurzen Anwesenheit; zwei vorzugsweise auf der Erde laufende Falken, einen desgl. *Tamnophilus*, zwei Fringillen, einen *Opetiorhynchos*, den Vogel, welchen ich *Parus humicola* genannt habe, zu geschweigen ganz der 3 Arten meiner neuen Gattung *Pteroptochos*, denen bei sonst ganz sperlingsartiger Natur die Flugfähigkeit völlig zu fehlen scheint. Auch die *Psittacara Patagonica* (Less. Vag. de la Coquille), welche im südlichen Chili sehr häufig ist, bietet diese Erscheinung dar, da man doch früher nur in Neuholland laufende Papageyen vermuthete. Rechnet man noch dazu das besonders zahlreiche Vorhandenseyn solcher Gattungen deren Species man auch anderswo vorzüglich laufen sieht, als die von *Sturnus*, *Icterus*, *Alauda* u. s. w. und die häufigen Sumpfvögel, so wird man sich den eigenthümlichen Eindruck denken können, den es macht, die überwiegende Mehrheit einer so zahlreichen gefiederten Bevölkerung zu Fuss gehen zu sehen.

Durch schön gefärbtes Gefieder scheint sich im Allgemeinen die Vogelwelt von Chili nicht auszuzeichnen, wenigstens unter den von mir bemerkten, herrschten bei weitem bescheidene, meist braune und graue Farben vor, — unter den ganz alltäglichen ist es nur der im ganzen Lande sehr häufige *Sturnus militaris* mit seiner schönen hochrothen Brust und der kleine Kolibri mit goldglänzendem Scheitel, die dem Reisenden als schöne Vögel allenthalben auffallen müssen.

Die Anzahl derjenigen Vögel, so ich in jener Zeit mir selbst verschaffen konnte, belief sich im Ganzen auf 46 Species, 23 andere bemerkte und unterschied ich deutlich, ohne ihrer habhaft werden zu können. Drei der Eingesammelten besass ich bereits aus Brasilien, unter den übrigen scheinen sich nur sehr wenige zu befinden, die zugleich Bewohner jenes Landes sind, und im Allgemeinen habe ich viel Ursache zu glauben, dass beinahe die Hälfte dieser kleinen Sammlung aus solchen neuen Arten besteht, die wenigstens im Sommer 1829 noch gänzlich unbeschrieben waren. Gleichwohl halte ich mich vor der Hand nur ermächtigt, die nachfolgenden 12 Species als neu zu beschreiben und abzubilden, über die übrigen wage ich noch nicht zu bestimmen, denn leider befinden sich diejenigen Werke, so die neuerlich bekannt gewordenen Vögel Südamerikas enthalten, für den Augenblick nicht hier und können nur mit grossem Zeitaufwand herbeigeschafft werden. Ich muss es also der Zukunft anheimstellen, in einer Fortsetzung dieses nur zu früh abbrechenden Aufsatzes noch diese oder jene Beschreibung und Abbildung folgen zu lassen, wobei ich auch die bereits bekannten Arten namentlich aufzuführen, und diejenigen Bemerkungen, die ich hin und wieder über ihre Lebensart u. s. w. zu machen Gelegenheit hatte, in Kürze mit anzubringen gedenke.

Bei der Aufzählung der einzelnen Arten sey es mir um mehrerer Bequemlichkeit willen vergönnt, mich an gar keine systematische Ordnung zu binden, als welche bei ihrer geringen Anzahl doch von keinem Nutzen seyn würde.

Phytotoma silens mihi. (S. die Abbildung.)

Kennzeichen der Gattung: Körperbau sperlingsartig; benachbart den Gattungen *Fringilla* und *Colius.*

Schnabel kurz, gewölbt, ohne Rückenkante, beide Kinnladen spitzig, Spitze der Oberkinnlade unmerklich übergekrümmt, die Ränder von beiden stark eingezogen und sägenartig gezähnelt. Nasenlöcher rundlich, ganz am Grunde des Schnabels, von den Stirnfedern halb bedeckt. Zunge flach, obwohl fleischig, lanzettförmig zugespitzt, an der Spitze weder hornartig noch gefasert. (S. die Abbildung).

Füsse sperlingsartig, mit ziemlich starken Nägeln, die Seitenzehen gleich lang.

Die einzige Art, so ich von dieser bisher noch fast fabelhaften Gattung angetroffen, hat so wenig von der freilich sehr flüchtigen Beschreibung des *Phytotoma Rara* von Molina, dass ich mich nur durch den sägeförmigen Schnabelrand bewegen liess, sie für gattungsverwandt zu nehmen, obschon es *Phytotoma Rara* selbst wol auf keinen Fall seyn kann.

Die obere Figur der hierzu gehörigen Abbildung stellt das wahrscheinlich vollkommene Männchen vor, die andere wird jeder von selbst für das Weibchen zu halten geneigt seyn, aber leider kann ich diess nicht durch eigene Ueberzeugung bestätigen, da ich bei zwei mit den übrigen in Gesellschaft geschossenen Exemplaren von dieser grauen Farbe trotz der sorgfältigsten Untersuchung keine Spur von Eierstock wahrnehmen konnte, und deshalb damals sie mehr für diessjährige, vielleicht noch ungemauserte, Männchen hielt, wie es überhaupt im Herbst zuweilen sehr schwer hält, die Geschlechtstheile der Vögel zu unterscheiden. Späterhin bin ich aber in jener Meinung wieder wankend geworden durch die Bemerkung, dass bei diesen beiden Exemplaren der Schnabel durchgängig etwas kürzer ist, als bei den anderen, was wieder mehr auf das Weibchen hindeuten möchte; — unfehlbar wird gegenwärtig dieser Vogel bald anderweitig bekannt werden, wo alsdann das Räthsel sich lösen wird.

Er scheint um die Weinbeerenzeit gar nicht selten um Valparaiso zu seyn, wenigstens bemerkte ich ihn dreimal in jener Gegend, zweimal in kleinen Gesellschaften und immer in verschlossenen Obstgärten, wodurch mir besonders das letzte Mal seine Jagd unmöglich wurde. Wie es scheint, kommt er um diese Zeit als Strichvogel von weitem her, denn er verschwindet alsbald wieder spurlos.

Uebrigens ist diess einer der trägsten Vögel, die ich je gesehn habe. Gewöhnlich sitzt er auf den Spitzen der Bäume in sehr aufrechter Stellung unbeweglich; dadurch, dass einer geschossen wird, lässt sein Nachbar auf dem nächsten Baume sich noch gar nicht stören. Weder einen Gesang noch sonst irgend einen Ton habe ich von diesem Vogel vernehmen können, und ihm daher den Namen *Ph. silens* gegeben, zum Gegensatz von *Ph. Rara*, das bekanntlich nach seinem Geschrei so benannt ist.

Als besondere Eigenthümlichkeit im inneren Bau ist eine sehr stark ausgebildete blasenartige Erweiterung des Mastdarms zu betrachten, die vielleicht der Gattung überhaupt zugehört. Der Magen ist wenig muskulös, dafür sehr geräumig, und enthielt bei allen Ueberreste von Weinbeeren und grünen Blättern, welche letztere dem ganzen Darmkanal eine grüne Farbe gegeben hatten, und die Hauptnahrung des Vogels scheinen, ganz wie es von der Gattung *Phytotoma* gemeldet wird. Auch die Schnabelränder erscheinen grün gefärbt, was allerdings zu bestätigen scheint, dass er Pflanzen absägen soll, obschon ich den Vogel nie auf dem Boden, sondern immer nur auf den Spitzen der Obstbäume in Gärten bemerkt habe.

Beschreibung: (Männchen.) Schnabel und Füsse gelblich hornfarben, ersterer nach oben zu ins schwärzliche ziehend, Augenstern hoch braunroth, Hauptfarbe des Oberleibes lerchengrau, Stirn und Vorderkopf stark rostroth, begrenzt von einigen schwarzen Längsstrichen, ein undeutlicher weissgelber Augenstreif, Backen und Seiten des Halses schwarz mit mehr oder weniger untermischtem Weiss, Vorderhals und Kinn rein weiss. Ganzer Unterleib schön hell gelbröthlich, an den Seiten mehr oder weniger lerchengrau (letzteres vielleicht ein Zeichen des Herbstkleides). Flügel schwarz, eine unregelmässige weisse Querbinde der kleinen Deckfedern, die grösseren zum Theil weiss gespitzt und rostroth gerändert, so wie die hintern Schwungfedern. Die vordern haben einen weissen Spiegelfleck ungefähr in der Mitte ihrer Länge. Schwanzfedern braunschwarz, die beiden mittelsten heller und braungrau gerändert, die übrigen sind von der Wurzel bis über die Hälfte ihrer Länge auf der inneren Fahne rostroth. Die äusserste hat einen schmalen weisslichen Vorsaum.

(Weibchen? oder junges Männchen?). Schnabel etwas kürzer und mehr grau von Farbe, Augenstern und Füsse wie oben. Ganzes Gefieder lerchengrau, nur in der Mitte des Bauchs ein mehr oder minder deutlicher Anflug jener schönen röthlichen Farbe. Schwanzfedern wie am Männchen gefärbt, aber minder lebhaft.

NB. Ob die lappenartige Hervorragung an der Ecke des Unterkiefers, so auf der Abbildung angegeben, blos dieser Art oder vielleicht der ganzen Gattung eigen sey, kann ich, wie natürlich, nicht bestimmen. Sie ist von mehr häutiger als hornartiger Substanz und wird bald nach dem Tode des Vogels sehr undeutlich.

Ganze Länge	7 Zoll		Englisches Maas.
Länge des Schnabels vom Mundwinkel bis zur Spitze . .		5 Lin.	
„ „ Tarsus		7½ „	
„ der Mittelzehe (ohne Nagel)		6 „	
„ des Schwanzes	3 Zoll	1 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze .	3 „	5 „	

Schwungfedern: die 3te und 4te die längsten.

Pteroptochos.

Kennzeichen der Gattung: Habitus benachbart den Gattungen *Troglodytes* und *Myothera.* (Vergl. *Turdus cyanurus L.*, Büff. *pl. enl.* 355.

Leib merklich zusammengedrückt, zumal bei den kleineren Arten. Schenkel und Füsse besonders stark.

Flügel sehr kurz und fast zugerundet, werden grossentheils bedeckt von den langen und mit geschlissenen Fahnen versehenen Federn des Hinterkörpers. Schwanz ziemlich kurz, stufenartig geordnet, wird beständig aufwärts getragen wie bei *Troglodytes.*

Bartborsten hinter der Schnabelwurzel und sowohl über als unter den Augen, treten indess bei einer Art mehr hervor als bei der andern.

Schnabel gerade, mittelmässig lang und stark, allmählig zugespitzt und kaum merklich ausgeschnitten, oben erhaben mit stumpfer Rückenkante. Nasenlöcher seitwärts am Grunde des Schnabels, mit gewölbter hornartiger Bedeckung. Zunge wie bei der Gattung *Turdus.* (Siehe die Abbildung bei *Pt. Rubecula*).

Füsse verhältnissmässig sehr stark, Tarsus nur wenig länger als die Mittelzehe, die Seitenzehen gleich lang. Nägel gekrümmt und stark.

Diese Vögel scheinen von der Natur gar nicht zum Fliegen bestimmt zu seyn, ich sah sie ihrer kurzen Flügel sich nur zur Unterstützung des Laufs und zur Ausführung grosser Sprünge bedienen. Sie bewohnen vereinzelt das niedrige und besonders dichte Gebüsch, in dem sie sich sehr geschickt zu verstecken wissen und laufen mit ausserordentlicher Schnelligkeit über offene Stellen. Nur zuweilen sieht man sie auch auf niedrige Zweige hüpfen.

Ihre Nahrung besteht vorherrschend aus Pflanzensaamen, zu deren Verdauung sie viele kleine Steine mit zu verschlucken pflegen, auch ist ihr Magen ziemlich muskulös.

Ich bemerkte im Ganzen folgende drei Arten dieser Gattung:

Pteroptochos Rubecula m. (S. die Abbildung).

Nur ein einziges Männchen erhielt ich von dieser Art bei la Concepcion, und weil es im dichten Gebüsch mit grosser Gewandtheit lief, war ich genöthigt, aus so geringer Entfernung darauf zu schiessen, dass es fast ganz verdorben ward und ich Mühe genug hatte, wenigstens eine anschauliche Abbildung davon zu geben. Nachher habe ich in der Gegend von Valparaiso mich vergebens nach diesem Vogel umgesehen, obgleich ich dort die beiden folgenden ziemlich häufig fand.

In dem ziemlich grossen und muskulösen Magen fand ich fast lauter Sämereien mit kleinen Steinen vermischt.

Beschreibung: Schnabel braunschwarz, die Füsse mehr schwärzlich fleischfarben, als dunkelbraun, Augenstern dunkelbraun. Zwischen Schnabel und

Augen einzelne unregelmässig gestellte und sehr feine Bartborsten, die am obern Augenlied sind fast kaum zu bemerken. Hauptfarbe des Oberleibes ein nur wenig ins olivenfarbige spielendes Braun, welches an den äussersten Steissfedern ins Lohgelbe übergeht. Kehle und Vorderhals, so wie ein breiter Streif über den Augen schön gelbroth. Die Brust und ein Theil des Unterleibes erscheint auf aschgrauem Grunde schwarz und weiss gebändert, die meisten Federn sind nämlich rein weiss mit zwei bis drei sehr deutlichen schwarzen Querbinden und zuweilen mit aschgrauer Spitze, welche letztere Farbe besonders nach den Seiten hin vorherrscht. Weiterhin am Bauche wird diese Zeichnung nach und nach immer undeutlicher und verliert sich ganz an den Schenkelfedern, welche allmählig die lohgelbe Farbe der unteren Schwanzdecken annehmen. Flügel- und Schwanzfedern sind braunschwärzlich mit höherem Braun gerändert.

Ganze Länge	7 Zoll 6 Lin.	Englisches Maas.
Länge des Schnabels	7 „	
„ „ Tarsus	1 Zoll 2 „	
„ der Mittelzehe	7 „	
„ des Schwanzes	2 Zoll 6 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3 Zoll	

Die Schwungfedern waren an dem einzigen Exemplar zu sehr durch den Schuss beschädigt, um ihr Verhältniss erkennen zu lassen.

Pteroptochos albicollis m. (S. die Abbildung.)

Da dieser Vogel in Grösse und Gestalt so wenig Abweichung vom vorigen zeigt, war ich anfänglich ganz bereit, ihn für das Weibchen desselben zu nehmen, bald aber fand ich unter diesem Gefieder beide Geschlechter, und obgleich ich ziemlich viele der Art bei Valparaiso zu sehen bekam, stiess ich doch nie auf ein Exemplar mit rother Kehle, vielmehr zeigten diese Vögel unter sich gar keine Verschiedenheit des Gefieders. Ich habe leider die vorige Art zu wenig im Leben gesehen, um auch Habitus und Lebensart vergleichen zu können. Der gegenwärtige Vogel ist ziemlich häufig an den mit Strauchwerk bewachsenen Abhängen um Valparaiso herum, wo er fast beständig an der Erde umherläuft, nur selten sieht man ihn etwa einen niedrigen Ast besteigen. Fliegen sah ich ihn nie, wenn sr sich verfolgt glaubt, läuft er bis zum nächsten Versteck mit ausserordentlicher Schnelligkeit und gewöhnlich mit Hülfe der Flügel. In ruhiger Stellung trägt er den Kopf sehr aufrecht und den Schwanz fast ganz perpendikulär, auch selbst wenn er geht. Wenn er auf seiner Flucht einen hinlänglich dichten Strauch erreicht hat, behauptet er diesen Zufluchtsort mit vieler Hartnäckigkeit. Einen eigenen Anblick giebt seine grosse Geschicklichkeit bergan zu laufen auf den steilsten Höhen. Gewöhnlich sieht man diesen Vogel einzeln, zuweilen aber auch paarweis. Seine Lockstimme besteht aus einzelnen ziemlich rauhen Tönen, die er nicht sehr oft hören lässt. In dem muskulösen Magen bemerkte ich nur vegetabilische Stoffe mit kleinen Steinen vermischt. Der Körper ist bei dieser, wie bei der vorigen Art, auffallend zusammengedrückt; das Fleisch ist sehr weiss und hat einen ganz eigenthümlichen unangenehmen Geruch.

Beschreibung: Schnabel und Füsse braunschwarz, Augenstern schwarzbraun. Bartborsten merklich stärker und zahlreicher als an der vorigen Art, doch weniger ausgebildet am Weibchen, das sich sonst in Grösse und Gefieder durch nichts unterscheidet. Die Hauptfarbe des Oberleibes ist mehr rostbraun als am vorigen Vogel, am Vorderkopf ins Braunrothe ziehend und zum Theil mit eirunden weissen Spiegelflecken in jeder Feder, die gemeinschaftlich einen weissen Augenstreif bilden. Flügel- und Schwanzfedern sind braunschwärzlich mit sehr breiter rothbrauner Einfassung, an den Spitzen der ersteren zeigt sich hin und wieder eine undeutliche Zeichnung mit Schwarz und Weiss, welche vielleicht wie bei so vielen Vögeln das herbstliche Gefieder bezeichnet. Die Grundfarbe des Unterleibs ist ein schmutziges Weiss, welches an Kehle und Vorderhals ungefleckt erscheint, je weiter nach den Schenkeln zu aber je stärker braun überlaufen und mit ziemlich regelmässigen schwarzbraunen Querbinden hzogen ist, die an den Afterfedern und Schwanzdecken zuletzt sehr undeut- und viel kleiner werden.

anze Länge	7½ Zoll		Englisches Maas.
Länge des Schnabels		7½ Lin.	
,, ,, Tarsus	1 Zoll	2 ,,	
,, der Mittelzehe		6½ ,,	
,, des Schwanzes	2 Zoll	7 ,,	
,, ,, Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3 Zoll		

Schwungfedern: die 4te und 5te die längsten.

Pteroptochos megapodius m. (S. die Abbildung.)

Gewiss ein Vogel von auffallendem Ansehn, von dem man kaum vermuthen sollte, dass er so lange der Aufmerksamkeit der Naturkundigen entgangen sey. Denn er ist in den niedrigen Gebüschen um Valparaiso herum nichts weniger als selten, obschon er sich sehr versteckt hält und besonders die undurchdringlichen Dickichte einer Art von Bambusa (Linné) liebt, welche in jener Gegend grosse Stellen bedecken.

Das Weibchen ist etwas kleiner als das Männchen, und mit wenigern und schwächeren Bartborsten an Schnabel und Augenliedern versehen, sonst konnte ich keinen Unterschied zwischen beiden finden. Wie der vorhergehende Vogel pflegt auch dieser nur sehr schnell und oft mit Hülfe der Flügel zu laufen, wenn er verfolgt wird. Fliegen sah ich ihn ebenfalls nie, auch nicht etwa von einem Zweige zum andern hüpfen, nur dann und wann einmal erscheint er, um sich umzusehen, mit einem plötzlichen Sprunge auf irgend einem hervorragenden Stock oder Ast, so wie die Abbildung ihn darstellt. Seine gewöhnliche Stimme, so wahrscheinlich sein Gesang ist, besteht aus einzelnen Tönen, die dem Knarren und Pfeifen eines ungeschmierten Rades nicht unähnlich sind, sie folgen in grossen und unregelmässigen Zwischenräumen auf einander und werden allmählig immer tiefer. Wahrscheinlich rührt auch von diesem Vogel ein gewisses

Geschrei her, welches aus einem einzigen oft wiederholten und sehr dumpfen Tone besteht, und welches ich oft in jenen Dickichten gehört habe, ohne mich überzeugen zu können, von wem es ausgehe.

Bei allen, die ich zu untersuchen Gelegenheit hatte, bestand der Inhalt des muskulösen Magens zumeist aus Sämereien mit kleinen Steinen vermischt, doch fanden sich darunter auch Beeren von Myrthen u. s. w. und einzelne Stücke von grossen Insektenlarven.

Beschreibung: Schnabel und Füsse braunschwarz, die letzteren auffallend stark, alle drei Vorderzehen fast von gleicher Länge, die Nägel sehr lang und stark, besonders der der Hinterzehe, dabei nur leicht gekrümmt, zusammengedrückt und ganz stumpf. Starke Bartborsten und Augenwimpern. Augenstern dunkelbraun. Hauptfarbe des Gefieders dunkel rostgrau, am Rücken ins Braune übergehend, an der Oberbrust rostroth überlaufen, ein Streif über den Augen und ein desgleichen breiterer vom unteren Schnabelwinkel an den Seiten des Halses herab roströthlich weiss. Die Farbe des Unterleibs ist sehr gemischt, auf roströthlich aschgrauem Grunde stehen grosse röthlich weisse Flecken mit unregelmässigen dunkelbraunen Querbinden versehen, gegen die Seiten hin zeigt sich dabei ein stärkerer braunrother Anflug, so wie an den langen und flockigen Steissfedern, die an den äussersten Spitzen wieder undeutliche schwärzliche und weissliche Querbinden zeigen. Die grossen Flügelfedern sind von einem fahlen Braun und heller als der Rücken, die Schwanzfedern dunkelbraun, gegen die Ränder hin etwas heller.

Ganze Länge	9 bis 10 Zoll		Englisches Maas.
Länge des Schnabels	1 „	1 Lin.	
„ „ Tarsus	1½ „		
„ der Mittelzehe	1 „		
„ des Schwanzes	3 „	1 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3 „	7 „	

Schwungfedern: die 4te und 5te die längsten.

Troglodytes paradoxus. m. (S. die Abbildung.)

Weil dieser Vogel sowohl in Haltung und Lebensart, als selbst, mit Ausnahme des Schnabels, auch in der Körperbildung so ganz die Eigenschaften der Gattung *Troglodytes* zeigt, so habe ich ihn vor der Hand noch nicht von derselben trennen wollen.

Auf jeden Fall ist es eine sehr merkwürdige Art, schade, dass ich nur ein weibliches, wahrscheinlich junges und noch dazu sehr beschädigtes Exemplar erhalten konnte. Ich glaube ihn im Ganzen zweimal gesehen zu haben, beide in der Gegend von la Concepcion, wo er sehr dickbuschigte Sträucher am Rande der Waldungen bewohnt. Hier sucht und findet er seine Sicherheit im Verstecken, so dass man sehr nahe bei ihm stehen kann, ohne ihm etwas anhaben zu können. Zuerst aber verräth ihn seine höchst sonderbare Stimme, die ein und denselben Laut mehrmals hinter einander in einem ungewöhnlich hohlen seltsamen Tone ausruft, und die man anfänglich vielmehr einem Frosch, als einem Vogel zuschreiben möchte. Er schlüpft sehr gewandt im Dickicht umher, und hat die Stellungen unseres Zaunkönigs. Den Magen fand ich etwas muskulös, mit vielen kleinen Käfern und Heuschrecken angefüllt.

Beschreibung: Schnabel grade, mittelmässig lang, spitz, unmerklich ausgeschnitten, an den Seiten zusammengedrückt, die Rückenkante bietet zum Theil eine erhabene längliche Fläche dar, und hinter dieser eine kammartige Erhöhung, welche einen Einschnitt in die Stirn hervorbringt. Die Nasenlöcher, sehr seitwärts gestellt am Grunde des Schnabels, sind von einer grossen convexen Hornhaut fast ganz verborgen. Zunge wie bei *Troglodytes* u. a. Die Füsse sind ungewöhnlich stark, zeigen aber sonst keine Abweichung von denen der Troglodyten. Flügel-, Schwanz- und Steissfedern sind fast ganz wie an der vorherbeschriebenen Gattung, welcher dieser Vogel überhaupt ungemein nahe kommt, und ich würde ihn ohne Bedenken mit dahin gezählt haben, wenn er nicht die Flugfähigkeit gleich andern Vögeln besässe, auch zum Laufen nicht eben angewiesen zu seyn scheint, wobei noch die Verschiedenheit seiner Nahrung in Betracht kommt.

An dem einzigen Exemplar, welches ich schoss, war der Schnabel einfarbig aschgrau, die Füsse sehr hell fleischfarben, der Augenstern dunkelbraun, das Gefieder am Oberleibe wie das eines jungen Vogels unregelmässig gewellt mit dunkelschiefergrau und rostgelblich, Flügel und Schwanz dunkelbraun, fast alle Federn gegen die Spitze hin mit einer undeutlichen schwarzen und rostgelblichen Zeichnung, Vorderhals und Brust aschgrau, an der Kehle ins Weissliche ziehend, der übrige Unterleib lohgelb.

Ganze Länge	5½ Zoll		Englisches Maas.
Länge des Schnabels		5 Lin.	
„ „ Tarsus		7½ „	
„ der Mittelzehe		6 „	
„ des Schwanzes	2 „	1 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze .	2 „	3½ „	

Schwungfedern: die 3te die längste.

Synnalaxis humicola, m. *) (S. die Abbildung.)

Ziemlich häufig auf den Bergen um Valparaiso, wo man den Vogel gewöhnlich paarweis antrifft; er lebt hier auf der Erde zwischen Gesträuch, läuft

---

*) Ich hatte anfänglich diesen Vogel so wie den nachfolgenden, wegen der grossen Uebereinstimmung ihrer Lebensart mit der der Gattung *Parus*, zu derselben gezählt, und erst unmittelbar vor Abdruck dieses Bogens konnte ich mich vollkommen überzeugen, dass beide doch wol nicht von denjenigen Vögeln getrennt werden dürfen, die bereits unter dem Namen *Synnalaxis* beschrieben sind. *Synn. Tupinieri* von Lesson, davon sich ebenfalls ein Exemplar in meiner Sammlung befindet, zeigt in Habitus und Lebensart dieselbe Annäherung an die Meisen, auch sein Schnabel ist eigentlich von den gegenwärtigen nicht verschieden, dadurch aber, dass die Nasenlöcher mit ihrer häutigen Bedeckung nur eines kleinen Theils, dahingegen am gegenwärtigen Vogel fast ganz, mit kleinen Federn bewachsen erscheinen, hatte ich mich bewegen lassen, beide für verschiedener zu halten, als sie wirklich sind. Auch die, wiewohl mehr muthmassliche, Bemerkung Temminks, dass die Vögel der Gattung *Synnalaxis* vorherrschend die Verborgenheit lieben sollen, was bei diesen 3 Arten sich durchaus nicht bestätigt, hatte mit zu diesem meinem Irrthume beigetragen.

schnell und viel, wobei er den Schwanz sehr aufrecht zu tragen pflegt, diess und die langen Steissfedern, auch einigermassen die Form der Flügel, geben ihm eine gewisse Aehnlichkeit mit den Arten von *Pteroptochos*, die mit ihm einen Aufenthalt haben. Doch unterscheidet er sich sogleich von ihnen durch seinen gut ausgebildeten Flug, den er auch auf der Flucht dem Laufen vorzieht, und im Allgemeinen ziemlich mit den Meisen gemein hat, wie überhaupt sehr vieles in Haltung und Betragen. Seine Lockstimme hat in den einzelnen Tönen Aehnlichkeit mit der unseres Zaunkönigs, zuweilen lässt er wie eine Art Gesang eine Menge dieser scharfen Töne rasch auf einander folgen, was wol nichts weiter, als ein verstärkter Lockton ist.

In dem sehr muskulösen Magen fand ich meist Körner mit vielen kleinen Steinen, doch auch Insekten und Ueberreste von Beeren.

Zwischen Männchen und Weibchen konnte ich keinen äusserlichen Unterschied finden; wiewohl ich einen ziemlich auffallenden in der Grösse unter den männlichen Individuen wahrnahm.

Beschreibung: Schnabel schwärzlich, Füsse hornfarben, Augenstern dunkelbraun. Gefieder an Scheitel, Rücken, Schultern, Steiss und grossen Flügeldecken braunröthlich grau, an Hals und Brust mehr aschgrau, letztere mit etwas undeutlichen helleren Längsstreifen gesprenkelt; über den Augen ein grosser röthlich weisser Streif, gegen die Stirn und Scheitel hin von einer Reihe schwarzer Längsstrichelchen begrenzt, deren andere sich auf weisslichem Grunde auch am Kinn zeigen; diese Federn haben etwas zugespitzte Form, wie sie sonst besonders der Gattung *Malurus* eigen zu seyn pflegt. Wangen und Zügel schwärzlich, weisslich gemischt. Die keilförmig geordneten, aber nicht zugespitzten Schwanzfedern sind braunschwarz, die beiden äussersten rostroth gerändert, die Schwungfedern dunkelbraun, die kleinen Flügeldecken zeichnen sich durch ein ziemlich starkes Rostroth aus, welche Farbe, nur in etwas schwächerem Tone, auch an den Bauch-, Seiten- und Afterfedern sich zeigt.

Ganze Länge	6 Zoll		Englisches Maas.
Länge des Schnabels		6 Lin.	
„ „ Tarsus		7 „	
„ der Mittelzehe		5 „	
„ des Schwanzes	3 „		
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	2½ „		

3te Schwungfeder die längste.

Synnalaxis Aegithaloïdes m. (S. die Abbildung).

Hier eine noch mehr an die Meisen angränzende Art; sie bildet auf die auffallendste Weise den Uebergang zu dieser mehr der nördlichen Hemisphäre gehörenden Form, so durch gegenwärtige Gattung wahrscheinlich in Südamerika ersetzt wird. Erst spät habe ich mich entschliessen können, den hier erwähnten Vogel nicht wirklich noch zu jenen zu zählen, so sehr gleicht er ihnen an Gestalt, Betragen und Lebensart, auch die Bildung des Schnabels ist im Allgemeinen ganz die der Gattung *Parus*, nur die Form der Nasenlöcher hat mehr von *Synnalaxis*, indem sie länglicht und am obern Rande sehr dicht mit kleinen Federn bewachsen sind, inzwischen zeigt sich auch hier ein unverkennbarer Uebergang der einen Form in die andere.

Diesen Vogel sieht man nie auf der Erde laufen, sondern ganz nach Art der Meisen das niedrige Gebüsch durchstreichen, gewöhnlich zu etlichen Individuen gesellschaftlich, welche eine gewisse Verbindung unter sich halten, wobei man aber die häufigen Locktöne unserer Meisen vermisst. Nur sehr selten hört man seine Stimme, die der unserer Blaumeise nicht unähnlich ist. Er ist ziemlich gemein auf den Höhen um Valparaiso. Ich habe keine Verschiedenheit im Gefieder bemerken können.

Beschreibung: Schnabel schwärzlich, an der Wurzel fleischfarben, Füsse schiefergrau, Augenstern schwarzbraun. Scheitelfedern schwärzlich, mit grossen rostbräunlichen Spitzenflecken. Ueber den Augen ein weisser Streif, durch dieselben ein undeutlicher schwärzlicher. Wangen und Hinterhals aschgrau und weiss gemischt, Kehle weisslich, welche Farbe sich allmählich in der mehr rostgrauen des Unterleibes verliert, der Rücken ist von etwas dunklerem Rostgrau, so an den Schwanzdecken sich wieder etwas heller zeigt. Die Form des Schwanzes ist sehr eigenthümlich. Obgleich seiner Struktur nach keilförmig, erscheint er doch gabelförmig dadurch, dass die beiden ungewöhnlich langen an der Wurzel sehr breiten, nach der Spitze zu aber immer schmäler werdenden Mittelfedern gewöhnlich etwas auseinander stehen, indess die viel kürzeren und sehr stufenweis geordneten Seitenfedern sich zumeist unter jenen verbergen. Diese letzteren haben an der Spitze eine kleine Verlängerung des Schafts mit kaum sichtbarer Fahne, fast wie an der *Sylvia spinicanda* oder *Synnalaxis Tupinieri* (Less. Voy. de la Coquille). Diese Schäfte sind überall schwärzlich; sonst sind der Farbe nach diese Federn von der Wurzel an schief getheilt, die innere Abtheilung erscheint braunschwarz, die äussere an der äusseren Fahne weiss, an der inneren hellgraulich. Da der weisse Streif immer an Grösse mit der Länge der Federn abnimmt, so zeigen die beiden zunächst den mittelsten nur einen schmalen Rand von dieser Farbe, die mittleren selbst sind gegen die Spitze ganz schwarz und nur an den breiteren Theilen rostgrau gesäumt.

Ganze Länge	6½ Zoll				Englisches Maas.
Länge des Schnabels			3½	Lin.	
„ „ Tarsus			4½	„	
„ der Mittelzehe			3½	„	
„ des Schwanzes	3	„	5	„	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	2	„	2	„	

2te Schwungfeder die längste.

Opetiorynchos rupestris m. (S. die Abbildung).

Ein häufiger Bewohner der felsigen Meeresufer, liebt besonders die an den Spitzen der Vorgebirge von der Brandung aufgethürmten Steinmassen, zwischen deren Klüften er mit grosser Leichtigkeit und ohne die mindeste Furcht vor den spritzenden Wellen umherschlüpft. Er hüpft und läuft schnell und trägt den Schwanz beim Hüpfen etwas aufwärts. Sonst habe ich ihn einzeln auch an steinigten Bächen und häufig an seichten Ufern der Küstenflüsse bemerkt, wahrscheinlich aber wird er nur die Nachbarschaft des Meeres bewohnen. An steilen Felsenwänden, die um seine Lieblingsplätze nie fehlen, sieht man diesen Vogel oft sich mit den Füssen anklammern, auch mit einiger Bewegung der Flügel ganze Strecken weit klettern, so dass ich anfänglich gar in ihm eine Art *Tichodroma* zu finden glaubte. Er lebt ungesellschaftlich, da er aber häufig ist, finden sich an den Plätzen, die er liebt, gewöhnlich mehrere zu gleicher Zeit. Seine Lockstimme, die man nicht sehr oft hört, hat einen scharfen Ton, im Ganzen aber wenig auffallendes. In dem ziemlich muskulösen Magen fand ich meist sehr kleine Conchylien und Wasserinsekten, doch auch, besonders bei einem Exemplar, verschiedene kleinkörnigte Sämereien.

Beschreibung: (Männchen). Schnabel und Füsse sehr bräunlich fleischfarben, Augenstern schwarzbraun. Hauptfarbe oben dunkelbraun, unten bräunlich aschgrau, an der Brust mit schmalen weisslichen Längsstrichen bezeichnet. Ein starker und langer Streif über den Augen, Kehle und ein Fleck an den Seiten des Halses ziemlich rein weiss, Schwungfedern braunschwärzlich, gegen die Wurzeln hin mit einer schiefen und wenig zum Vorschein kommenden braungelben Binde bezeichnet. In dem sehr stufenförmigen Schwanze sind alle Federn zugespitzt, die drei äussersten mit einer schrägen weisslichen Zeichnung, sonst braunschwärzlich.

Das Weibchen ist wenig verschieden, es zeigt im Ganzen nur hellere Farben und am Bauche mehr schmutzig weiss, auch fehlen ihm die kleinen Längsstreifen an der Brust.

Ganze Länge	8 Zoll 3 Lin.	Englisches Maas.
Länge des Schnabels	1 Zoll	
„ „ Tarsus	1 Zoll	
„ der Mittelzehe	6 „	
„ des Schwanzes	3 Zoll 2 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3 Zoll 7 „	

Schwungfedern: die 3te und 4te die längsten.

Muscicapa Parulus m. (S. die Abbildung.)

Ein in Aufenthalt und Lebensart den Synnalaxen benachbarter Vogel, den ich indess gleich häufig an beiden von uns berührten Punkten von Chili antraf. Man bemerkt ihn fast überall sowohl in den schönen Waldungen bei la Concepcion, wo er bald hoch bald niedrig auf den Bäumen sich zeigt, als auf dem dürren Gestrüppe der Höhen von Valparaiso, und ganz nahe bei den Wohnungen. Gestalt und Betragen sind ganz meisenartig, ich habe daher nicht unterlassen, durch die beigefügte Zeichnung des Schnabels zu zeigen, dass er dennoch eine wirkliche *Muscicapa* von der Untergattung mit längeren Beinen ist, deren in Brasilien ziemlich zahlreiche Arten ebenfalls im Habitus viel Meisenartiges zeigen. Auch fand ich in dem kleinen häutigen Magen nichts als sehr kleine Insekten. Man hört wenig Stimme von diesem Vogel, nur zuweilen einen leisen Lockton, welcher dem unserer Blaumeise nicht unähnlich ist.

Im Gefieder scheint kein Unterschied des Geschlechts stattzufinden, bei den Jungen ist die Zeichnung am Kopfe weniger regelmässig und nicht so schwarz.

Beschreibung: Schnabel und Füsse schwärzlich, Iris neapelgelb, Grundfarbe des Kopfes und Halses aschgrau, mit schwarz und weiss bezeichnet, Scheitelfedern in eine spitzige Haube verlängert, die die meiste Aehnlichkeit hat mit der von *Parus cristatus*. Hals und Brust fein schwarz gestrichelt. Unterleib blassgelb, Oberleib olivengrau; Flügel und Schwanz fahl braunschwärzlich.

Ganze Länge	4 Zoll	3 Lin.	Englisches Maas.
Länge des Schnabels		4 „	
„ „ Tarsus		5½ „	
„ der Mittelzehe		3 „	
„ des Schwanzes	1 Zoll	7 „	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	1 „	7 „	

3te Schwungfeder die längste.

Muscicapa Pyrope m. (S. die Abbildung).

Es ist wol nicht zu verkennen, dass dieser Vogel zu der Untergattung *Tyrannus* gehört, wie schon die hier abgebildete Struktur der Spitzen der ersten Schwungfedern andeutet, die auch hier wie bei *Muscicapa Tyrannus*, dem weiblichen Geschlechte ganz zu fehlen scheint. Die gegenwärtige Art sah ich häufig bei Tomé in der Bay von Concepcion; hier flog sie einzeln und paarweis am Rande der bebuschten Anhöhen, auch in der Nachbarschaft der Häuser, und zeigte wenig Scheu. Um Valparaiso war sie selten, ich bekam sie dort nur ein- oder zweimal einzeln zu Gesicht und nie zum Schuss. Zwischen beiden Geschlechtern scheint kein Unterschied im Gefieder, und der in der Grösse nur zufällig zu seyn; ein Männchen fand ich fast um einen Zoll kürzer als das andere. Dieser Vogel sitzt gern auf den Wipfeln der kleinen Bäume, von da er von Zeit zu Zeit in die Luft emporflattert, um Insekten zu fangen. Einen Gesang hörte ich in dieser Herbstzeit nicht von ihm, wol aber einen einfachen flötenden Lockton, der eine schöne Stimme anzukündigen scheint.

Im Magen der von mir geschossenen fand ich nur mancherlei Insekten.

Beschreibung: Schnabel und Füsse schwarz, Augenstern prächtig feuerfarben. Ganzes Gefieder sehr weich und langfederig, oben aschgrau, unten weiss, an der Brust graulich, an den Seiten ein wenig rostfarbig angelaufen; Flügel mattschwarz, mit weissgrauer Einfassung der grösseren Federn. (NB. Besondere Bildung der ersten Schwungfedern am Männchen, s. die Abbildung). Schwanz gerade, aschgrau, mit schwärzlichen Schäften und weisslicher Einfassung der äusseren Fahnen.

Ganze Länge	8½	Zoll			Englisches Maas.
Länge des Schnabels			7	Lin.	
„ „ Tarsus	1	„			
„ der Mittelzehe			5	„	
„ des Schwanzes	3	„	6	„	
„ „ Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	4	„	5	„	

3te Schwungfeder die längste.

Fringilla Diuca (*Molina*). (S. die Abbildung).

Der eigentliche Sperling von Chili, in Körperbau, Habitus und ganzer Lebensart unserer *Fringilla domestica* auffallend ähnlich. Man trifft ihn in grossen Truppen, ganz wie diese, auf den Fahrwegen und in der Nähe der Häuser, auch in kleinen Gesellschaften überall auf den trockenen Höhen der Berge, welche die Küste begrenzen. Er setzt sich gern auf die Spitzen der niedrigen Büsche und läuft viel auf dem Boden. Seine häufigen Locktöne sind denen unseres Sperlings ziemlich ähnlich, seinen von Molina so gepriesenen Gesang habe ich nicht vernehmen können, wahrscheinlich weil die Jahreszeit nicht darnach war. In seinem Magen findet man meist Samenkörner, doch auch Insekten.

Der Unterschied im Gefieder, je nachdem die Hauptfarbe mehr ins Bläuliche oder ins Braungraue sich zieht, scheint mehr das Alter als das Geschlecht zu bezeichnen, man findet wenigstens auch Weibchen von sehr blauer und Männchen von ganz bräunlicher Farbe. Das abgebildete Exemplar gehört allerdings mehr der bläulichen Varietät an, obgleich man viel stärker ins blaue spielende, oder wenigstens rein aschgraue häufig findet; beide Verschiedenheiten sieht man unregelmässig durch einander gemischt.

Beschreibung: Schnabel und Füsse bläulich hornfarben, Augenstern dunkelbraun. Hauptfarbe bläulich aschgrau, mehr oder weniger braungrau überzogen, Kehle und Mitte des Bauches rein weiss, die erstere sehr scharf in der Färbung begrenzt, Afterfedern rostroth, die untern Schwanzdecken rostroth und weiss gemischt. Flügel braunschwärzlich, alle Federn graulich eingefasst. Schwanz gerade, von der Farbe der Flügel, die äussersten drei Federn mit Weiss bezeichnet, besonders auf der inneren Fahne.

Ganze Länge	6 Zoll	5 Lin.	Englisches Maas.
Länge des Schnabels vom Mundwinkel bis zur Spitze		5 ,,	
,, ,, Tarsus		7½ ,,	
,, der Mittelzehe (ohne Nagel)		5½ ,,	
,, des Schwanzes	3 Zoll	7 ,,	
,, ,, Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3½ ,,		

Schwungfedern: die 2te und 3te die längsten.

Crypturus perdicarius m. (S. die Abbildung.)

Ein in der ganzen Umgegend von Valparaiso häufiges und sehr geschätztes Wild, lebt in kleinen Gesellschaften an den Abhängen der mit kurzem Gestrüpp bedeckten Höhen, wo es fast wie unser Rebhuhn sich vor seinen Feinden anzudrücken pflegt, im Ganzen aber ist es flüchtiger als diess und lässt sich selten ganz nahe kommen. Erst nachdem ein Individuum aufgescheucht worden, gehen nach und nach auch die anderen auf, so dass man nicht leicht mit Bestimmtheit die Zahl der ganzen Gesellschaft erfährt. Dabei haben sie ungefähr den Flug unseres Rebhuhns, und wenn man das klappernde Geräusch, welches dieses im Aufgehn verursacht, hier nicht völlig wiederfindet, so fällt dafür destomehr das eigene durchdringende Geschrei dieser Vögel auf, ohne welches sie nie sich aufjagen lassen. Man glaubt sehr deutlich die Sylben: hihihihihi! — zehihe! — zehihe! — zehihe! zu hören, die in einem äusserst starken, schneidenden Tone ausgerufen werden, die letzteren Worte durch regelmässige Pausen getrennt, immer mehr abnehmend und gleichsam ersterbend.

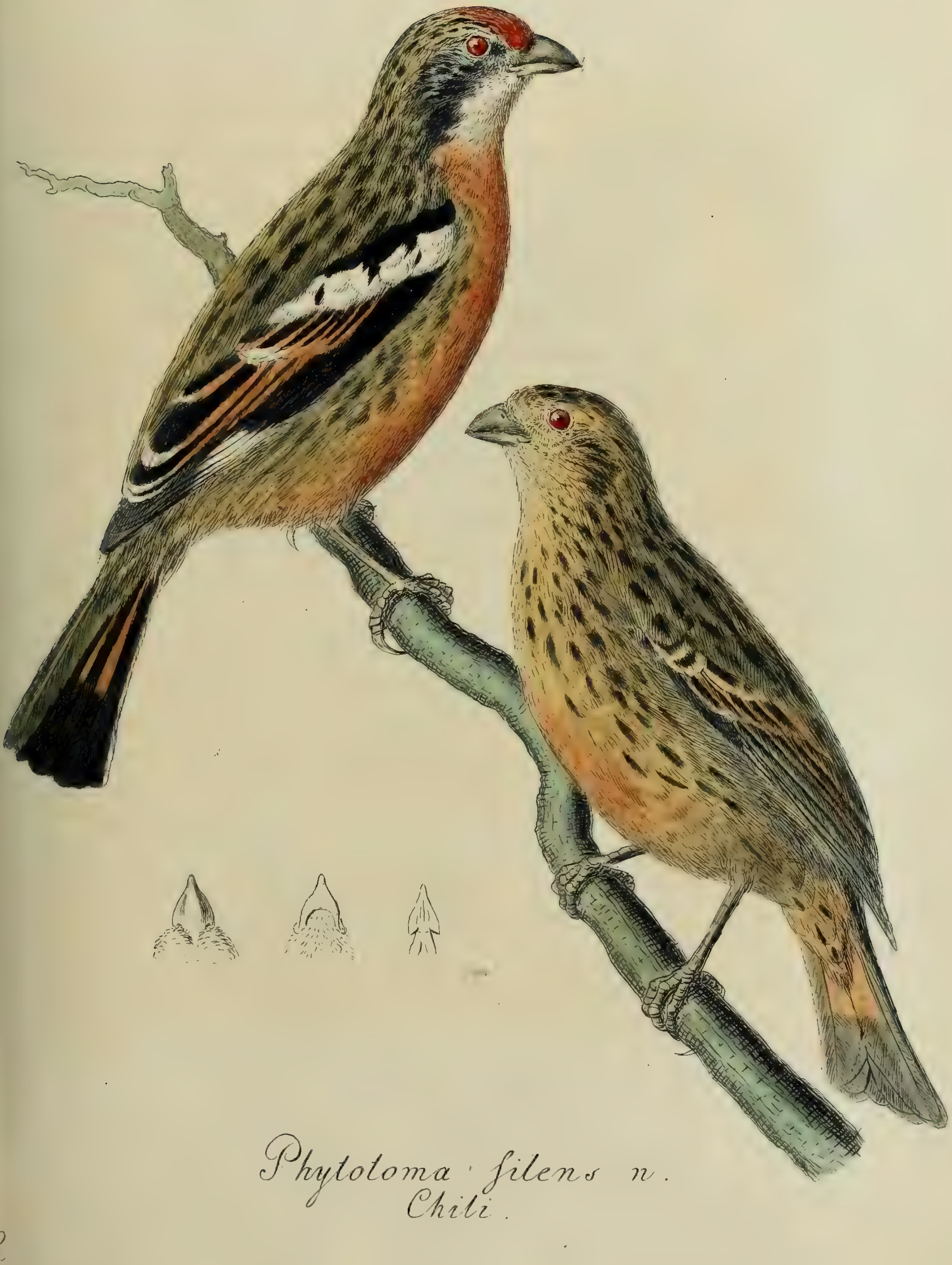
Weil ich diesen Vogel für gemein und längst bekannt hielt, vernachlässigte ich seine Jagd, und schoss überhaupt nur ein Männchen davon. Es scheint nicht, dass zwischen den Geschlechtern ein auffallender Unterschied sey. An dem Geschossenen fand ich den Kopf und Magen völlig hühnerartig (den letzteren sehr muskulös) und mit lauter grasartigen Sämereien angefüllt.

Beschreibung: Schnabel unmerklich kürzer als der Kopf, stärker gebogen, als an den meisten Gattungsverwandten, besonders in der Mitte mit einer plötzlichen Beugung, die Nasenlöcher ziemlich weit ab von der Schnabelwurzel, mit welcher sie durch eine aufgetriebene Haut in Verbindung stehen. — Schnabel fleischfarben, oben schwärzlich, die Füsse hellfleischfarben, Augenstern dunkelbraun. Die etwas längeren und breiteren Federn des Oberkopfs rostbraun, jede mit einer deutlichen und scharf abgeschnittenen schwarzen Querbinde. Hauptfarbe des ganzen Unterleibes eine helle, mehr oder weniger ins Graue spielende Isabellfarbe, an den Seiten des Kopfs und der Kehle ins weissliche, an der Brust mehr ins dunkel aschgraue, nach den Seiten zu hin und wieder unvollkommen bezeichnet mit den Charakteren der Rückenfedern. Diese sehr elegante Zeichnung besteht darin, dass jede Feder in ihrer Mitte einen breiten rostbraunen Spiegelflecken zeigt, auf welchem 3 — 4 einander umschliessende schwarze Querbinden von ungleicher Breite und Regelmässigkeit sehr deutlich gezeichnet sind, so wieder von zwei roströthlich weissen Längsstreifen begrenzt und eingeschlossen werden, auf welche hierauf zu beiden Seiten ein breiter Saum von röthlich aschgrauer Farbe folgt. Sehr vollkommen zeigt sich diese schöne Zeichnung an allen Rücken-, Schulter- und Steissfedern, unvollkommner und häufig unterbrochen an den obern Schwanz- und Flügel-Decken, die hinteren Schwungfedern und Afterflügel sind hellroströthlich mit schwärzlichen Querflecken, die vordern Schwungfedern braunschwärzlich und röthlich weiss in die Quere gefleckt, mit flachen, glänzend schwarzbraunen Schäften.

Ganze Länge	11	Zoll			Englisches Maas.
Länge des Schnabels	1	,,	2	Lin.	
,, ,, Tarsus	1	,,	2½	,,	
,, der Mittelzehe	1	,,	1	,,	
,, des Schwanzes	2	,,			
,, ,, Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze .	6	,,	1	,,	

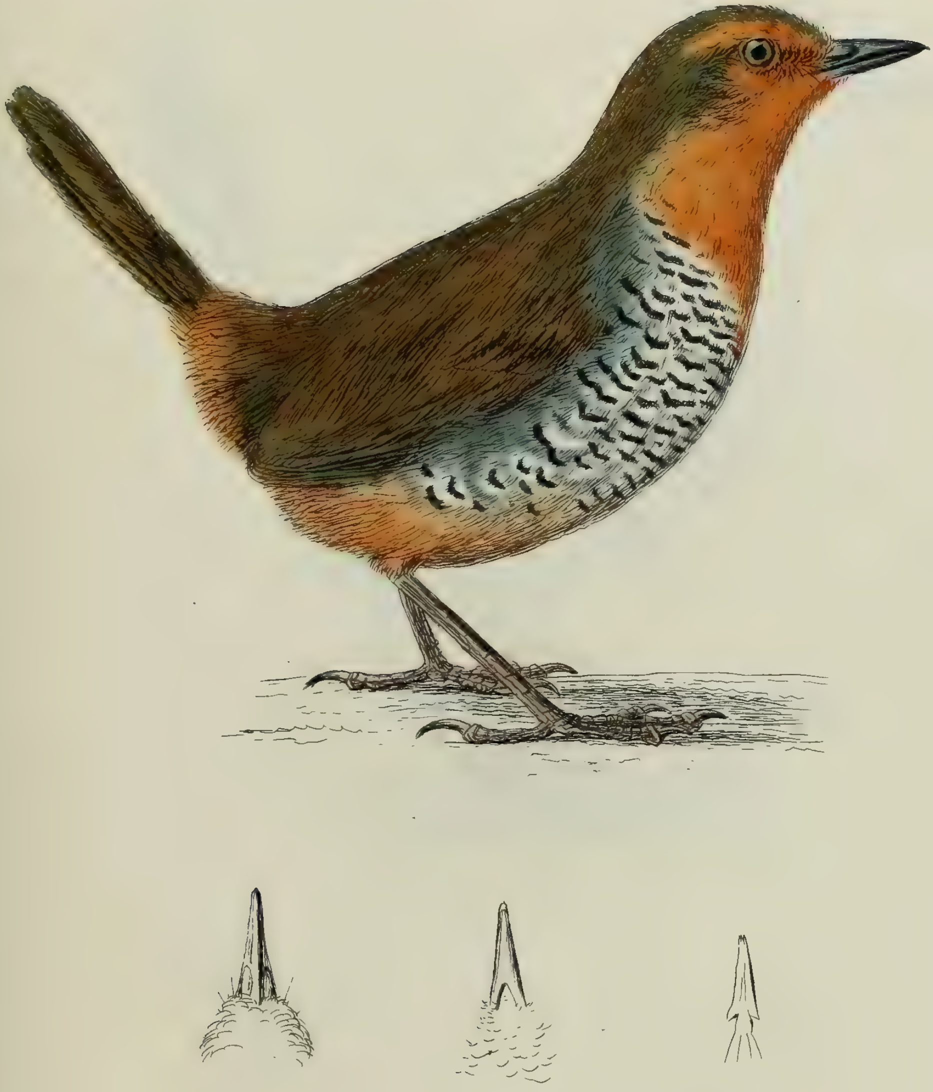
Die 4te und 5te Schwungfeder die längsten.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY



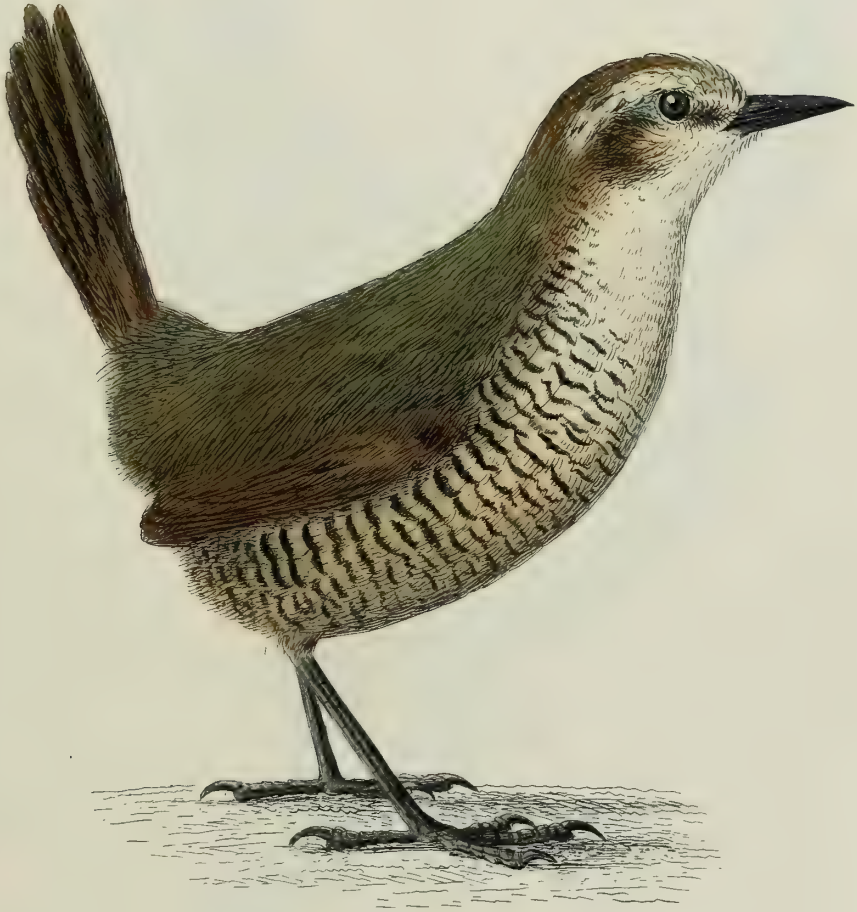
Phytotoma ſilens n.
Chili.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY



Pteroptochos Rubecula n.

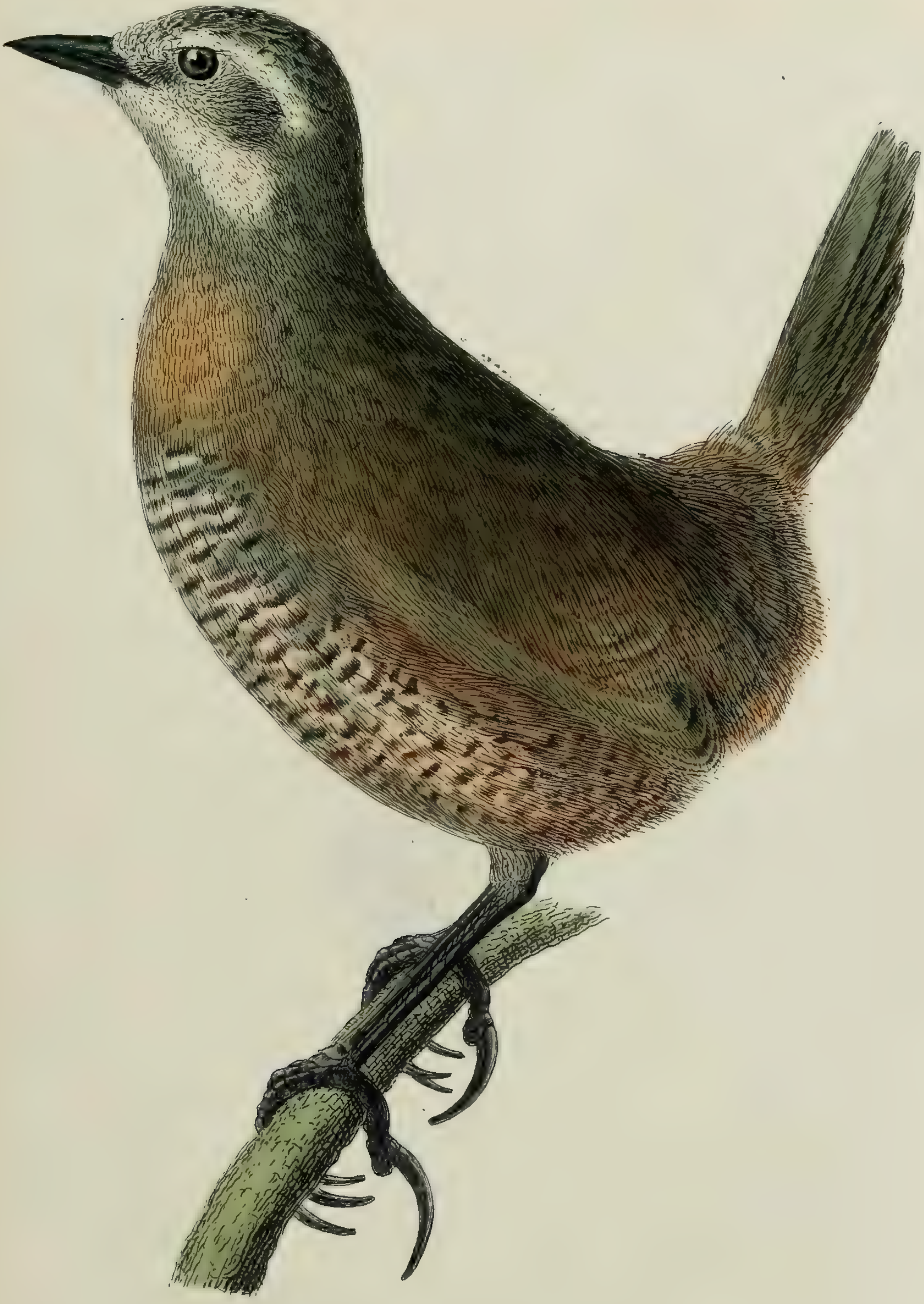
Chili.



FHvK.

Pteroptochos albicollis n.
Chili

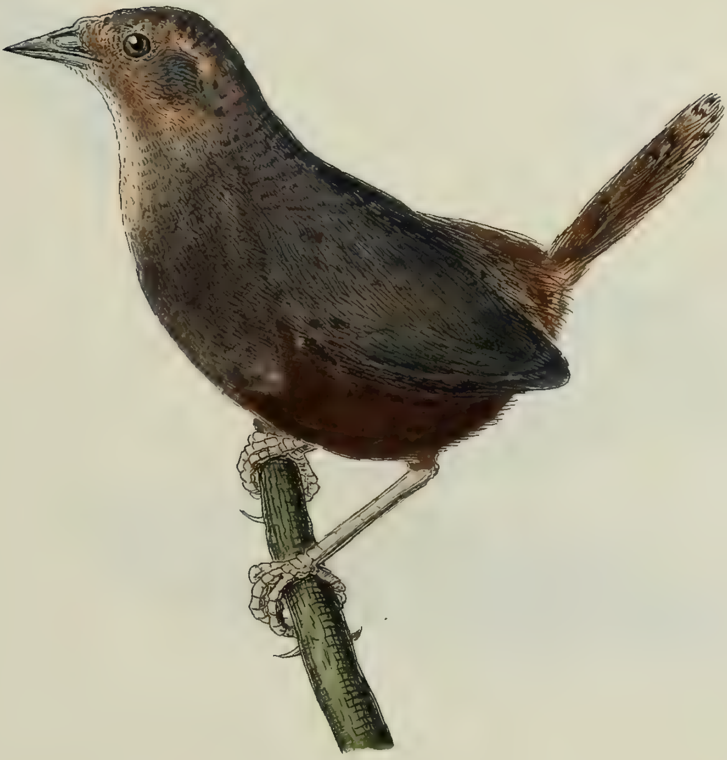
[illegible]

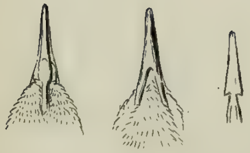


H.K.

Pteroptochos Megapodius n.
Chili.

[illegible] HISTORY



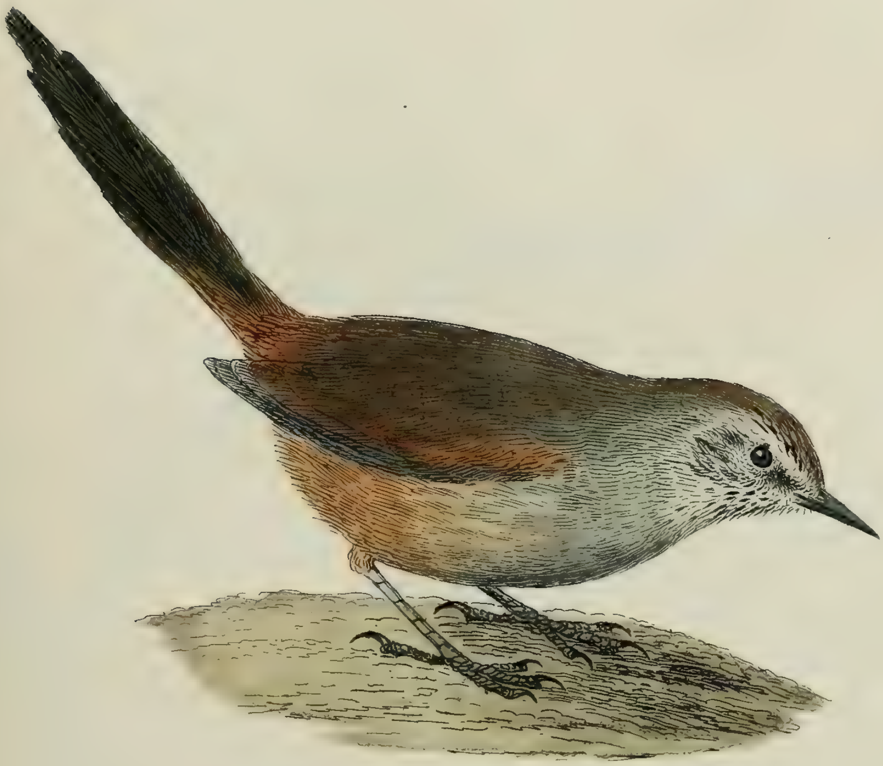


FHvK

Troglodytes paradoxus n.

Chili.

NATURAL HISTORY

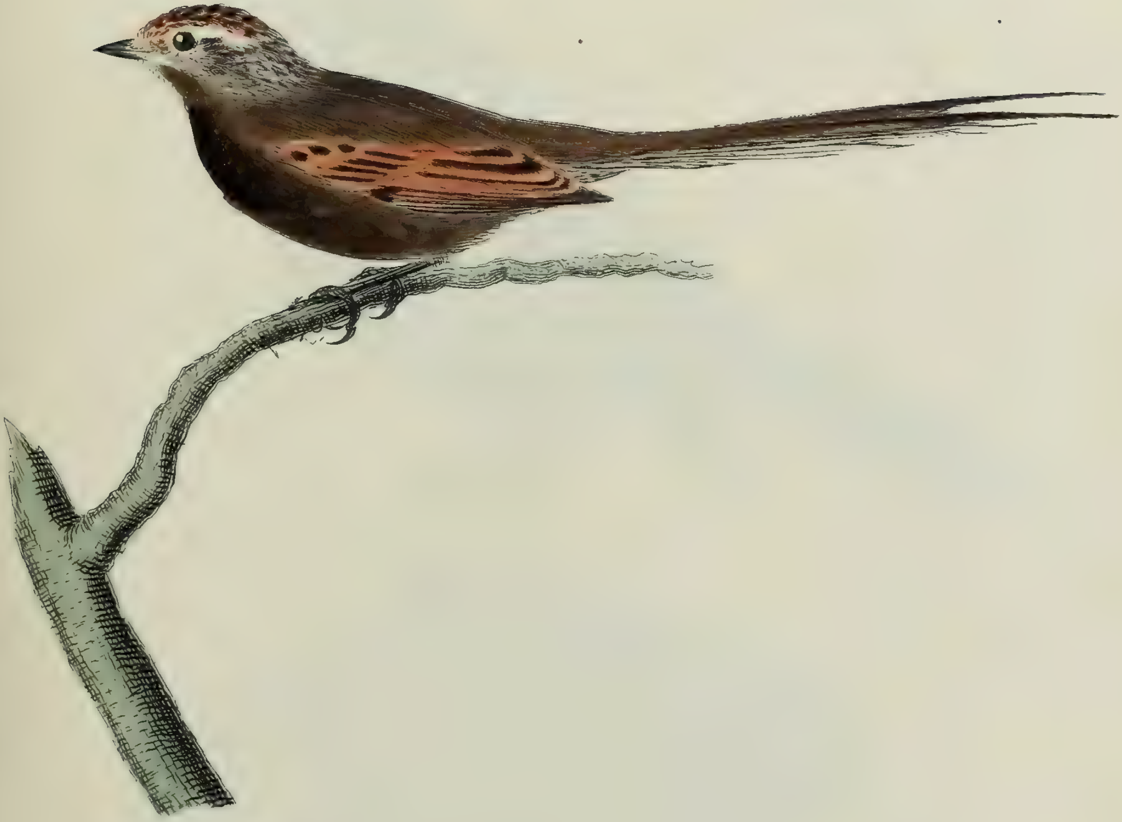


HvK.

Synnalaxis humicola n.

Chili

[illegible]

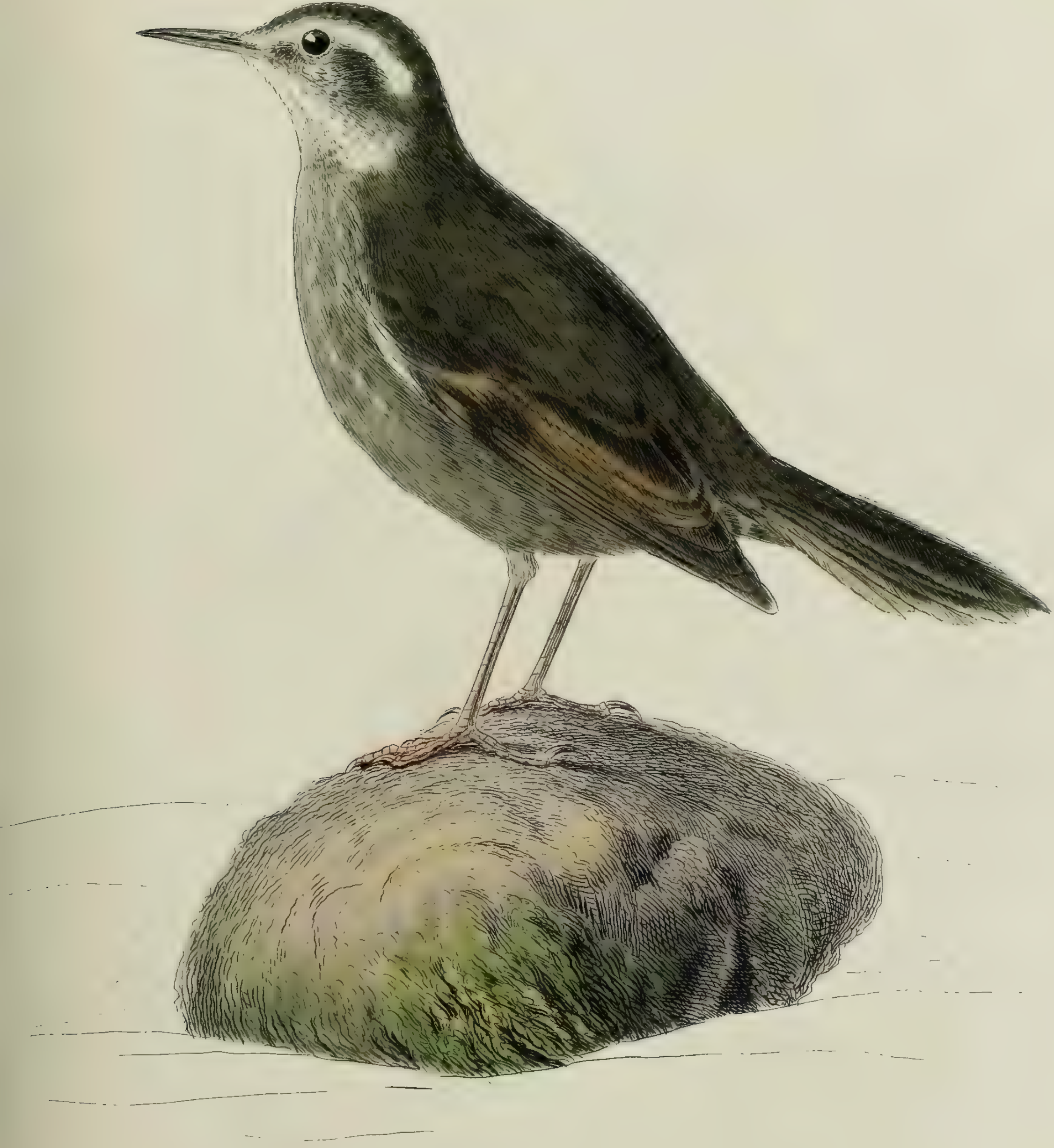


HvK

Synnalaxis aegithaloïdes n.
Chili

[illegible]

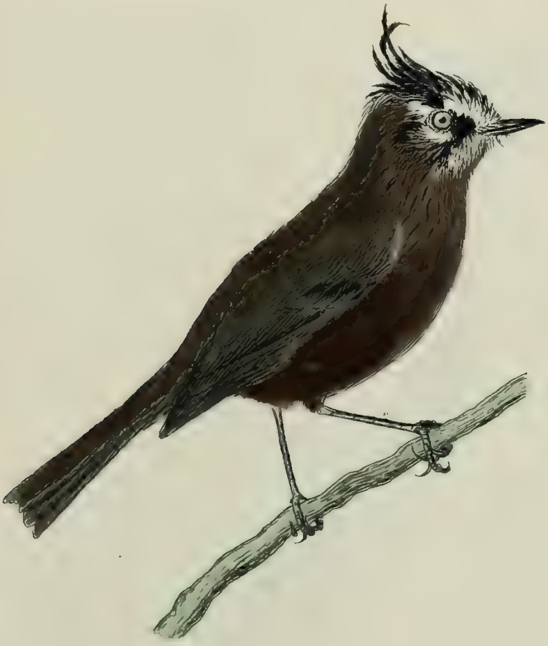
B[illegible] [illegible] HISTORY

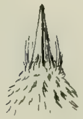


Opetiorhynchos rupestris n.

Chili.

NATURAL HISTORY



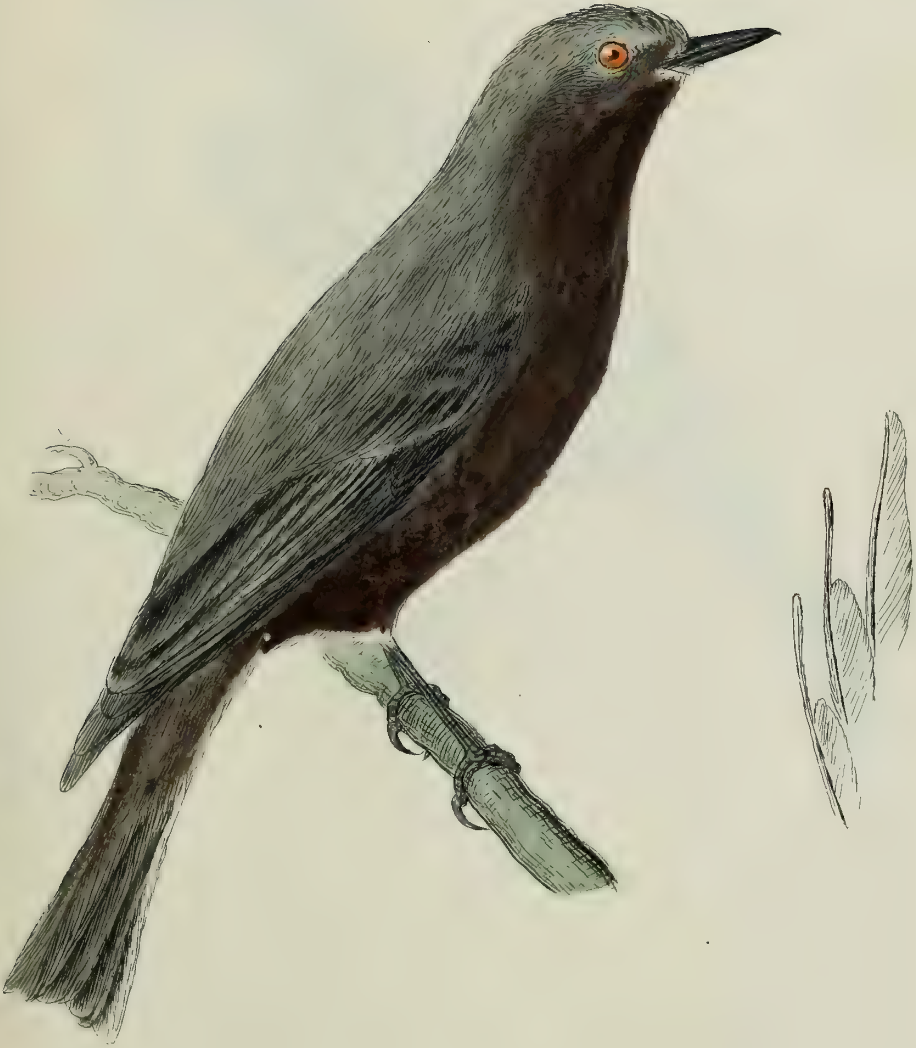


Hk.

Muscicapa Parulus n.

Chili.

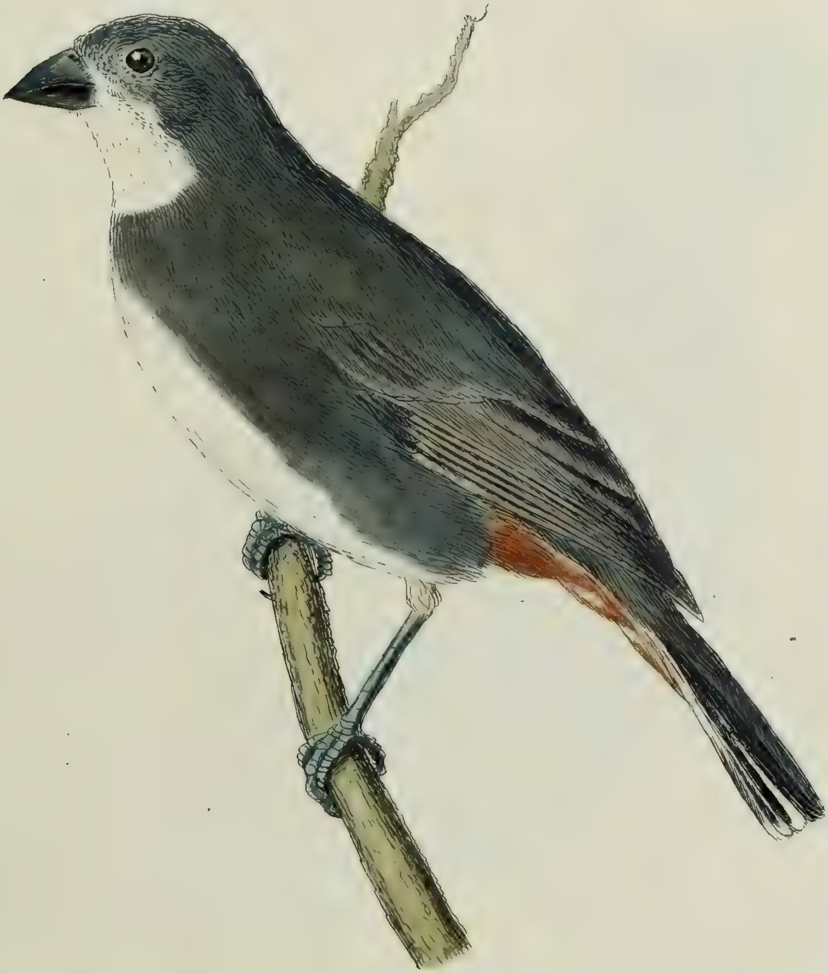
[illegible]



Hvk.

Muscicapa Pyrope n.
Chili.

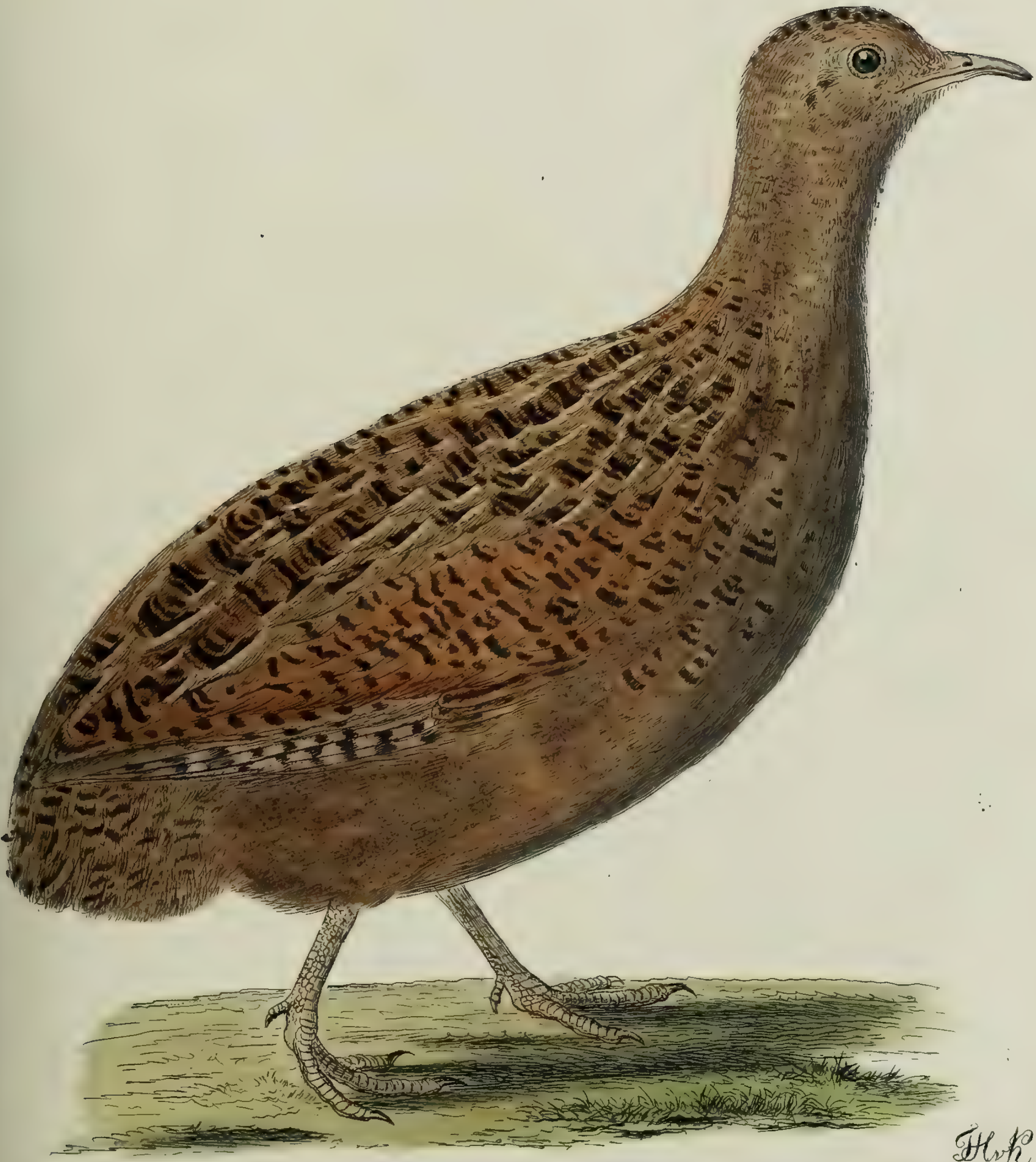
[illegible] NAT. HISTORY.



Hr.K.

Fringilla Diuca Mol.
Chili.

NATURAL HISTORY.



Cryplurus perdicarius n.
Chili.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

AVIS.

L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg a publié dans le premier siècle de son existence 73 volumes de ses Mémoires. Ce recueil se compose de cinq séries publiées successivement sous les titres suivans: Commentarii Acad. Imp. sc. Petrop. depuis 1726—1747 (14 volumes); Novi Commentarii 1747—1776 (21 volumes); Acta 1776—1783 (12 volumes); Nova Acta 1783—1803 (15 volumes) et Mémoires 1803—1826 (11 volumes). A chacune de ces différentes époques se rattache quelque souvenir remarquable, tels que: en 1726 la première séance publique en présence de S. M. l'Impératrice Cathérine I, ou l'époque de l'inauguration de l'Académie; en 1747 les règlemens donnés à cette société par l'Impératrice Elisabeth fille de Pierre I; en 1776 la célébration solennelle du jubilé semi-séculaire; en 1783 la nomination de M^me^ la Princesse Daschkoff Directeur de l'Académie; en 1803 les nouveaux règlemens donnés par l'Empereur Alexandre; enfin en 1826 la célébration de la fête séculaire honorée de la présence de S. M. l'Empereur NICOLAS I et de toute Son auguste Famille. Le désir de faciliter le débit de ses Mémoires et d'en accélérer la publication a fait choisir à l'Académie un nouveau mode dans la rédaction de ce recueil dont commence aujourd'hui la sixième série, sous le même titre de *Mémoires*. Cette nouvelle série paraîtra en deux corps d'ouvrage ou sections éparses et indépendantes l'une de l'autre. La première section comprendra les Mémoires de Mathématiques, d'Astronomie, de Physique, de Chimie et des Sciences naturelles; la seconde ceux des Sciences politiques, d'Histoire et de Philologie. Ces deux sections paraîtront par livraisons de 10 à 15 feuilles chacune. Six de ces livraisons formeront un volume, et à la première section sera ajoutée une septième livraison, comme supplément, qui contiendra l'histoire de l'Académie et les rapports lus dans les séances et dont la publication aura été arrêtée. Les mémoires seront placés pèle-mèle dans l'ordre de leur présentation. Les sections seront vendues séparément, mais personne ne pourra acheter des livraisons séparées. En achetant la première livraison on payera le volume entier et on touchera un billet pour recevoir les livraisons suivantes. Les mémoires des savans étrangers seront séparés de ceux de l'Académie et formeront un recueil à part qui se publiera de la même manière, par livraisons de 10 à 15 feuilles imprimées chacune, et dont de même six formeront un volume.

TABLE DES MATIERES.

M. Ermann. Sur la direction et l'intensité de la force magnétique a St.-Pétersbourg 97

M. Ohm. De nonnullis problematis analyticis caute tractandis 109

M. Hauy. Observations sur les salines de la Nouvelle-Russie 131

Le même. Examen du littoral de la Mer Noire compris entre les embouchures du Boug et du Dniestre. (Suite du précédent mémoire, avec deux planches lithographiées) 154

M. Kittlitz. Ueber einige Vögel von Chili, beobachtet im März und Anfang April 1827. (Avec douze planches gravées et enluminées) . . 174

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS À

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS,

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME PREMIER.

3me et 4me LIVRAISON.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1830.

Se vend chez **Graeff**, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison Stcherbakoff N°. 91 et à Leipzic chez **Cnobloch**.

Publié avec l'approbation de l'Académie.
En Décembre 1830.
Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss

NATURAL HISTORY

CYPERACEAE NOVAE
DESCRIPTIONIBUS ET ICONIBUS ILLUSTRATAE.

AUCTORE

C. A. MEYER, M. D.

(Conventui exhib. die 9 Novembris 1825.)

Inter Cyperaceas, quas peregrinator indefessus, vir acutissimus Dr. Eschscholz mecum communicavit, plures inveni, quae nullibi descriptae videntur; alias species, hucusque pariter ignotas, ex herbario ditissimo clarissimi Ledebour accepi; quas omnes nunc descriptas et iconibus illustratas botanicorum censurae submitto.

In determinandis Caricibus principia a Willdenowio et Schkuhrio constituta secutus sum; in reliquis Cyperaceis vero ill. R. Brown, vir etiam de hac familia meritissimus, dux mihi fuit.

Cum nec fructus nec capsulae terminus tegmen caryopsidis Caricum rite designare videatur, alio, hucusque parce adhibito, *perigynii* nempe, ab cel. Linkio in Schraderi diar. bot. 1799 p. 308 proposito, usus sum et quidem eo majori, mihi persuadeo, jure, cum tegmen illud ad perianthium potius quam ad fructum referendum sit: setae enim hypogynae Scirpi, Eleocharidis etc. et lodiculae Pterolepidis, Hemichlaenae, Elytrospermi, Diplacri, omnino ejus analogon sistunt.

I.

Schoenus nigricans L. β uniflorus M.

S. spiculis capitato-fasciculatis unifloris involucro diphyllo brevioribus, setis hypogynis vix conspicuis.

Schoenus nigricans Sieber. herb. Cret.

Habitat in Creta prope Sudam; nec non prope Nartzanam et in Persia boreali.

Valde similis *Schoeno nigricanti*, constanter tamen differt spiculis unifloris, nec tri- vel quadrifloris. An potius species distincta? — Specimina solummodo florifera vidi.

II.

Schoenus puberulus M. Tab. I.

S. triandrus, culmo sulcato-angulato basi folioso, foliis linearibus vaginisque pubescentibus, umbella terminali composita subquinqueradiata involucrum erectum subaequante, glumis acuminatis, stigmatibus tribus, setis hypogynis nullis.

Pedalis vel paulo altior.

Radix . . . .

Culmi flavescentes, crassitie fili emporetici, hinc plani, illinc convexi et sulcis quinque pilosiusculis profunde exarati, basi foliis tecti, superne nudi.

Vaginae infimae duae vel tres squamiformes, striatae, glabrae, atro-purpureae, folio brevissimo terminatae; mediae fissae, in folium desinentes; summa integra, bipollicaris, pilosa, foliifera.

Folia plana, linearia, apice oblique acutata, tres ad sex pollices longa, vix ½ lin. lata, mollia, undique, praesertim vero dorso et margine, pilis minutis tecta, inferiora saepe recurvata.

Umbella terminalis, erecta, composita. Radii quinque vel sex, striati, subpilosi; partim vix bilineales monostachyi; partim semipollicares distachyi; pauci decem ad duodecim lineas longi et spiculis quatuor, quarum intermedia sessilis, terminati.

Involucri foliola quinque erecta, pilosa, setacea, basin versus dilatata et obscure castanea; longissimum umbellam aequans, reliqua breviora. Involucella involucro similia, minora tamen, di- vel tetraphylla, umbellulam vix aequantia.

Spiculae oblongae, compressiusculae, acutae, duas lineas longae.

Glumae in quavis spicula septem vel octo, subdistiche imbricatae, naviculares, ovatae, acuminatae, nudo oculo glabrae, sub lente apice tenuissime pubescentes, laeves, nitidae, obscure castaneae, margine dorsoque concolores; inferiores tres vel quatuor minores vacuae.

Stamina tria. Filamenta capillaria, alba. Antherae flavae, lineares, apice fasciculo pilorum terminatae.

Germen oblongum, glabrum. Stylus aequalis, basi vix dilatatus, glaber. Stigmata tria, papillosa.

Setae hypogynae nullae.

Caryopsis matura . . . . .

Habitat in Nepalia ♃.

Accedit habitu ad Fimbristylem et Isolepidem, at glumis coriaceis subdistiche imbricatis inferioribus vacuis omnino cum Schoeno convenit.

Proximus *Schoenus asper Schrad.* differt rigiditate et glabritie, nec non umbella sub-decemradiata decomposita; *Rhynchospora mollis Wallich* glumarum carina virescente et setis hypogynis. *Fimbristyles tomentosa* et *pilosa Vahl*, praeter alias notas differunt glumis monandris. *Scirpus Thouarsii Schult.* et *Sc. hispidus Vahl* satis distincti involucro umbellam superante et glumis variegatis.

III.

Isolepis oligantha M. Tab. I.

I. spica solitaria terminali pauciflora involucrum diphyllum vix superante, culmis teretibus setaceis, vaginis foliiferis, radice repente.

Planta tenella, glaberrima et laevissima, *Trichophoro alpino* habitu, vaginis, spica et foliis simillima.

Radix repens, crassitie fili emporetici, fusca, hinc inde radiculas fibrosas et culmorum caespites emittens.

Culmi erecti, stricti, teretes, crassitie setae porcinae, quadri- vel quinquepollicares, virides, ad basin tecti vaginis aliquot muticis rufescentibus et duabus foliiferis; caeterum nudi, spica solitaria terminati.

Folia complicato-filiformia, apice obtusa, tenuissime striata; infimum vix tres lineas longum, summum octo lineas fere excedens.

Spica bi- vel triflora, florens subcylindrica, vix 1 lin. longa, involucro diphyllo inclusa, quo vix longior.

Involucri squamae subaequales, ovatae, flavo-rufae, carina viridi notatae; exterior mucrone crasso terminata; interior acutiuscula, mutica.

Glumae undique imbricatae, omnes fertiles, ovatae, conduplicatae, rachin amplectentes, acutae, flavo-rufae; carina viridis, laevis.

Stamina tria. Filamenta capillaria, elongata, alba. Antherae flavae, lineares.

Germen oblongum, glabrum. Stylus filiformis, basi aequalis, glaber. Stigmata tria, villosula.

Setae hypogynae nullae.

Caryopsis matura . . . .

Habitat in Sibiria ♃.

Isolepides pumila et *cernua Schult.*, proximae, differunt radice fibrosa: illa praeterea spicis multifloris et glumis obtusis; haec culmis brevioribus tetragonis.

IV.

Scirpus Kamtschaticus M. Tab. I.

S. vaginis truncatis muticis, spica terminali subcylindracea, glumis ovatis obtusis, stigmatibus binis.

Radix repens?

Culmi basi vaginati, caespitosi, erecti, quadri- vel quinque pollicares, crassitie setae porcinae, glabri, striati, (omnino non scabri) punctis minutis nigris adspersi; partim spica solitaria terminati, partim steriles.

Vaginae tres, truncatae, aphyllae, muticae, striatae, punctis nigris etiam notatae; infima purpureo-fusca.

Spica florens subcylindracea, acutiuscula, quatuor lineas longa, decem- ad duodecim-flora.

Glumae undique imbricatae, subaequales, ovatae, obtusae, purpureo-fuscae, nervo dorsali viridi notatae, margine lato scarioso cinctae; infima vacua.

Stamina tria. Filamenta capillaria, alba. Antherae lineares, flavae. Germen oblongum, apice aequaliter attenuatum, glabrum. Stylus basi aequalis, apice cum stigmatibus duobus villosulus.

Setae hypogynae sex, retrorsum hispidae.

Caryopsis matura . . . .

Habitat in Kamtschatka ♃.

Scirpus Baeothryon L., nostro maxime affinis, tamen glumis inferioribus et stigmatibus tribus satis distinctus. *Eleocharis palustris R. Br.*, habitu similis, stylo basi dilatato articulato dignoscitur.

V.

Scirpus melanospermus M. Tab. II.

S. culmis rigidulis teretibus, vaginis foliiferis, spicis lateralibus sessilibus subbinis, stigmatibus tribus, caryopsi triquetra transversim rugosa setis hypogynis sex cincta.

Glaber, laevis, glauco-virens, tri — sexpollicaris.

Radix (videtur annua), fibrosa; fibris simplicibus nigricantibus.

Culmi rigiduli, recti vel paululum incurvati, setacei, teretes, seta porcina vix crassiores, basi vaginis tecti.

Vaginae quatuor vel quinque: inferiores sordide flavidae, obtusae, muticae vel brevissime mucronatae; superiores foliiferae.

Folia rigidula, setacea, obtusiuscula, serrulata, supra canaliculata, ½ poll. vel pollicem longa, vix longiora.

Spicae sessiles, plerumque in medio, non raro et infra, rarius supra medium culmi, saepius binae, rarius solitariae vel ternae; omnes multiflorae, oblongae, acutiusculae, bilineales, bractea brevi, scariosa, ovata, mucronata suffultae. Pars superior culmi recta, setacea, ad spicarum insertionem dilatata et margine scariosa, apice serrulata.

Glumae undique imbricatae, ovatae, apice bifidae, mucrone brevi patulo apiculatae, flavescentes et carina viridi notatae; omnes fertiles.

Stamina tria generis.

Germen oblongum. Stylus filiformis, basi aequalis. Stigmata tria.

Caryopsis obovato-triquetra, basi attenuata, mucrone brevi terminata, transversim rugosa, atra.

Setae hypogynae sex, fuscae, retrorsum hispidae, longitudine caryopsidis.

Habit prope Astrachan. ⊙?

Proximus *Scirpo debili* ***Pursh*** et *Isolepidi supinae* ***R. Br.*** Ille differt culmo multo altiori (pedali vel 1½ pedali), molliori, crassiori, vaginis muticis et aphyllis, spicis mox infra apicem culmi insertis, nec non setis hypogynis longioribus. *Is. supina*, quam maxime affinis, differt culmis mollibus crassioribus, foliis brevioribus et praecipue setarum hypogynarum defectu.

VI.

Elytrospermum M.

Spiculae multiflorae, hermaphroditae. Glumae undique imbricatae, omnes fertiles. Lodiculae squamae binae, laterales, liberae. Stylus basi aequalis. Caryopsis conico-apiculata lodiculis et filamentis persistentibus cincta. — Habitus omnino Scirpi lacustris.

Elytrospermum californicum M. Tab. II.

Possideo partem superiorem culmi forte tri- vel quadripedalis, aphyllam, obsolete obtuse trigonam, apice attenuatam, glabram, laevem, crassitie pennae anserinae, flavo-viridem, subglaucam, cyma decomposita terminatam et *Scirpum lacustrem* non male referentem.

Involucrum triphyllum, strictum, rigidum; phyllis lanceolatis, basi dilatatis, mucrone conico crasso pungente terminatis, striatis (caeterum laevissimis), glabris, infimo fere sesquipollicari, altero pollicari, tertio magis membranaceo vix ½ pollicem longo.

Cymae universalis radii circiter viginti, inaequales, hinc convexi, illinc plani, striati; angulis acutis laevissimis; partim brevissimi et fere sessiles, partim pollicem, duas ad tres pollices longi vel longiores. Cymae partiales radiorum breviorum simplices, elongatorum compositae; omnes suffultae involucello mono- vel diphyllo: phyllis planis, striatis, erectis, membranaceis, brevissime mucronatis.

Spicae in cymula duae ad quinque, nunc sessiles, nunc pedunculatae, oblongae, multiflorae, duas ad tres lineas longae.

Glumae undique imbricatae, omnes fertiles, late ovatae, obtusae, glabrae, laeves, ferrugineae, margine scariosae et obsolete lacero-ciliatae, terminatae mucrone viridi scabriusculo vix ⅓ lin. longo.

Lodiculae squamae duae, laterales, liberae, compressae, angustae, lineares, basi subdilatatae, scariosae, atropurpureae, fimbriato-ciliatae, germine paulo longiores.

Stamina duo aut tria. Filamenta alba, linearia, plana, membranacea, uninervia et venis anastomozantibus reticulata, persistentia. Antherae flavae, lineari-lanceolatae, acutae, basi sagittatae, deciduae.

Germen glabrum, oblongum, utrinque attenuatum. Stylus basi aequalis, apice paululum dilatatus. Stigmata duo, villosula.

Caryopsis obovato-oblonga, basi attenuata, mucrone conico terminata, subcompressa, plano-convexa, flavescens, glabra, punctulata, cincta lodiculis et filamentis persistentibus.

Habitat in California.

Ad hoc genus forsan pertinet *Scirpus anomalus Retz.*, vix vero *Schoenus nemorum Vahl* (Beera P. de B.), qui mihi tamen non satis notus est. *Hypoelytrum* ab *Elytrospermo* differt lodiculis glumae oppositis caryopsin includentibus. *Tunga Roxb.* autem ab *Hypoelytro* generice non diversa. *Pterolepis Schrad.* lodiculae squamis quinque basi connatis instructa est. Genus nostrum glumis undique, nec distiche imbricatis facile a Papyro Auctorum distinguendum. *Papyrus* autem, ut mihi videtur, non satis a *Cypero* differt, cum corolla sic dicta bivalvis nil est nisi glumarum appendices persistentes. In *Cypero Papyro* (Papyro antiquorum Auctt.) nimirum gluma quaelibet, excepta infima, ad insertionem (fig. 1 et 2. α) rachin amplectitur et appendicibus binis in latere rachis, glumae contrario, decurrit usque ad insertionem glumae subjacentis (fig. 1 et 2, β). Appendices hae tegunt pistillum et stamina cujusvis glumae subjacentis et adnatae sunt, in spica florente, non solum rachi sed etiam glumae ex qua oriuntur. Germen maturans appendices glumae supra adjacentis extendit, quo fit ut hae appendices a basi apicem versus sensim sensimque a gluma, cui annexae sunt, diffindantur; ita ut non raro glumas invenerim quarum appendices, basin versus a gluma separatae, apicem versus illi adhuc adhaeruerint. Caryopsi vero matura appendices rachi adnatae a gluma omnino dissolutae sunt, tunc corollam bivalvem sic dictam constituentes. In spica florenti gluma cum appendicibus remotis germen omnino nudum apparet, nec ulla alia tegmina observare licet. Quae glumarum structura in Cyperis (vid. Tab. III.) non rara, plerumque vero minus manifesta. In *Cypero strigoso* glumarum appendices Cyperi Papyri appendicibus magnitudine certe non cedunt, tenuissimae tamen et hyalinae, in fructu maturo saepius destructae, et hanc ob rem minus bene dignoscendae quam in illo (Cyp. Papyro), cujus appendices consistentia et colore glumarum gaudent. *Cy-*

peri polystachyos, *alternifolius*, *compressus*, *australis*, *patulus*, *longus*, *Paramatta*, *distans* et forte plures Cyperi species appendicibus hyalinis minoribus, satis tamen conspicuis, praeditae sunt. Appendices *Cyperi articulati*, *pygmaei*, *protracti*, *Monti*, longe minores et vix distinguendae. Glumae denique *Cyperi vegeti*, *flavescentis*, *fusci*, rachin ex parte amplectuntur, at appendicibus omnino carent.

VII.

Eriophorum callitrix Cham. Tab. II.

E. culmis caespitosis teretibus, vaginis parum inflatis, foliis compressis serrulatis, spica solitaria subrotunda, antheris subrotundo-ellipticis.

Radix horizontalis caespitem densum foliorum culmorumque protrudens.

Culmi teretes, glabri, striati (nec scabri), plerumque paululum incurvati, quinquepollicares, ad basin tecti squamis rufescentibus obtusis et vaginis foliiferis.

Vaginae quatuor aut quinque, foliiferae, glabrae, striatae: infimae duae aut tres fissae; mediae apice vix fissae; summa subinflata, apicem versus scariosa et nigricans.

Folia rigidula, plerumque oblique flexa, compressa, angusta, linearia, $\frac{1}{3}$ lin. vel vix $\frac{1}{2}$ lin. lata, basin versus hinc convexa, illinc canaliculata, glabra, laevia, sub lente margine (apice basique evidentius) tenuissime serrulato-scabra; infimum brevissimum vix quatuor lineas longum; summum sex- vel octolineale, interdum tamen multo brevius vix $1\frac{1}{2}$ lin. aequans; intermedia bi- vel tripollicaria. Folia fasciculorum sterilium angustiora et evidentius serrulata.

Capitulum terminale, hemisphaericum, multiflorum, spatham ovato-lanceolatam, acutam, quinquenervem, nigricantem aequans.

Glumae ovato-lanceolatae: inferiores longiores acuminatae, superiores breviores acutae; omnes glabrae, uninerves, nigricantes, margine concolores.

Stamina tria. Filamenta capillaria, alba. Antherae ellipticae, minimae (vix $\frac{1}{4}$ lin. longae, $\frac{1}{8}$ lin. latae), flavae.

Germen ellipticum, glabrum, laeve. Stylus brevis, glaber. Stigmata tria vel quatuor, villosula.

Caryopsis obovata, basi attenuata, compresso-tetragona, nigricans, laevissima, nitida, lana albida copiosissima laevissima ½ poll. longa involuta.

Habitat in insulis St. Laurentii freti Beringii. ♃.

Er. capitatum Hoffm. et *Er. Chamissonis nob.* radice repente, culmis semper solitariis, (numquam caespitosis) foliis laevissimis, glumis margine albido-scariosis aliisque notis satis a nostro differunt. *Er. vaginatum L.* ob culmos cespitosos plantam nostram aliquantum refert, statura vero altiori, vagina summa inflata semper aphylla, foliis culmisque triquetris, glumis acuminatissimis nec non antheris linearibus facile distinguitur.

VIII.

Eriophorum Chamissonis M. Tab. III.

E. culmis solitariis teretibus foliisque compressis laevibus, vaginis parum inflatis, spica solitaria oblonga, antheris linearibus.

Erioph. intermedium Cham. in litt.

Radix valde repens et hinc inde culmos solitarios emittens.

Culmi crassitie fili emporetici, teretes, molles, striati, caeterum laevissimi et glaberrimi, basi vaginis foliiferis tecti, superne nudi; florentes sex pollices circiter alti, fructiferi pedales vel altiores.

Vaginae sex vel septem glabrae, striatae: inferiores rufescentes fissae, superiores duae connatae, summa longissima, vix inflata, apice sphacelata, vel omnino mutica, vel foliolo bilineari terminata.

Folia linearia, compressa, basin versus dorso convexa facie canaliculata, obtusa, glabra, laevissima.

Spica multiflora, solitaria, terminalis, oblonga, florens (lana destituta) sex lineas longa, duas circiter lata, spatham ovato-lanceolatam tri- vel quinquenervem longe superans.

Glumae undique imbricatae, lanceolatae, acutae, glabrae, uninerves, nigricantes, margine albido scarioso cinctae.

Stamina tria. Filamenta capillaria, alba. Antherae lineares, lineam fere longae, flavae.

Germen glabrum, ellipticum. Stylus glaber. Stigmata tria vel quatuor, villosula.

Caryopsis oblonga, mucronata, basi attenuata, compresso-tetragona aut trigona, glabra, laevis.

Lana copiosa, laevissima, in specimine fructifero pollicem superans, rufa (an semper?).

Habitat in Kamtschatka et Unalaschka, nec non in alpibus Altaicis. ♃.

Er. capitatum Hoffm. differt spica subrotunda spatham aequante nec non antheris brevibus cordato-ellipticis. *Er. vaginatum L.* et *Er. callitrix Cham.* recedunt culmis caespitosis, foliis serrulato-scabris aliisque notis indicatis.

Cum jam alia Eriophori species nomine *intermedii* a cl. Bastardio designata sit, nomen, a cel. Chamisso huic speciei impositum, mutavi.

IX.

Kylinga cristata Thb. Afzel.

Specimen in herbario cel. Ledebour, ab illustr. Thunberg missum, cum adnotatione „Kyl. cristata mihi, a D. Adam; Afzelius, ex Sierra Leona 1802" omnino convenit cum *K. squamulata Thonn.*

X.

Uncinia trichocarpa M. Tab. IV.

U. spica cylindrica superne attenuata mascula, stigmatibus binis, perigyniis semiteretibus apice pilosis glumam oblongam superantibus, arista hispida perigynio sesquilongiore.

Radix . . . .

Culmus erectus, tripedalis, trigonus, trisulcatus, glaber, (nec scaber), inferne crassitie pennae corvinae et ad tertiam partem usque vaginis tectus, superne nudus, attenuatus, vix crassitie fili emporetici.

Vaginae quinque, trigonae, integrae, c rinatae, striatae, scabriusculae, pollices quinque ad sex longae, flavescenti-virides, inferiores dilute fuscescentes; omnes foliiferae.

Ligula angusta, cartilaginea, glabra.

Folia rigidula, erecta, linearia, plana, carinata, basi complicata, apice longe acuminata, striata, scabriuscula, margine scaberrima, $1\frac{1}{2}$ lin. lata; infimum vix quadripollicare; reliqua fere pedalia.

Spica androgyna, terminalis, multiflora, quatuor pollices longa, cylindrica, apice paululum attenuata, mascula.

Glumae undique imbricatae, adpressae, oblongae, obtusae, spadiceo-fuscae, margine et carina dilutiores, glabrae, apice tenuissime ciliatae; femineae duas lineas longae vel longiores; masculae minores.

Perigynium lineare, utrinque attenuatum, ore obtusiusculum, hinc planum, illinc convexum, basi glabrum, apice exasperatum et pilosum: pilis marginalibus fasciculatis; sordide rufescens, tres lineas longum, vix $\frac{1}{2}$ lin. latum.

Caryopsis linearis, utrinque obtusa, plano-convexa, tenuissime punctata, rufescens.

Stylus brevis. Stigmata duo.

Arista setacea, apice incrassata et hamata, hispidula, fusca, exserta, quatuor lineas circiter longa.

Habitat in Chili.

Proxima certe *Unciniae jamaicensi Pers.* (*Carici hamatae Sw.*), quae tamen differt perigyniis margine ciliato-serratis, stigmatibus tribus, aristis longioribus laevibus. *U. australis Pers.* (*Carex uncinata L.*) magis adhuc recedit spica superne incrassata, perigyniis rostratis, stigmatibus tribus et aristis longioribus. Reliquae Unciniae Personii et R. Brownii omnino diversae.

XI.

Carex Redowskiana M. Tab. IV.

C. spica simplici dioica, stigmatibus binis, perigyniis lineari-oblongis utrinque attenuatis laevibus ore bilobo hyalinis glumam obtusam superantibus, culmo laevi, foliis trigono-setaceis scabriusculis.

Radix tenuis, repens, hinc inde culmos et foliorum fasciculos emittens.

Culmi quinque ad septem pollices alti, setaceo-trigoni, sulcati, glabri, (minime scabri) ad basin squamis oblongis acutis glabris striatis rufescentibus radiculas fibrosas elongatas fulcientibus obtecti.

Vaginae cylindricae, integrae, 1½ pollicares, glabrae, striatae, foliiferae.

Folia setacea, trigona, acuminata, basi concavo-convexa, glabra, vix striata, margine solummodo scabriuscula, duas ad quinque pollices longa; fasciculorum sterilium culmum subaequantia.

Spica solitaria, terminalis, dioica: feminea lineari-oblonga, ½ pollicaris, decem- ad duodecimflora; mascula mihi ignota.

Glumae undique laxe imbricatae, ovatae, obtusae: infima interdum acutiuscula; rufae, margine lato albo scarioso cinctae et nervo concolore notatae.

Perigynium immaturum (maturum non vidi) patentiusculum, lineari-oblongum, utrinque attenuatum, nervosum, laevissimum, glaberrimum, viride, ore hyalino obtuso bilobo terminatum, gluma duplo fere longius.

Stigmata duo. Germen . . . .

In Kamtschatka legit b. Dr. Redowsky. ♃.

C. parallela Laestad. prope quidem accedit, differt tamen foliis crassioribus et firmioribus, culmo scabro, perigyniis ovatis. *C. Davalliana Sm.* recedit culmo perigyniisque scabris, glumis longioribus plus minusve acutis. *C. dioica L.* perigyniis ovatis margine hispidis glumam aequantibus. *C. Wormskioldiana Fl. Dan.* et *C. leiocarpa nob.* foliis planis, ut alias notas taceam, facile dignoscuntur.

XII.

Carex leiocarpa M. Tab. V.

C. spica solitaria dioica, stigmatibus binis, perigyniis erectis anguste oblongis laevissimis glumam acutam superantibus, foliis planis culmisque triquetris scabris.

Radix valde repens, crassitie fili emporetici, squamis glabris flavescentibus tecta et radiculis fibrillosis nigricantibus aucta.

Culmi erecti, tenues, filo vix crassiores, triquetri, profunde striati et ad angulos scabri; florentes tres ad quinque pollices alti, fructiferi pedales altioresve; pars inferior vestita squamis oblongo-lanceolatis, striatis, aphyllis, vel (superioribus) folio brevi terminatis.

Vaginae integrae, scabriusculae, striatae, vix pollicares.

Folia laete viridia, graminea, plana, linearia, triquetro-acuminata, striata, scabra, $\frac{2}{3}$ lin. lata, pollicem ad decem pollices longa, culmos florentes superantia, fructiferos vero subaequantia.

Spica solitaria, dioica, terminalis, cylindrica: mascula $\frac{1}{2}$ pollicaris, octo- ad decemflora; feminea basi interrupta quindecim ad vigintiduos flores continens, pollicaris vel longior.

Glumae undique imbricatae, glabrae, laeves, rufescentes vel rufescenti-spadiceae, nervo dorsali lato viridi instructae, oblongae, masculae obtusae, omnino muticae vel mucrone brevissimo apiculatae; femineae plerumque acutae, muticae, rarius obtusiusculae mucroneque brevi instructae; infima interdum mucrone elongato terminata.

Stamina tria generis.

Perigynium glaberrimum, laevissimum: florens lineare, utrinque attenuatum, latere interiore subcanaliculatum, viride: maturum lineari-oblongum, compresso-semicylindricum, utrinque attenuatum, flavescens, ore subdiscoloro truncato perforato terminatum, glumam superans.

Germen oblongum, glabrum. Stylus aequalis. Stigmata duo.

Caryopsis oblonga, subcompressa, striata, nervo unico notata, glabra, sordide flavescens.

Habitat in Unalaschka. ♃.

Affinis *Carici Wormskioldianae Fl. Dan.* et *C. scirpoideae Mich.* at in hac perigynium pubescens, in illa stigmata tria et perigynium margine scabrum.

XIII.

Carex circinata M. Tab. VI.

C. spica androgyna simplici superne mascula, stigmatibus subbinis, perigyniis erectis oblongo-lanceolatis ore truncatis margine hispidis glumam obtusam superantibus, foliis rigidis circinatis.

Radix repens, tecta squamis oblongo-lanceolatis mucronatis striatis sordide flavescentibus, culmos dense caespitosos et radiculas tenues longas ramosas nigricantes protrudens.

Culmi setacei, triquetri, ad angulos scabri, virides, plerumque incurvi, florentes duos ad quatuor pollices, fructiferi vero sex ad octo pollices alti; versus basin squamis aliquot oblongo-lanceolatis acuminatis striatis glabris sordide flavescentibus et vaginis tribus vel quatuor aucti.

Vaginae circiter bipollicares, connatae, striatae, glabrae, sordide flavescentes.

Folia setacea, subtriquetra, acuminata, canaliculata, basin versus magis dilatata et culmum amplectentia, margine scaberrima; culmos floriferos duplo superantia, fructiferos subaequantia; plus minusve circinata.

Spica solitaria, androgyna, terminalis, ½ vel fere 1 poll. longa, multiflora, superne mascula; florens cylindrica, fructifera anguste oblonga; basi interdum interrupta et vel omnino nuda, vel squama setifera stipata. Flosculi masculi 8 ad 10, feminei 8 ad 12.

Glumae sublaxe imbricatae, oblongae, obtusae, glabrae, laeves, rufae, dorso viridi-flavescentes, apicem versus margine angusto scarioso cinctae.

Filamenta capillaria. Antherae lineares, apiculatae.

Perigynium sub anthesi angustissimum, lineare, viride, margine hispidum, ore obliquo; in fructu maturo semper erectum, oblongo-lanceolatum, utrinque attenuatum, hinc convexum, illinc planum, margine inflexum et hispidum, caeterum glabrum, flavescens, ore fuscato truncato terminatum, glumam superans.

Germen oblongum, glabrum, laeve. Stylus basi aequalis. Stigmata duo vel tria, villosula.

Caryopsis oblonga, subtrigona, compressa, mucrone apiculata, glabra, laevis, flavescens.

Habitat in rupibus Unalaschkae. ♃.

C. polytrichoides Mühlenb. et *C. pulicaris L.* nostrae affines; illa differt culmo multo altiore, foliis mollibus, glumis mucronatis et perigyniis laevibus; haec perigyniis demum reflexis laevissimis aliisque notis.

XIV.

Carex micropoda M. Tab. VI.

C. spica androgyna simplici oblonga superne mascula, stigmatibus binis, perigyniis stipitatis laevissimis patentibus ovato-oblongis lato rostratis ore integris glumam obtusiusculam aequantibus, culmis triquetris scabriusculis.

Radix fibrosa, nigricans.

Culmi dense caespitosi, erecti, setacei, triquetri, trisulcati, angulis scabri, quadri- ad sexpollicares. Squamae, ad culmorum basin, duae vel tres, oblongo-lanceolatae, acutiusculae, striatae, glabrae, flavescentes.

Vaginae striatae, glabrae, flavescentes, vel omnes integrae, vel inferiores apice fissae.

Folia culmos superantia, duos ad sex pollices longa, plana, anguste linearia, triquetro-acuminata, margine scaberrima.

Spica androgyna, multiflora, apice mascula; fructifera oblonga. Flosculi masculi quinque ad septem; feminei decem usque ad viginti.

Glumae imbricatae, oblongae, obtusiusculae: inferiores subacutae; omnes glabrae, laeves, rufescentes, nervo dorsali vix pallidiore notatae, margine concolores, persistentes; femineae rarius demum deciduae.

Stamina generis.

Perigynium breviter stipitatum, subcompressum, utrinque convexum, ovali-oblongum, ad basin subattenuatum, apice late rostratum et linea longitudinali exaratum, ore vix hyalino integro pertuso apiculatum, laevissimum, glaberrimum, flavescens, demum patens, glumam aequans.

Germen oblongum, compressum. Stigmata duo.

Caryopsis suborbicularis, utrinque compressa, flavescenti-fuscescens, glabra.

Habitat in Unalaschka. ♃.

Carex pulicaris L. habitu similis, differt foliis multo angustioribus, culmis laevibus, glumis acutis margine hyalinis, perigyniis tandem reflexis utrinque attenuatis, non stipitatis. *C. capitata L.* foliis ad basin usque trigonis, spica subrotunda, perigyniis sessilibus gluma longioribus abunde diversa. *C. pyrenaica Wahlenb.* et *C. nigricans* nob. perigyniis stipitatis cum *C. micropoda* convenientes, reliquis notis prorsus recedunt.

XV.

Carex nigricans M. Tab. VII.

C. spica androgyna simplici oblonga superne mascula, stigmatibus tribus, perigyniis stipitatis patulis laevissimis ovatis rostratis ore scarioso bilobis glumam obtusam subaequantibus, foliis mollibus planis culmum laevem superantibus.

Radix repens, squamis oblongis acutis fuscis tecta, caespites culmorum et radiculas fibrosas protrudens.

Culmi tenues, vix rigiduli, erecti, hinc subplani, illinc convexi, profunde striati, caeterum laeves et glabri, basi squamis oblongis acutis fuscis vaginisque tecti; floriferi vix quadripollicares, fructiferi circiter sexpollicares.

Vaginae foliiferae, integrae, pollicares, striatae, glabrae.

Folia mollia, plana, linearia, longissime acuminata, apice triquetra, striata, glabra, margine scabra, lineam lata, tres ad septem pollices longa, culmos semper superantia.

Spica solitaria, androgyna, terminalis, oblonga, obtusa, ½ poll. longa vel brevior, tres lineas fere lata, apice flosculis masculis sex ad octo, basi femineis decem ad duodecim instructa.

Glumae undique imbricatae, oblongae, obtusae (in speciminibus exsiccatis apice plerumque convolutae et quasi acutae), piceae, margine et dorso vix discolores; masculae longiores et angustiores; in spica fructifera glumae persistentes, rarius partim deciduae.

Perigynium stipite filiformi brevi, ⅓ lin. longo, suffultum, ovato-trigonum, basi rotundatum, rostro elongato oreque scarioso bilobo terminatum, laevissimum, glaberrimum, spadiceum, maturum subhorizontaliter patens, glumam paulo superans.

Germen oblongum, glabrum. Stylus aequalis. Stigmata tria.

Caryopsis oblongo-triquetra, flavescens, laevis, glabra.

Habitat in Unalaschka. ♃.

Proxima *C. pyrenaica Wahlenb.* differt foliis rigidioribus angustoribus et praecipue perigyniis anguste oblongis utrinque attenuatis, rostro crassiore, nec non ore integro. *C. spicata Schk.* a nostra distinguitur culmo scabro altiore et perigyniis sessilibus vix rostratis. *C. petraea Wahlenb.* (*rupestris All.*) perigyniis sessilibus ellipticis erostratis omnino aliena.

XVI.

Carex pyrenaica Wahlenb. Tab. VII.

C. spica androgyna simplici oblonga superne mascula, stigmatibus tribus, perigyniis stipitatis demum patentibus laevissimis lineari-oblongis ore obliqne truncatis glumam acutiusculam deciduam superantibus, foliis rigidulis planis culmum laevem excedentibus.

C. pyrenaica Wahlenb. Act. holm. 1803. p. 139. Willd. Sp. pl. IV. p. 214, excl. syn. Schkuhrii. Willd. En. h. Berol. p. 954. Pers. Syn. II. p. 535. Lam. Encycl. meth. Suppl. III. p. 248. Dec. fl. franç. suppl. p. 287. Lapeyr. Abr. fl. Pyren. p. 562.

C. Ramondiana Dec. fl. franç. III. p. 101.

C. Fontanesiana Dec. l. c. p. 102.

C. acutissima Degl. Pers. l. c.

Radix caespites densos foliorum et culmorum proferens, fibris copiosis fibrillosis fuscescentibus aucta. Squamae ad culmorum basin oblongo-lanceolatae, acutae, striatae, glabrae, sordide dilute rufescentes.

Culmi obtuse trigoni, rigiduli, striati, glabri (nec scabri), seta porcina paulo crassiores; florentes vix bipollicares dense foliosi, fructiferi elongati, superne nudi, tri- ad summum quinquepollicares.

Vaginae integrae, striatae, glabrae, ligulae loco in auriculas obtusas productae, virides; inferiores sordide rufescentes.

Folia rigidula, linearia, ½ lin. vel lineam lata, acuminata, plana vel complicata, striata, margine scaberrima, varie flexa, 1 ad 6 pollices longa, culmos semper superantia.

Spica solitaria, androgyna, superne mascula, oblonga vel elliptica, quatuor lineas circiter longa, duas lata, multiflora: flosculis masculis quatuor vel sex; femineis decem ad quindecim.

Glumae undique imbricatae, oblongae, inferiores plerumque acutiusculae (infima interdum acuminata), superiores obtusiusculae, glabrae, laeves, spadiceae, nervo dorsali rufescente ornatae, margine apice vix hyalinae, demum omnino deciduae.

Stamina tria.

Perigynium breviter stipitatum, lineari-oblongum, utrinque attenuatum, compresso-trigonum, marginibus subincrassatum, laevissimum, glaberrimum, spadiceum, ore hyalino oblique truncatum, glumam paulo superans, demum patens, post maturitatem fere semper deciduum.

Germen oblongum, laeve, glabrum, stylo aequali et stigmatibus tribus coronatum.

Caryopsis oblonga. trigona, mucronata, glabra, laevis, fuscescens.

Habitat in Pyrenaeis. ♃.

C. spicata Schk. satis differt culmis altioribus scabris triquetris, nec non perigyniis sessilibus. *C. petraea Wahlenb.*, *C. pulicaris L.* et *C. micropoda nob.* multo magis recedunt. *C. nigricans nob.* huic maxime affinis est, quare utramque fusius describere et iconibus illustrare non superfluum mihi visum est, ut facilius dignoscerentur.

XVII.

Carex duriuscula M. Tab. VIII.

C. spicis in capitulum oblongum aggregatis androgynis apice masculis, stigmatibus binis, perigyniis ovatis subcompressis subenerviis glabris, margine serrulatis, breviter rostellatis, ore integro hyalino, foliis angustis complicatis culmoque trigono rigidulis rectis.

Planta humilis, duas ad quatuor pollices alta.

Radix tenuis repens, radiculis fibrosis aucta.

Culmi dense caespitosi, rigiduli, stricti, crassitie setae porcinae, basi squamis et vaginis foliiferis involuti, glabri, apicem versus nudi, trigoni, striati et interdum scabriusculi.

Folia pauca, linearia, angusta, (vix $\frac{1}{8}$ lin. lata) complicata, triquetro-acuminata, striata, scabra, rigidula, glaucescentia, recta, rarius parum incurvata, culmum subaequantia, bi- vel tripollicaria; fasciculorum sterilium non raro culmos superantia.

Capitulum terminale, parvum, oblongum, tres lineas longum, duas vix latum, e spiculis tribus vel quatuor compositum.

Spicae oblongae, pauciflorae, androgynae, superne masculae. Flosculi masculi duo vel tres; feminei totidem. Bracteae late ovatae, acutae, integrae, (nec emarginatae), rufae, margine lato scarioso cinctae; infima plerumque mucrone brevi viridi scabriusculo terminata.

Glumae undique imbricatae, ovatae, femineae acutae, masculae obtusae; omnes glabrae, laeves, rufae, margine lato scarioso et carina saturatiore apicem versus parum scabra donatae.

Stamina tria. Filamenta capillaria, alba. Antherae lineares, apiculatae, flavae.

Perigynium obsolete nervosum, subovatum, utrinque attenuatum, plano-convexum, superne margine serrulato-scabrum, caeterum laeve, glabrum, rostro brevi oreque integro hyalino terminatum, glumam subaequans.

Germen oblongum. Stylus basi aequalis. Stigmata duo.

Caryopsis oblonga.

Habitat in Kamtschatka. ♃.

Sine dubio species propria, ita tamen affinis *C. curvulae All.*, *stenophyllae Wahlenb.*, *Hostii Schk. et incurvae Lightf.* ut notis diagnosticis aegre ab illis distinguatur. *C. curvula*, habitu proxima, differt bracteis obcordatis et stigmatibus tribus; *C. stenophylla* culmis acutangulis et perigyniis bidentatis; *C. Hostii* culmis crassioribus altioribusque, foliis latioribus, nec non perigyniis bidentatis; *C. incurva* culmis crassioribus plus minusve incurvis, foliis latioribus, capitulo ovato et glumis margine vix scariosis.

XVIII.

Carex pallida M. Tab. VIII.

C. spica androgyna composita, spiculis alternis approximatis, intermediis masculis, superioribus inferioribusque apice masculis, stigmatibus binis, perigyniis ovatis glabris marginatis serrulatis rostratis ore bifidis gluma acuta longioribus.

Radix . . . .

Culmi pedales, aut fere sesquipedales, erecti, basi tecti squamis (octo ad decem oblongo-ovatis acutis striatis glabris fuscescentibus) et foliorum vaginis; apice nudi, crassitie fili emporetici, compresso-triquetri: angulis acutissimis, scaberrimis; striati, glabri.

Vaginae quinque vel sex, integrae, 1 ad 1½ pollicares, striatae, glabrae, virides.

Folia graminea, mollia, erecta, plana, linearia, acuminata, striata, undique scabra, viridia, quatuor pollices ad pedem usque longa, 1—1½ lin. lata.

Spica terminalis, composita, androgyna, oblonga. Spiculae sex ad decem, multiflorae, plerumque approximatae, rarius versus basin spicae distantes, florentes oblongae vel oblongo-ellipticae; intermediae tres vel quatuor omnino masculae, inferiores et superiores apice tantum masculae. Interdum spiculae androgynae, quae ad basin spicae plerumque observantur, desunt et spiculae superiores flosculis femineis paucis instructae sunt. In aliis speciminibus e contra spicula infima, vel et summa ex toto feminea est. Sub singula spicula bractea invenitur ovata, acuta, plerumque mucrone viridi brevi scabro terminata, dilutissime rufescens, margine lato hyalino instructa et nervo dorsali viridi notata.

Glumae undique imbricatae, bracteis simillimae, minores tamen et semper muticae.

Stamina tria.

Perigynium immaturum ovato-lanceolatum, late marginatum, basi attenuatum, rostro oreque bifido terminatum, glabrum, margine vero ciliato-serratum, glumam superans.

Germen oblongum, laeve, glabrum. Stylus aequalis. Stigmata duo.

Caryopsin maturam non vidi.

Habitat in Kamtschatka.

C. brizoides L., habitu et glumarum colore proxime accedit, staminum autem distributione omnino differt. Nec magis conveniunt *C. arenaria L.*, *intermedia Good.* et *repens Bell.*

XIX.

Carex leiorhyncha M. Tab. IX.

C. spica composita androgyna, spiculis approximatis superne masculis, stigmatibus binis, perigyniis oblongo-ovatis rostratis laevissimis ore bidentatis glumam mucrônatam superantibus, bractea infima foliacea spicam excedente.

Radix . . . .

Culmus 1½ pedalis, basi crassitie pennae corvinae et squamis oblongis acutis striatis glabris fuscescentibus vaginisque tectus, apicem versus attenuatus, obtuse trigonus, vix scabriusculus.

Vaginae sex integrae, bipollicares vel longiores, striatae, glabrae, uno latere tenuissime transversim corrugatae; inferiores fuscescentes folio brevi terminatae; superiores folio multo longiore donatae, virides.

Folia graminea, linearia, acuminata, plana, striata, scabra, viridia, fere pedalia, 1½ lin. lata.

Spica cylindrica, crassitie pennae anserinae, duos pollices longa vel longior, composita e spiculis circiter triginta approximatis, ellipticis, multifloris, androgynis, apice masculis, bracteatis. Bracteae foliaceae, scabrae: infima spicam superans, reliquae spiculas aut superantes aut aequantes. Flosculi feminei, in quavis spicula, vigintiquinque ad triginta, masculi tres vel quatuor.

Glumae undique imbricatae, oblongae, mucronatae, hyalinae, dilutissime rufescentes, nervo viridi notatae; mucrone, in glumis infimis, elongato, in reliquis plus minusve abbreviato.

Stamina tria.

Perigynium erectum, ovato-oblongum, basi paululum attenuatum, rostro profunde bidentato terminatum, hinc convexum, illinc planum, margine membranaceo omnino destitutum, nervosum, laevissimum, flavescens, glumam (exceptis infimis) superans.

Germen oblongum, laeve, glabrum. Stigmata duo, elongata, rufescentia.

Caryopsis elliptica, lenticularis, laevis, glabra, flavescens.

Habitat in Davuria.

Species distinctissima *C. lagopodioidi Schk.* et *C. nemorosae Lumn.* quodammodo affinis.

XX.

Carex wahuensis M. Tab. X.

C. spica mascula solitaria, androgynis binis incluse pedunculatis apice masculis, stigmatibus tribus, perigyniis oblongis ventricosis nervosis glabris rostro hispido bifido terminatis glumam mucronatam aequantibus.

Radix (repens?) multiceps, fibris fibrillosis nigrescentibus aucta.

Squamae oblongae, acutae, striatae, glabrae, nigricantes, basin culmorum et fasciculorum sterilium tegentes.

Culmi trigoni, glabri (nec scabri), striati, erecti, rigiduli, crassitie setae porcinae, basi vaginati.

Vaginae breves, integrae, striatae, glabrae, fuscescentes.

Folia rigidula, linearia, acuminata, plana, subtus subcarinata, glabra, striata, margine scabra, viridia, partim recta, partim inflexa, culmos semper superantia, quatuor ad sex pollices longa, basin versus lineam lata.

Spicae tres. Mascula solitaria, terminalis, breviter pedunculata, multiflora, cylindrica, basi attenuata, bractea setacea basi vaginata suffulta. Androgynae duae, multiflorae, apice masculae, oblongae, breviter incluse pedunculatae; superior spicae masculae approximata; inferior nunc spicae intermediae approximata, nunc ab illa remota et fere radicalis. Bractea, spicas androgynas suffulciens, elongata, setacea, scabra, basin versus vaginata.

Glumae imbricatae; femineae oblongae vel ovato-oblongae, apice attenuatae, emarginatae, masculae infimae apice latissimae, truncatae, superiores obovato-oblongae, late emarginatae; omnes mucrone longo viridi scabro apiculatae, rufae, nervo dorsali marginibusque concolores, apice plerumque hyalinae; femineae maturo fructu deciduae; masculae vero persistentes.

Perigynium oblongum, ventricosum, trigonum, basi attenuatum, rostro margine hispido ad medium fere bifido terminatum, sordide flavescens, glabrum, nervosum, glumam aequans.

Stigmata tria.

Caryopsis obovata, trigona, basi attenuata, stylo persistente basi geniculato apiculata, atra.

Habitat in montibus insulae Wahu. ♃.

XXI.

Carex pediformis M. Tab. X.

C. spica mascula solitaria, femineis subternis linearibus subapproximatis, stigmatibus tribus, perigyniis trigono-obovatis brevissime oblique rostratis pubescentibus glumam acutam mucronatam aequantibus, bracteis vaginatis cuspidatis, culmo basi folioso.

Radix repens, caespites densissimos foliorum et culmorum protrudens. Radiculae fibrosae, nigricantes.

Culmi tenues, compresso-trigoni, striati, scabri, ½—1 pedales, nunc debiliores et flaccidi, nunc rigidiores et sricto-erecti, basi vaginis aliquot foliiferis squamisque oblongo-lanceolatis, acutis obtusisve, striatis, glabris obtecti.

Vaginae sex vel septem, integrae, striatae, glabrae, pollicares, dilute virides; infima interdum dilutissime purpurascens; omnes folio terminatae.

Folia graminea, plana, linearia, acuminata, dilute viridia, subglauca, utrinque scabriuscula, margine scaberrima, ½ lin. circiter lata, 1 ad 6 pollices longa.

Spica mascula solitaria ad basin spicae femineae supremae sessilis et illa duplo fere brevior, vix tres lineas longa, cylindrica, quinque- vel sexflora. Spicae femineae tres (raro duae), superiores approximatae, infimae plerumque paulo distans; summa sessilis, inferiores incluse pedunculatae; omnes cylindricae, graciles, erectae, sex ad octo lineas longae, sex- ad decemflorae. Bracteae loco, sub quavis spicula, adest vagina cylindrica, integra, tres ad quatuor lineas longa, oblique acuminata et cuspide viridi scabro bilineari terminata.

Glumae oblongae, acutae, breviter mucronatae, glabrae, laeves, carina viridi apicem versus una cum mucrone scabrae, ferrugineae, margine scarioso cinctae; in spica mascula dense imbricatae, in spicis femineis subdistantes.

Stamina tria.

Perigynium pubescens, obtuse trigonum, costatum, obovatum, basi valde attenuatum, rostro brevissimo obtusissimo obliquo et ore integerrimo truncato terminatum, glumam aut aequans aut illa vix brevius.

Stigmata tria.

Caryopsis triangularis, obovata, basi attenuata, apice obtusa et mucrone incurvo apiculata, flava, tenuissime striata.

Habitat in Kamtschatka, ad Baicalem, nec non in locis montosis siccis regionis altaicae.

Simillima *C. digitatae L.* et, primo intuitu, vix ab hac distinguenda; optime vero distincta vaginis ad basin culmi viridibus semper foliiferis, nec, ut in illa, aphyllis purpureo-coloratis; bracteis semper cuspidatis, nec plerumque muticis; glumis oblongis in mucronem attenuatis, nec obovatis truncatis mucronatis; perigyniis denique rostro incurvo brevissimo obtusissimo, nec acuto recto terminatis. A *C. ornithopoda W.* eisdem fere notis distinguitur. *C. pedata L. Wahlenb.* multo magis differt bracteis amplectentibus, glumis brevioribus obtusis, nec non perigyniis subglobosis ore bilobis.

XXII.

Carex longerostrata M. Tab. XII.

C. spica mascula solitaria oblonga, femineis subbinis remotis pedunculatis, stigmatibus tribus, perigyniis subglobosis hispidulis rostro longissimo bicuspidato margine hispido apiculatis, glumam cuspidatam subaequantibus.

Radix late repens, tecta squamis oblongis acutis vel obtusis glabris striatis nigro-fuscis, hinc inde culmos solitarios, foliorum fasciculos et radiculas elongatas filiformes fibrillosas proferens. Stuppa ad culmorum basin, fibrosa, capillaris, nigra, a squamis et vaginis dilaceratis oriunda.

Culmi incurvi, tenues, setae porcinae crassitie vel interdum paulo crassiores, triquetri, glabri, striati, ad angulos scabriusculi, basi vaginati et squamati, sex pollices ad pedem usque alti.

Vaginae integrae, pollicares vel bipollicares, striatae, glabrae; infima nigricans, superiores virides.

Folia in culmis floriferis duo vel tria, vix bipollicaria; fasciculorum sterilium vero longissima, culmos fere semper superantia, pedalia et altiora, lineam circiter lata, non raro angustiora, rarius paulo latiora; omnia linearia, acuminata, plana, rigidula, erecta, glabra, striata, margine scabra.

Spica mascula terminalis, solitaria, oblonga, multiflora, sex vel septem lineas longa. Spicae femineae plerumque binae, rarius solitariae, distantes, subexserte pedunculatae, tri- ad septemflorae, florentes lineari-oblongae, fructiferae subovatae. Bracteae foliaceae, basi vaginatae, spicam vel superantes vel aequantes.

Glumae undique imbricatae, ovato-oblongae, aliae acutatae, aliae obtusae et apice interdum subemarginatae, semper tamen longe cuspidatae, glabrae, carina viridi cuspideque scabrae; in spicis femineis floriferis albidae vel dilutissime rufescentes, in spicis fructiferis et masculis ferrugineae, marginibus scariosis angustis cinctae.

Stamina tria. Filamenta et Antherae generis.

Perigynium florens lineari-oblongum, hispidulum, apice bifidum, viride; in fructu maturo vero flavescens, erectum, obovato-subglobosum, obsolete obtusissimeque trigonum, hispidulum, rostro elongato margine hispido apice profunde bifido instructum, glumam paulo superans.

Germen subrotundo-oblongum, glabrum. Stylus elongatus. Stigmata tria.

Caryopsis subgloboso-obovata, mucrone incurvo apiculata, glabra, laevis, sordide albida.

Habitat in Kamtschatka. ♃.

Proxima *C. Michelii Host.* a nostra planta differt praesertim spicis femineis multifloris, glumis femineis brevius mucronatis, non raro omnino muticis; masculis vel omnibus muticis vel infimis tantum breviter mucronatis, perigyniis, in fructu maturo, magis oblongis trigonis, rostro breviore, nec non caryopsi oblonga, obtusa, triquetra.

XXIII.

Carex stylosa M. Tab. XII.

C. spica mascula solitaria, femineis oblongo-cylindraceis binis pedunculatis erectis, stigmatibus tribus, perigyniis glabris tenuissime granulatis ellipticis trigonis ore integerrimis stylo persistente exserto mucronatis, glumam obtusiusculam aequantibus, bracteis setaceis amplectentibus.

Squamae radicem repentem et culmorum basin tegentes oblongo-ovatae, partim obtusae, partim acutae, glabrae, striatae, fuscae.

Culmi erecti, rigiduli, triquetri, ad angulos scaberrimi, pedales, crassitie fili emporetici, basi foliosi.

Vaginae omnes foliiferae, striatae, glabrae: in inferioribus latus, folio oppositum, demum reticulatim in fibrillas capillaceas disrumpens.

Folia erecta, rigidula, linearia, acuminata, plana, subtus subcarinata, striata, glabra, margine scabra, quatuor ad octo pollices longa, vix lineam lata, plerumque angustiora, viridia, punctis nigris minutis adspersa.

Spica mascula terminalis, solitaria, erecta, multiflora, lineari-oblonga, ½ pollicaris; interdum ad basin aucta flosculo femineo unico vel binis. Spicae femineae duae, subapproximatae; superior breviter, inferior longius pedunculata; erectae, multiflorae, oblongae, ½ pollicares, suffultae bractea squamaeformi minuta atropurpurea culmum amplectente, quarum infima foliolo setaceo scabro pollicari terminata, suprema vero acuta mutica.

Glumae undique imbricatae, oblongae; femineae obtusiusculae, masculae obtusae; glabrae, laeves, purpurascenti-atrae, margine angustissimo albido cinctae, carina dilutiore pictae.

Stamina tria.

Perigynium trigonum, ellipticum, acutiusculum, basi magis attenuatum et quasi stipitatum, glabrum, sub lente tenuissime granulatum; ore integerrimo, obtuso; glumam aequans.

Stylus aequalis. Stigmata tria.

Caryopsis flavescens, glabra, laevis, elliptica, trigona, basi attenuata, apice obtusa et stylo persistente perigynium excedente apiculata.

Habitat in Unalaschka. ♃.

Summa affinitas, quoad habitum, *C. cespitosae L.*, quae tamen distinguitur spicis femineis sessilibus, perigyniis compressis stigmatibus binis, stylo nunquam exserto. *C. aethostachya Schk.* differt spicis confertis, femineis sessilibus aliisque notis; *C. panicea L.* et *C. livida Wahlenb.* foliis glaucis, bracteis vaginatis, etc.; *C. subspathacea Fl. Dan.* spicis bractea subinvolutis, nec non perigyniis glumam superantibus; *C. glauca Scop.* spicis masculis pluribus, femineis nutantibus, foliis glaucis.

XXIV.

Carex hebecarpa M. Tab. XII.

C. spica mascula solitaria, femineis subquinis filiformibus distantibus suberectis inferioribus exserte pedunculatis, stigmatibus tribus, perigyniis pubescentibus oblongis triquetris rostratis bidentatis, glumam mucronatam superantibus.

Planta bipedalis.

Culmus erectus, triqueter, scaber, striatus, crassitie fili emporetici, tectus ad basin vaginis quatuor aphyllis, in medio vaginis totidem foliiferis, supra medium foliis floralibus quinque.

Vaginae inferiores integrae, acutae, partim muticae, partim mucrone foliaceo vix ½ pollicari terminatae, striatae, obsolete scabriusculae, glabrae, fuscopurpurascentes, 1 ad 2 pollicares. Vaginae foliiferae, integrae, angulatae, striatae, basin versus praecipue hispidae, 1 vel 1½ pollicares. Vaginae foliorum floralium breviores, minus hispidae. Ligula membranacea, fusca, hispidula, acutiuscula.

Folia linearia, acuminata, graminea: exsiccata margine plerumque revoluta vel omnino convoluta; glabra, striata, undique scabra; oculo armato tenuissime punctata; viridia, 1½ lin. circiter lata, sex ad octo pollices longa; floralia angustiora, convoluta, summitatem culmi superantia.

Spica mascula terminalis, solitaria, sessilis, filiformis. Spicae femineae quinque, filiformes, multiflorae, suberectae, remotae; infimae duae longius, superiores brevius pedunculatae; summa ad basin spicae masculae posita et illa longior.

Glumae in spica mascula arcte, in spicis femineis laxe imbricatae, oblongae, albidae, nervo viridi notatae, mucronatae; mucrone scabro glumarum inferiorum longiore, superiorum breviore.

Stamina tria.

Perigynium triquetrum, oblongum, utrinque angustatum, rostro tenui recto apice leviter bifido terminatum, pubescens, flavescens, glumam superans.

Stigmata tria.

Caryopsis oblonga, utrinque acuta, triquetra, glabra, laevis, flava.

Habitat in Nepalia.

Affinis *C. sylvatica Huds.* differt glumis longioribus et perigyniis glabris. *C. Doniana Spr.* (*C. chlorostachys Don*) perigyniis gaudet ventricosis costatis laevibus, quae non ita se habent in *C. hebecarpa.*

XXV.

Carex macrochaeta M. Tab. XIII.

C. spica mascula solitaria, femineis binis distantibus pedunculatis fructiferis subnutantibus, stigmatibus tribus, perigyniis laevibus compressis oblongo-lanceolatis acutis ore integerrimis, gluma aristata brevioribus, bracteis foliaceis amplectentibus.

Planta pedalis vel sesquipedalis.

Radix repens, squamis tecta, radiculas fere pedales villosas fibrillosas proferens.

Squamae, ad culmorum basin, ovatae, acutae, striatae, glabrae, rufescentes vel purpurascentes.

Culmi caespitosi, erecti, basi foliosi, superne nudi, triquetri, striati, glabri, ad angulos scabriusculi, crassitie fili emporetici, virides.

Vaginae omnes foliiferae, integrae, striatae, glabrae. Ligula membranacea, obtusa.

Folia erecta, rigidula, linearia, inferiora acuta, superiora acuminata, plana, margine non raro revoluta et apice plerumque convoluta, striata, glaberrima, margine tamen scabriuscula; infimum 1½ pollicare, alterum tripollicare, tertium sex ad septem pollices longum, summum vero culmum aequans, pedale, interdum folio tertio ita approximatum ut quasi opposita appareant. Folia floralia basi auriculato-amplectentia, (nec vaginata); infimum culmi partem superiorem excedens, superius setaceo-filiforme spica duplo triplove longius.

Spica mascula solitaria, terminalis, oblonga, ½ ad 1½ pollicaris, plerumque incurvata. Spicae femineae duae, distantes, suprema subsessilis erecta, infima pedunculata (pedunculo capillari laevissimo ½ ad 1½ poll. longo): omnes oblongae vel subovatae, multiflorae, aliae ½ pollicares, aliae fere 1½ pollicares.

Glumae masculae et femineae oblongae, acutae, carina setaque longissima scabra flava instructae; caeterum piceae et margine omnino concolores.

Stamina tria.

Perigynium compressum, oblongo-lanceolatum, acutum, ore integerrimum, glaberrimum; sub lente adspectum margine tenuissime granulatum; obsolete nervosum, basi flavescens, apice piceum, glumarum seta multo brevius; in aliis speciminibus duas lineas longum, lineam latum; in aliis duplo brevius et angustius.

Germen oblongum, glabrum, laeve. Stylus aequalis. Stigmata tria, rarissime duo.

Caryopses laevissimae, glabrae, griseae, figura et magnitudine (non raro in una eademque spica) mire variant, ita ut aliae oblongae, utrinque acutae, triquetrae, lateribus duobus planis tertio convexo latioribus; aliae breviores, obovatae, basi attenuatae, apice obtusae et quasi praemorsae, compresso-trigonae observentur.

Habitat in Unalaschka. ♃.

Carex maritima Vahl, *C. crinita Lam.* et *C. salina Wahlenb.* nostrae quodammodo affines differunt spicis masculis numerosioribus, glumis pallidioribus, stigmatibus semper binis et perigynii forma. *C. subspathacea Fl. Dan.* glumis obtusis, nec mucronatis, facile dignoscitur.

XXVI.

Carex cryptocarpa M. Tab. XIV.

C. spicis masculis subternis, femineis subternis distantibus pedunculatis nutantibus, stigmatibus binis, perigyniis glabris tenuissime granulatis ellipticis compressis brevissime rostellatis ore integris, gluma oblonga mutica duplo brevioribus.

Radix longissime repens, squamis vestita amplis oblongo-lanceolatis acutis striatis glabris fuscis vel fusco-purpurascentibus, fibris crassiusculis fibrillosis nigricantibus aucta.

Culmi erecti, rigidi, basi squamis aliquot vaginisque foliiferis tecti, superne nudi, crassitie fili emporetici vel crassiores, triquetri, glabri, striati, ad angulos scabriusculi vel omnino non scabri, virides; florentes pedales, fructiferi $1\frac{1}{2}$ ped. alti.

Vaginae omnes folio terminatae, integrae, striatae, glabrae, bi- vel tripollicares, virides; inferiores purpurascentes. Ligula brevis, obtusissima, membranacea, fuscescens.

Folia stricta, linearia, plana, triquetro-acuminata, dorso carinata, trinervia, glabra, margine scabriuscula, duas ad octo pollices longa, unam ad duas lineas lata, viridia, nullo modo glauca. Bracteae, in spicis femineis, foliaceae, basi auriculato-amplectentes (nec vaginatae), summitatem culmi aequantes vel superantes; summae, ad spicarum mascularum basin, setaceae.

Spicae omnes exserte pedunculatae (pedunculis triquetro-filiformibus, sublaevibus, pollicem ad tres pollices longis); masculae duae vel tres; rarius solitaria in speciminibus humilioribus; subdistantes, subclavatae, multiflorae, ½ poll. longae vel longiores; summa suberecta; inferiores cernuae. Spicae femineae duae vel tres, distantes, oblongae; florentes cernuae, fructiferae nutantes; multiflorae; non raro omnes apice flosculis aliquot masculis instructae, saepius tamen infima ex toto feminea.

Glumae arcte imbricatae, oblongae vel oblongo-lanceolatae, acutae, muticae, glabrae, laeves, piceae, carina viridi pictae, margine, nudo oculo, concolores, oculo armato vero masculae ex toto, femineae apice tantum margine hyalino angustissimo cinctae.

Stamina tria. Filamenta alba, capillaria. Antherae lineares, breviter apiculatae, flavae.

Perigynium ellipticum, subcompressum, hinc planum, illinc convexum, rostro brevissimo integro apiculatum, flavescens, subnervosum, sub lente tenuissime granulatum, gluma omnino tectum et illa plerumque duplo brevius.

Germen anguste oblongum, glabrum. Stylus aequalis. Stigmata duo.

Caryopsis ovato-elliptica, compressiuscula, hinc subplana, illinc convexa et obsolete carinata, caeterum obscure fusca, tenuissime granulata.

Habitat in Unalaschka et Kamtschatka. ♃.

C. glauca Scop., habitu proxima, satis distincta foliis glaucis, glumis brevioribus et stigmatibus tribus. *C. crinita Lam.*, *C. maritima Vahl* et *C. salina Wahlenb.* praeter alias notas distinguuntur glumis mucronatis.

EXPLICATIO ICONUM.

Schoenus puberulus.

A. apex folii.
b. B. gluma infima, a latere visa.
c. C. glúma media, a latere visa.
d. D. pistillum et stamina.
e. E. pistillum.

Isolepis oligantha.

A. apex folii.
b. B. c. C. phylla involucri, a latere visa.
d. D. gluma, a latere visa.
e. E. pistillum et stamina.

Scirpus kamtschaticus.

a. A. gluma, dorso visa.
b. B. pistillum et stamina.

Scirpus melanospermus.

A. apex folii.
b. B. gluma, a latere visa.
c. C. eadem, dorso visa.
d. D. caryopsis matura.
E. eadem, transversim secta.
F. setae hypogynae.

Elytrospermum californicum.

a. A. gluma cum pistillo, antheris, filamentis et lodiculae squamis.
B. pistillum.
c. C. caryopsis matura, lodiculae squamis et filamentis persistentibus cincta.

D. eadem, denudata.
E. eadem, transversim secta.

Cyperi (figurae omnes eodem modo auctae).
1. 2. 3. pars spiculae floriferae.
4. gluma cum appendicibus.
5. 6. pars spiculae fructiferae.
7. gluma.
8. appendices a gluma separatae.

Eriophorum callitrix.
A. apex folii.
C. pistillum et stamina, lana cincta.
d. D. figura eadem, lana destituta.
e. E. caryopsis matura.
F. eadem, transversim secta.

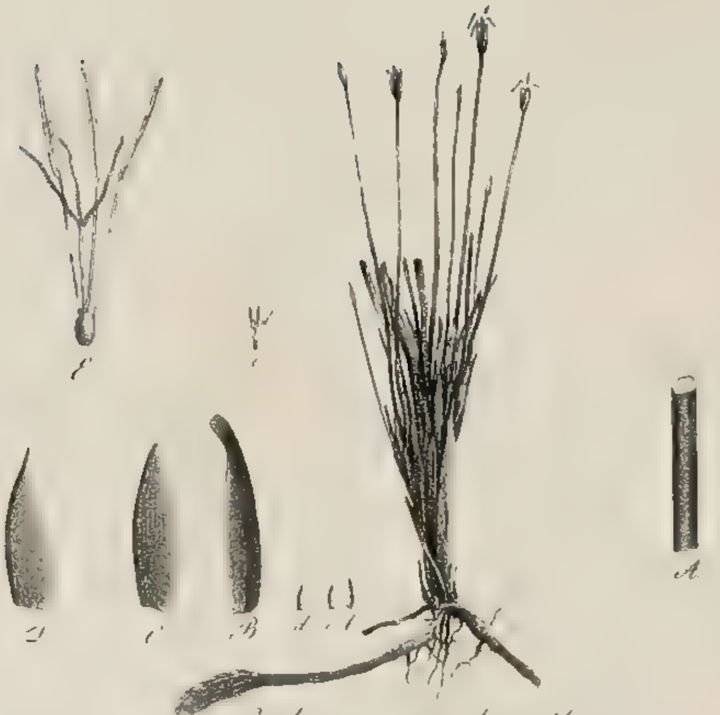
Eriophorum Chamissonis.
A. capitulum fructiferum.
B. apex folii.
c. C. gluma.
d. D. pistillum et stamina, lana cincta.
e. caryopsis matura, cum setis 2.
E. eadem, setis truncatis.
F. eadem, setis destituta et transversim secta.

Uncinia et Carices.
A. pars culmi.
B. apex folii.
c. spicula.
d. D. bractea.
e. E. gluma mascula.
f. F. gluma feminea.

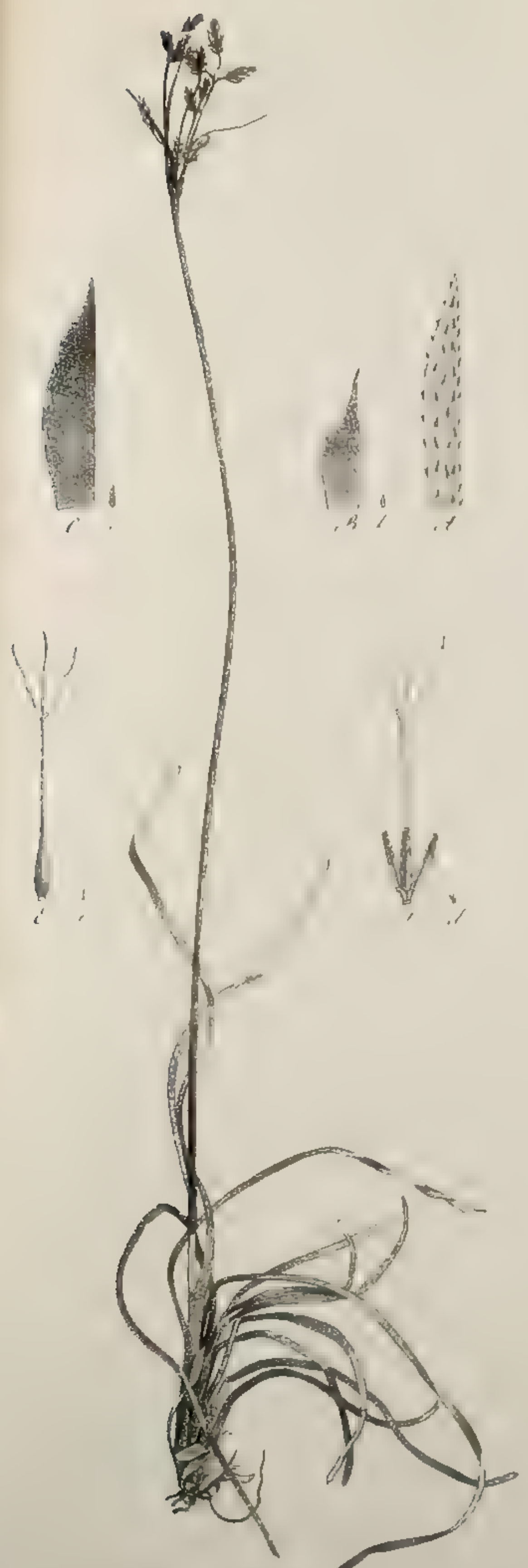
g. G. perigynium florens cum stigmatibus.
h. H. idem, stigmatibus destitutum.
i. I. perigynium maturum.
K. idem, transversim sectum.
l. L. caryopsis immatura.
m. M. caryopsis matura, a latere visa.
n. N. eadem, dorso visa.
O. eadem, transversim secta.

Mém. d. sav. étr.

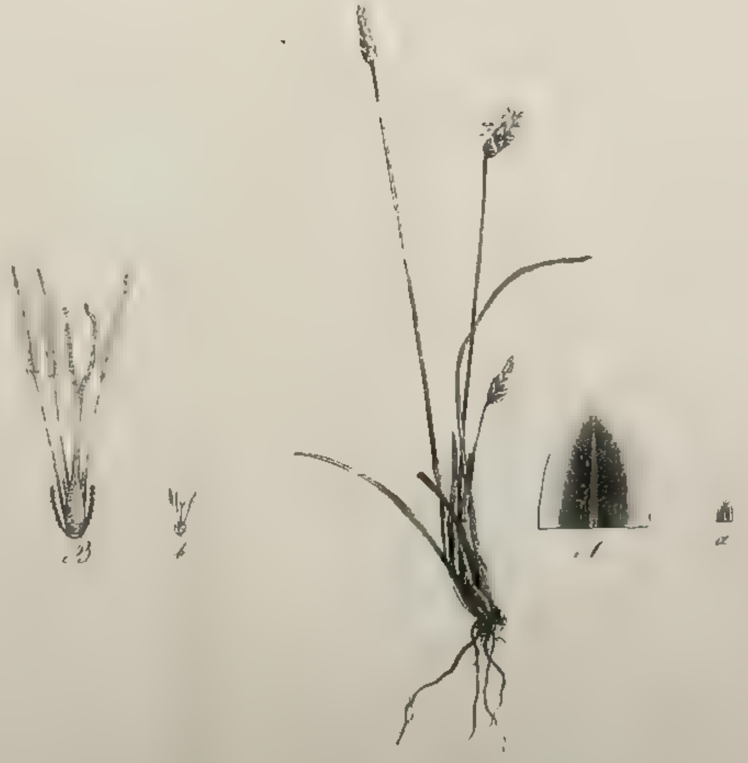
Eriop.



Isolepis elegantha



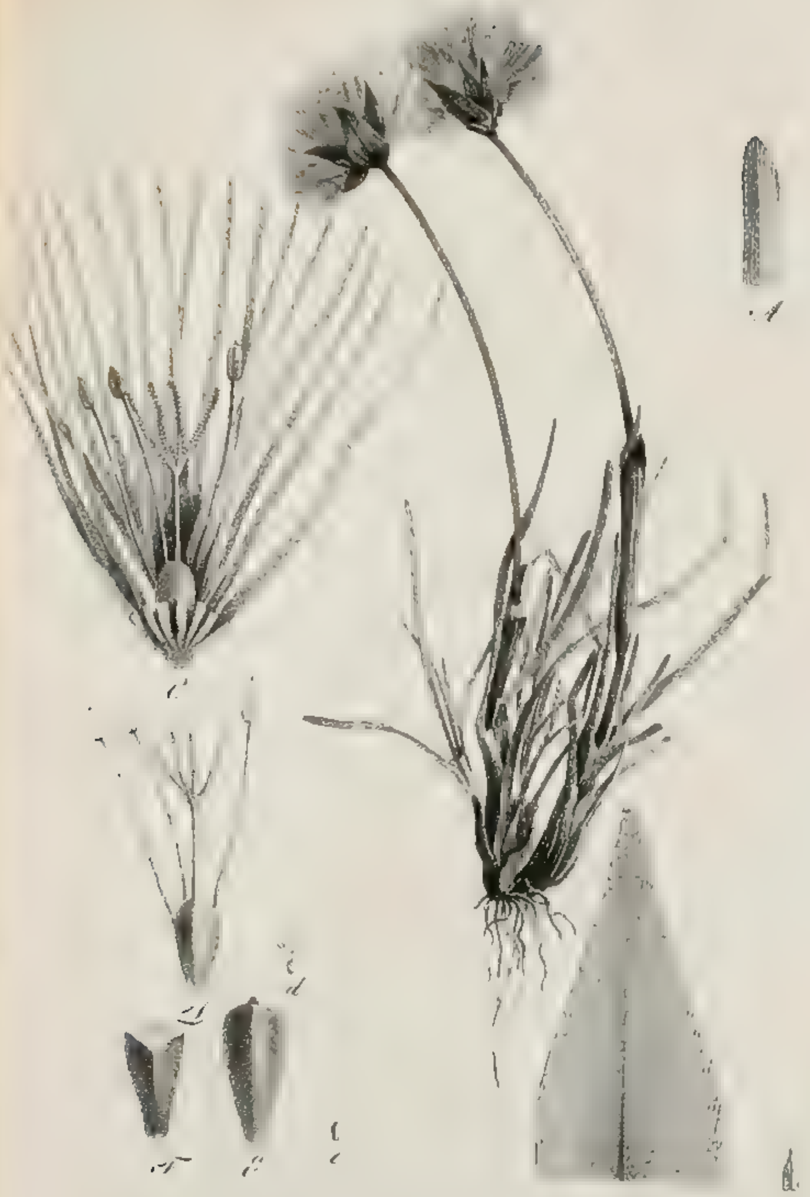
Schoenus puberulus



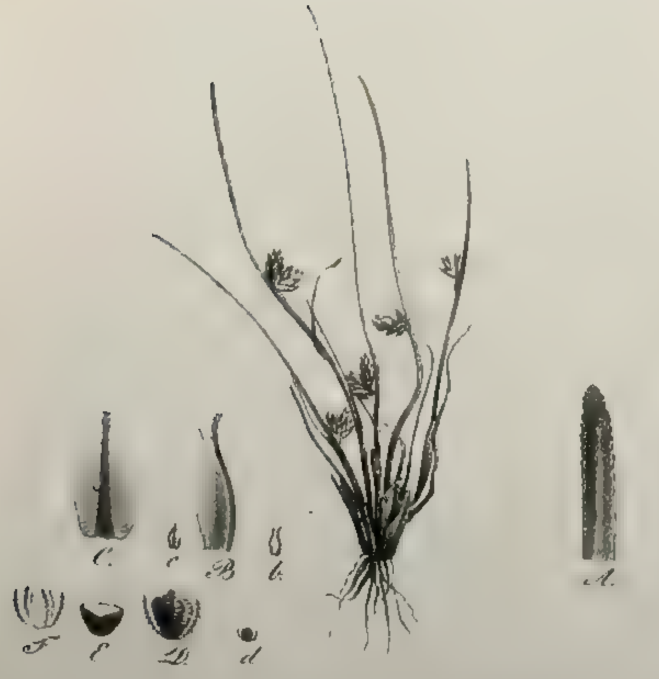
Scirpus kamtschaticus

Mém. d. sav. étr.

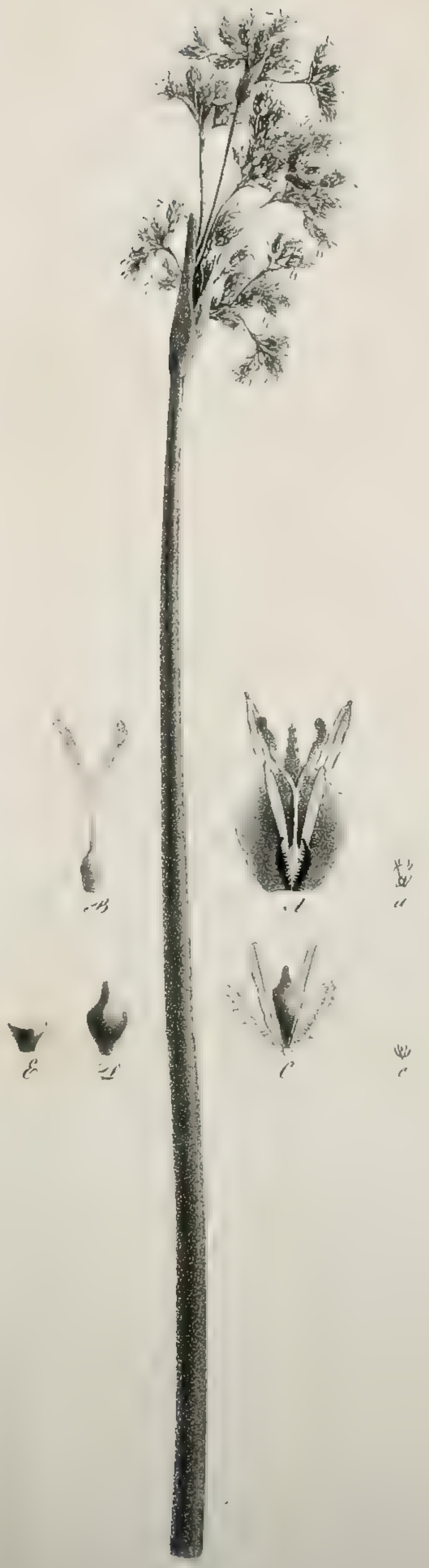
Eriop



Eriophorum callitrix

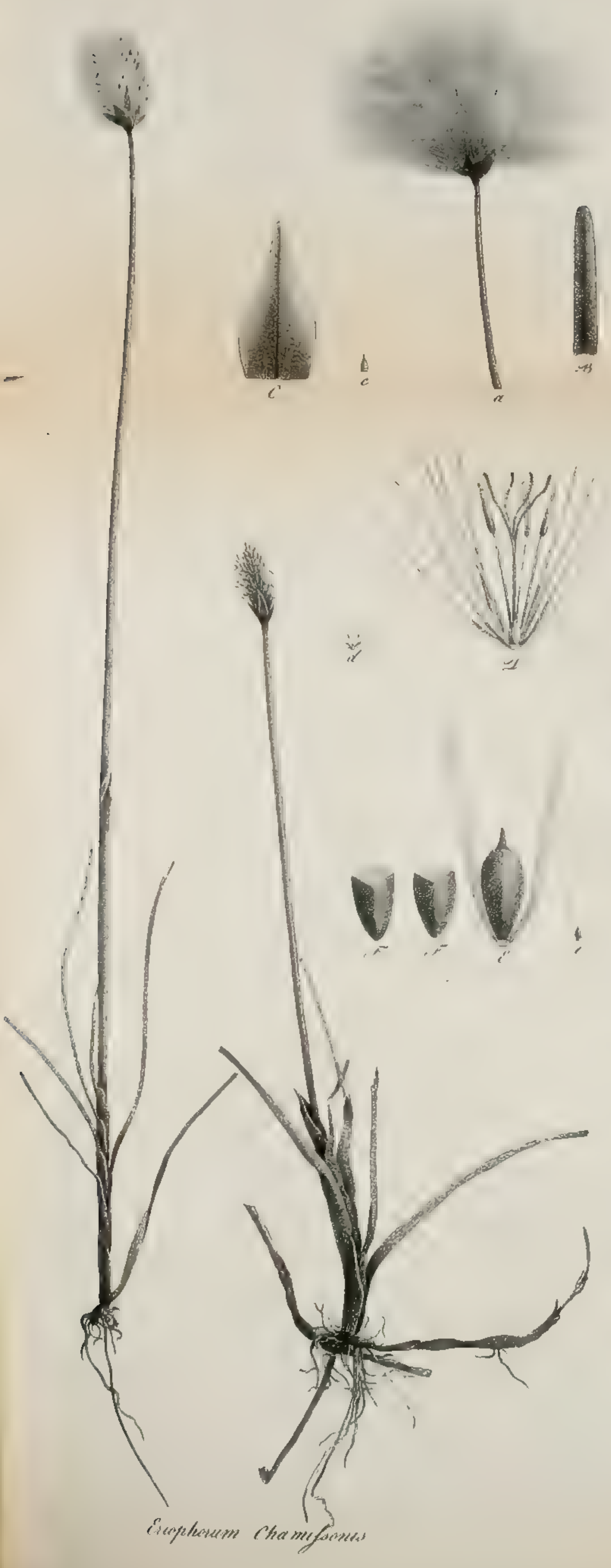


Scirpus melanospermus

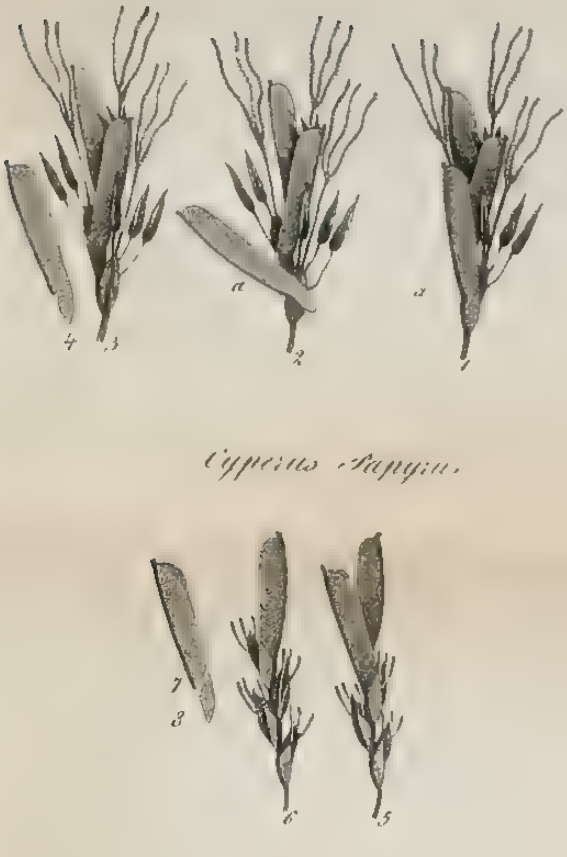


Elytrospermum californicum.

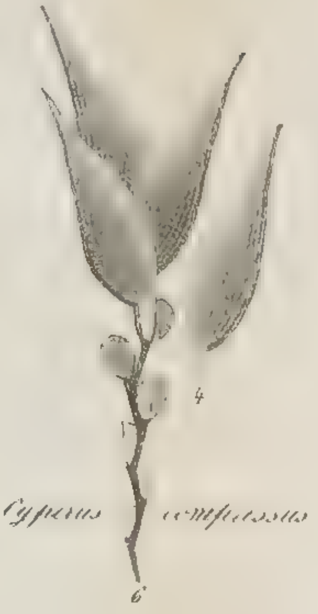
Eriop


C
c
a
B
D
d
F
F
E
f

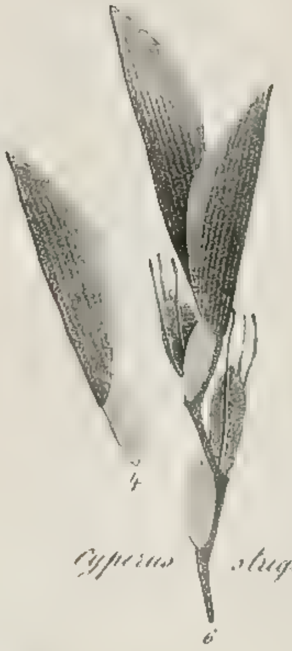
Eriophorum Chamissonis


4
3
2
1
a
a
7
3
6
5

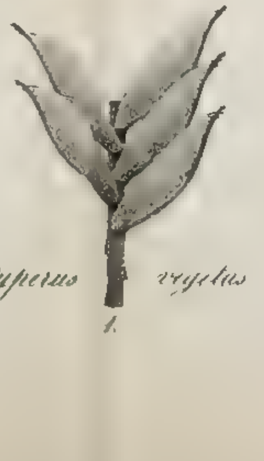
Cyperus Papyrus



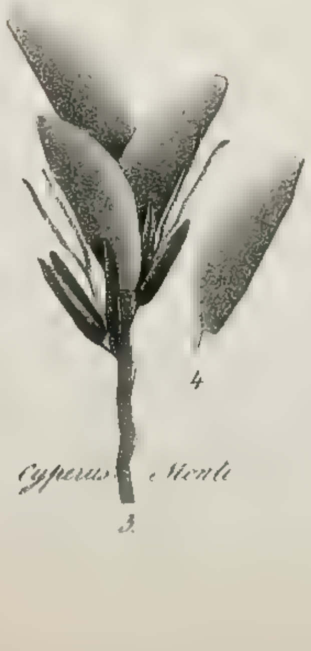
Cyperus compressus



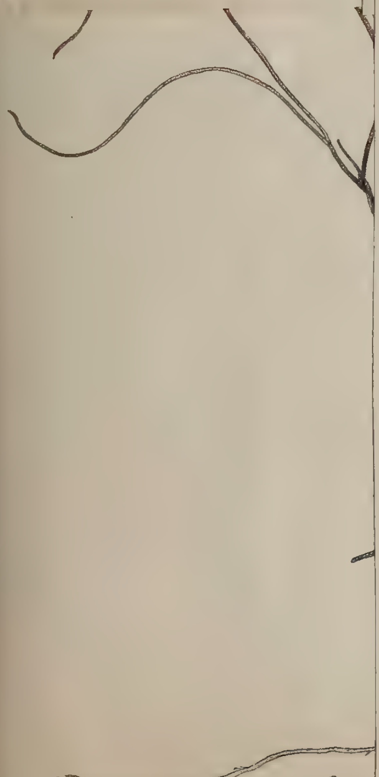
Cyperus strigosus



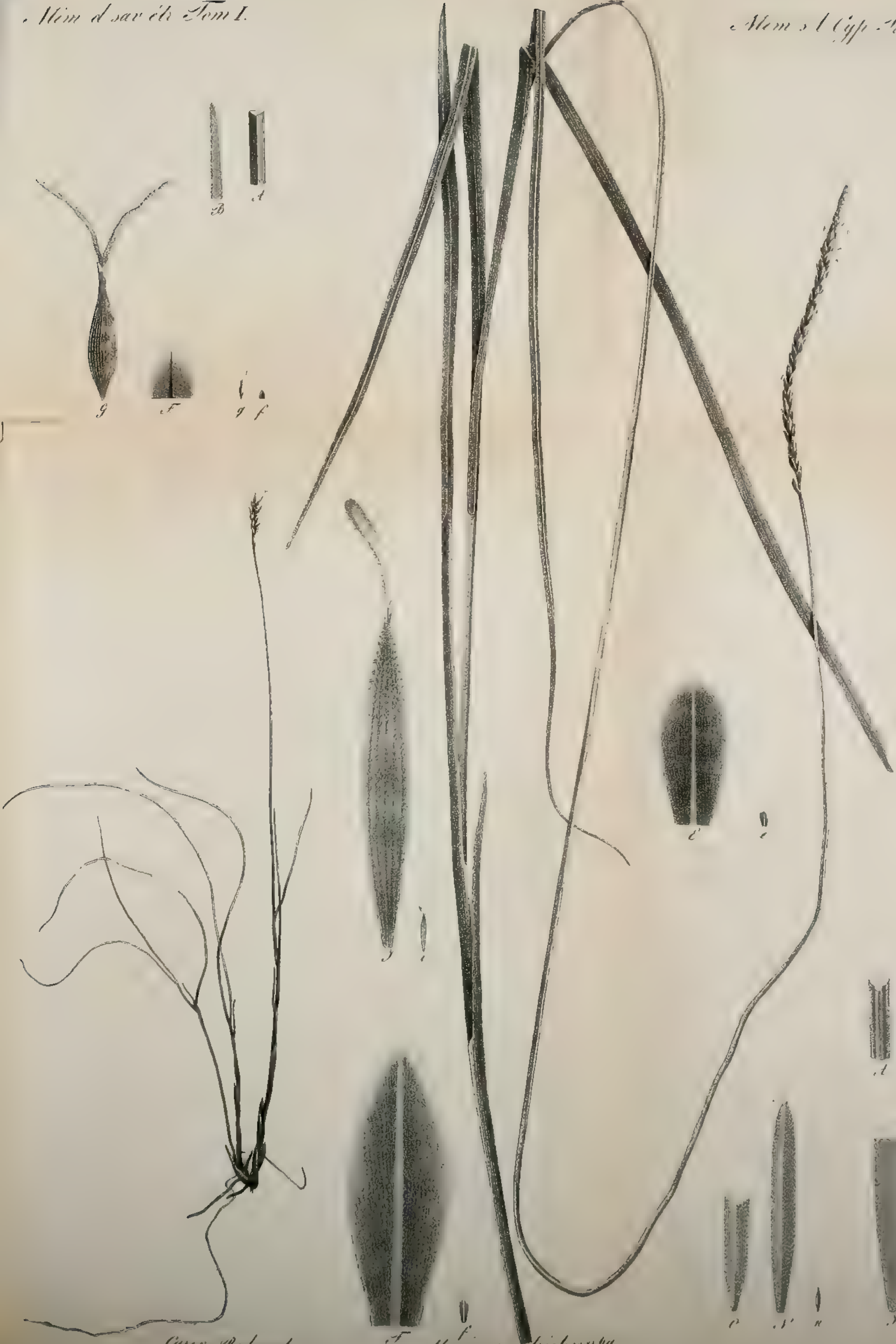
Cyperus vegetus



Cyperus Monti

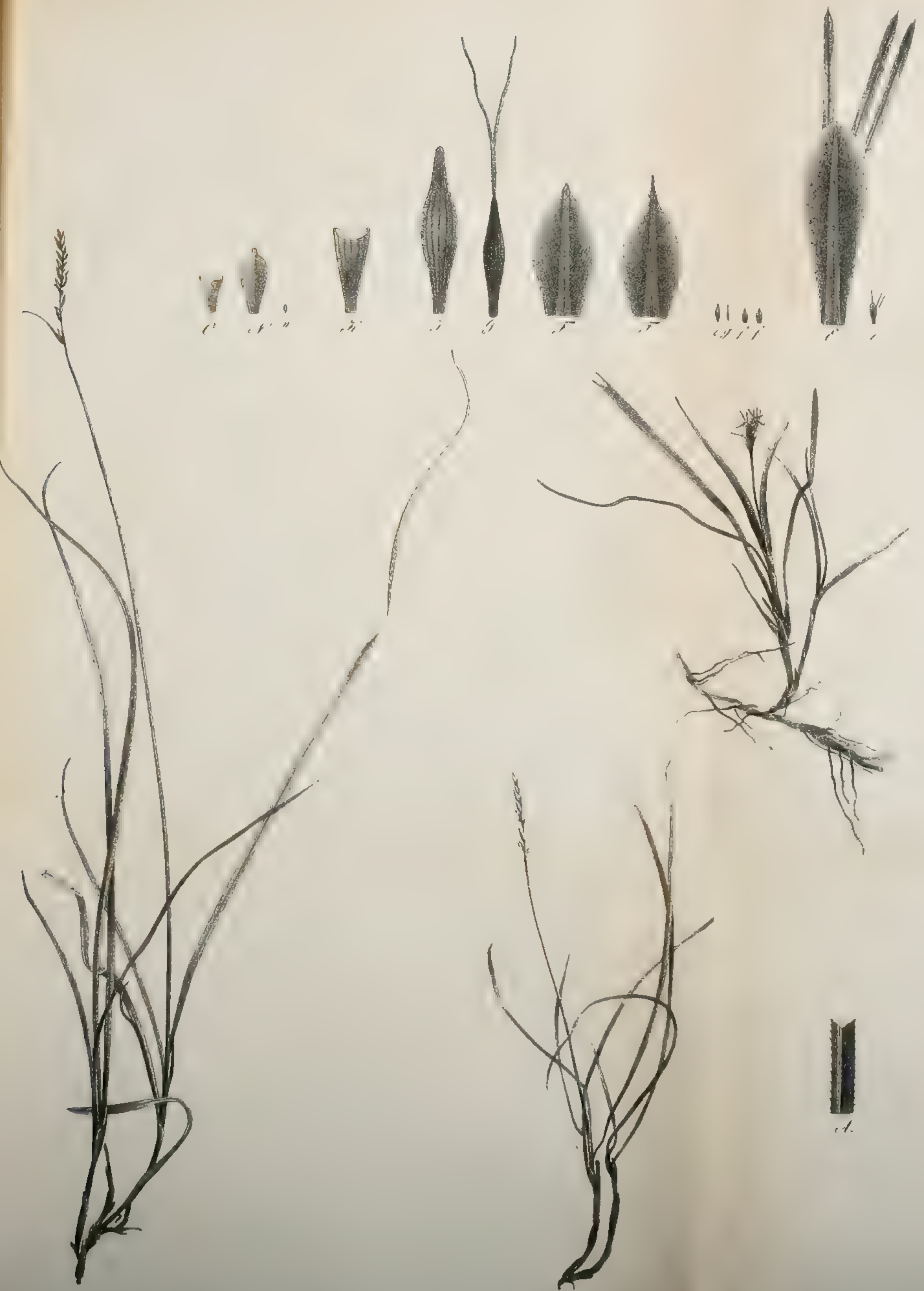


Care


B
A
g
F
g
f
g
f
e
e
F
f
A
c
N
n
N

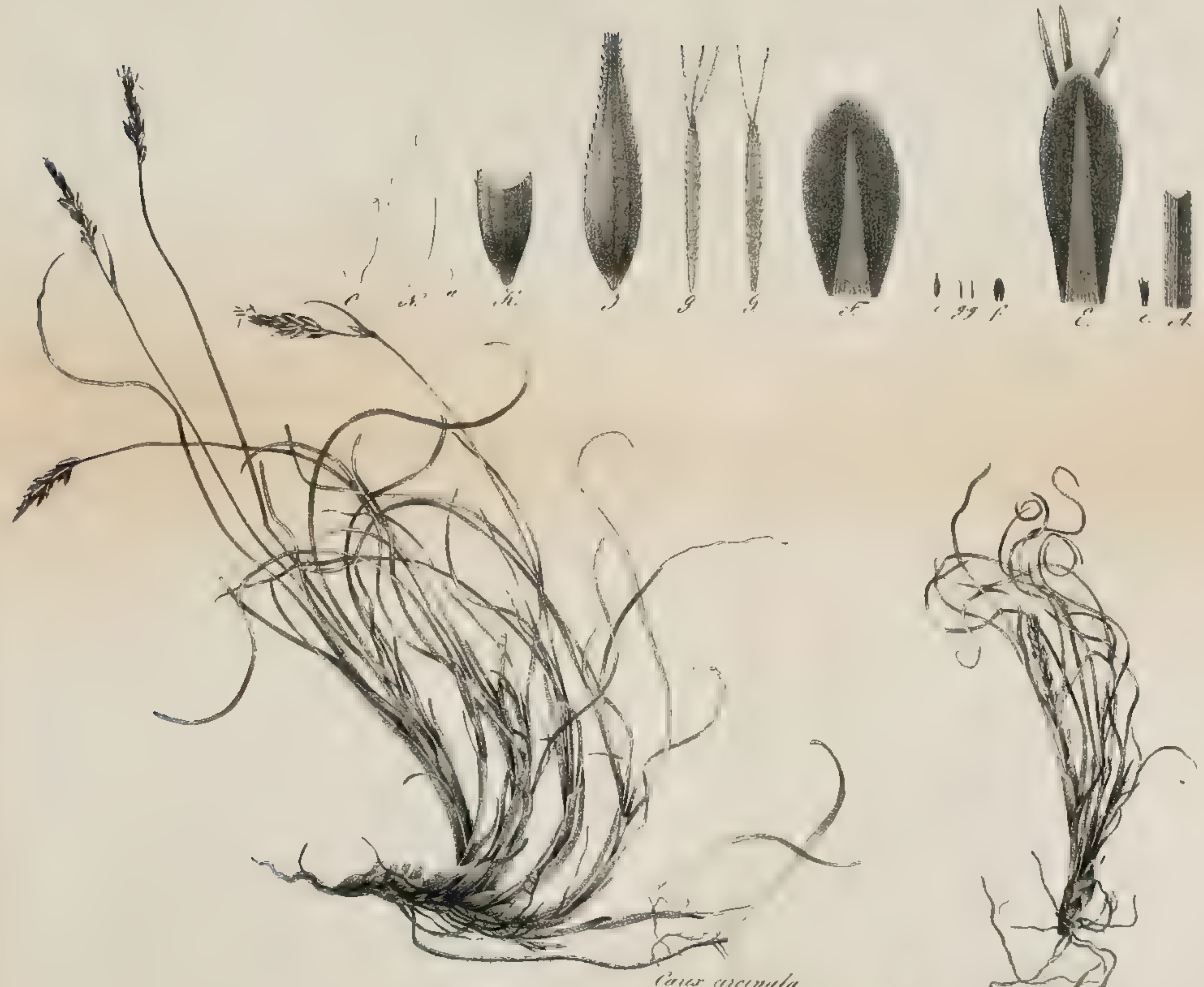
Carex Redowskiana

Uncinia trichocarpa

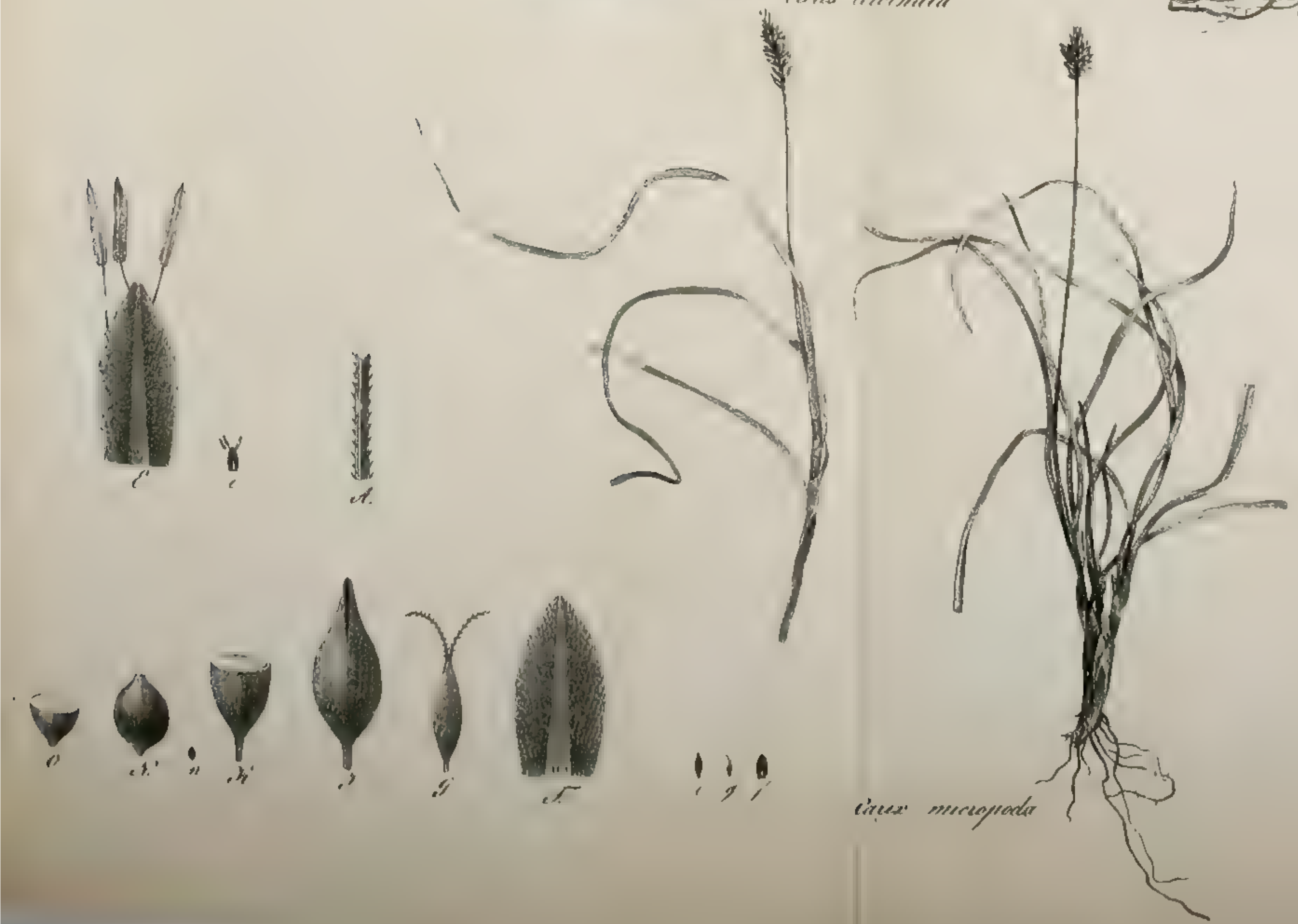


Carex leiocarpa.

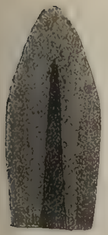
o.


c
N
n
K
I
g
G
F
i
gg
f
E
e
A

Carex circinata

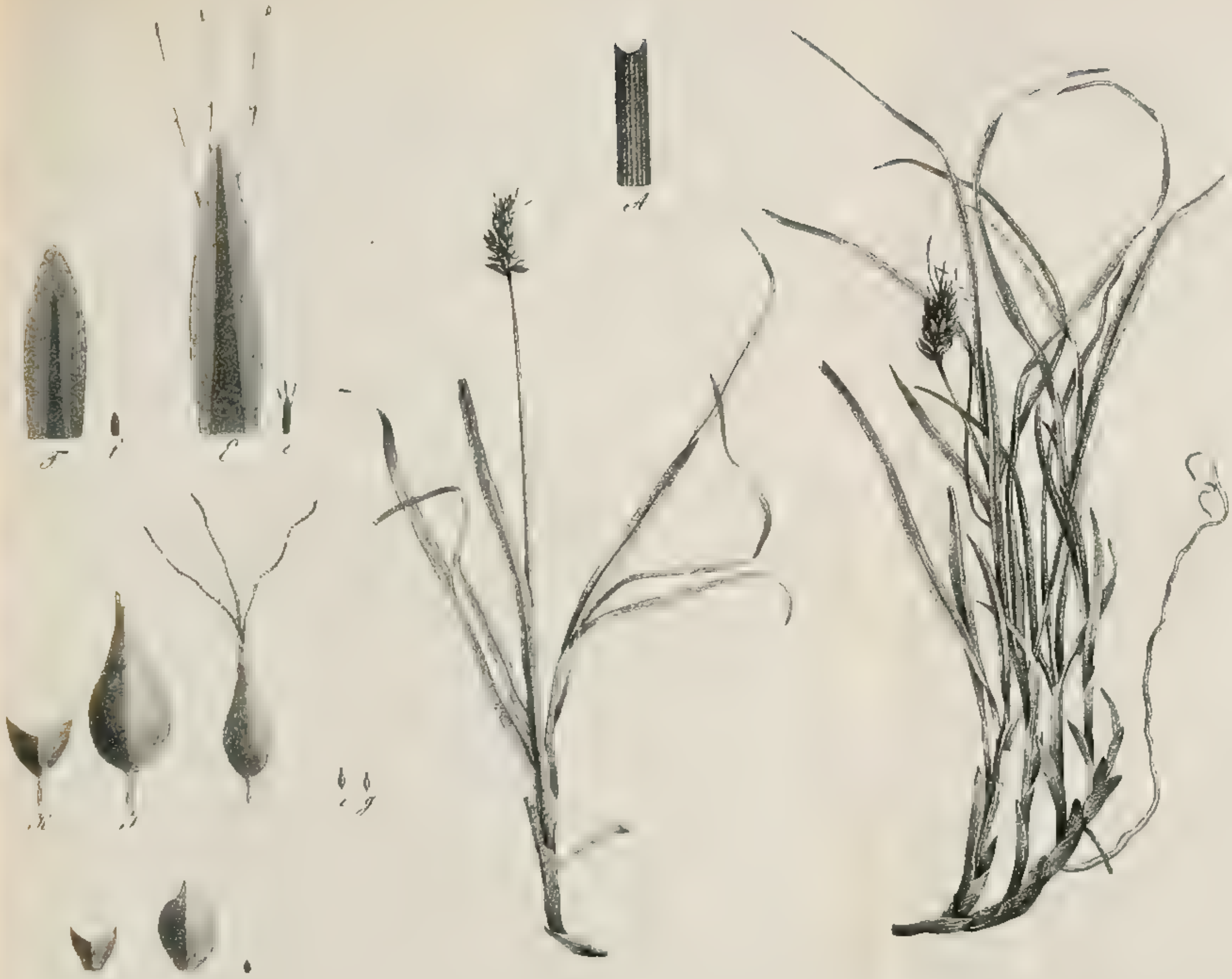

E
e
A
O
N
n
K
I
G
F
i
g
f

Carex micropoda

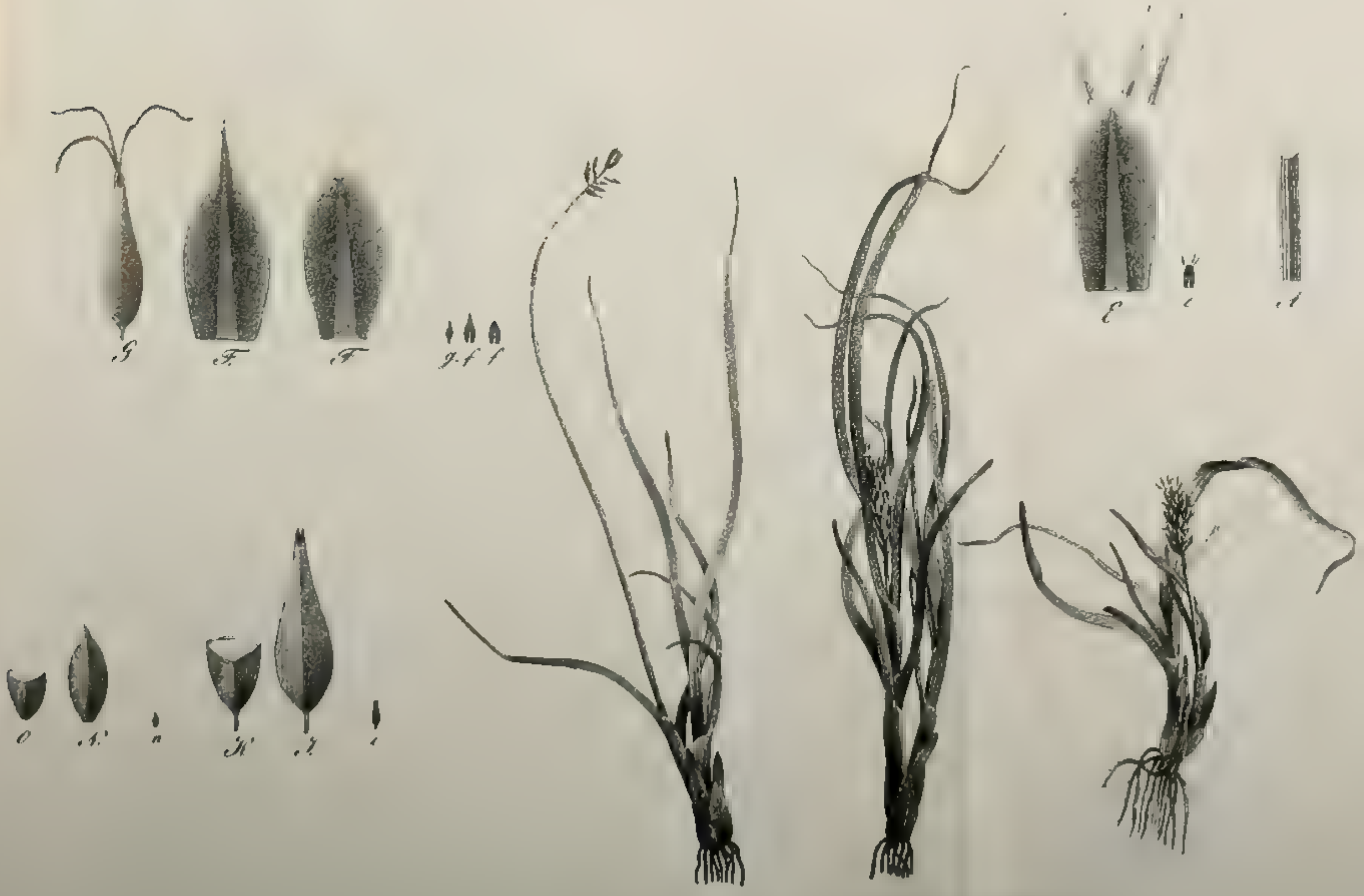


F.

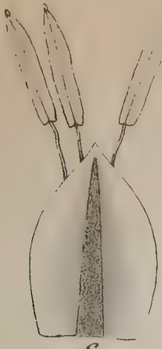
f.


A
F
i
E
e
K
A
i
g
O
N
n

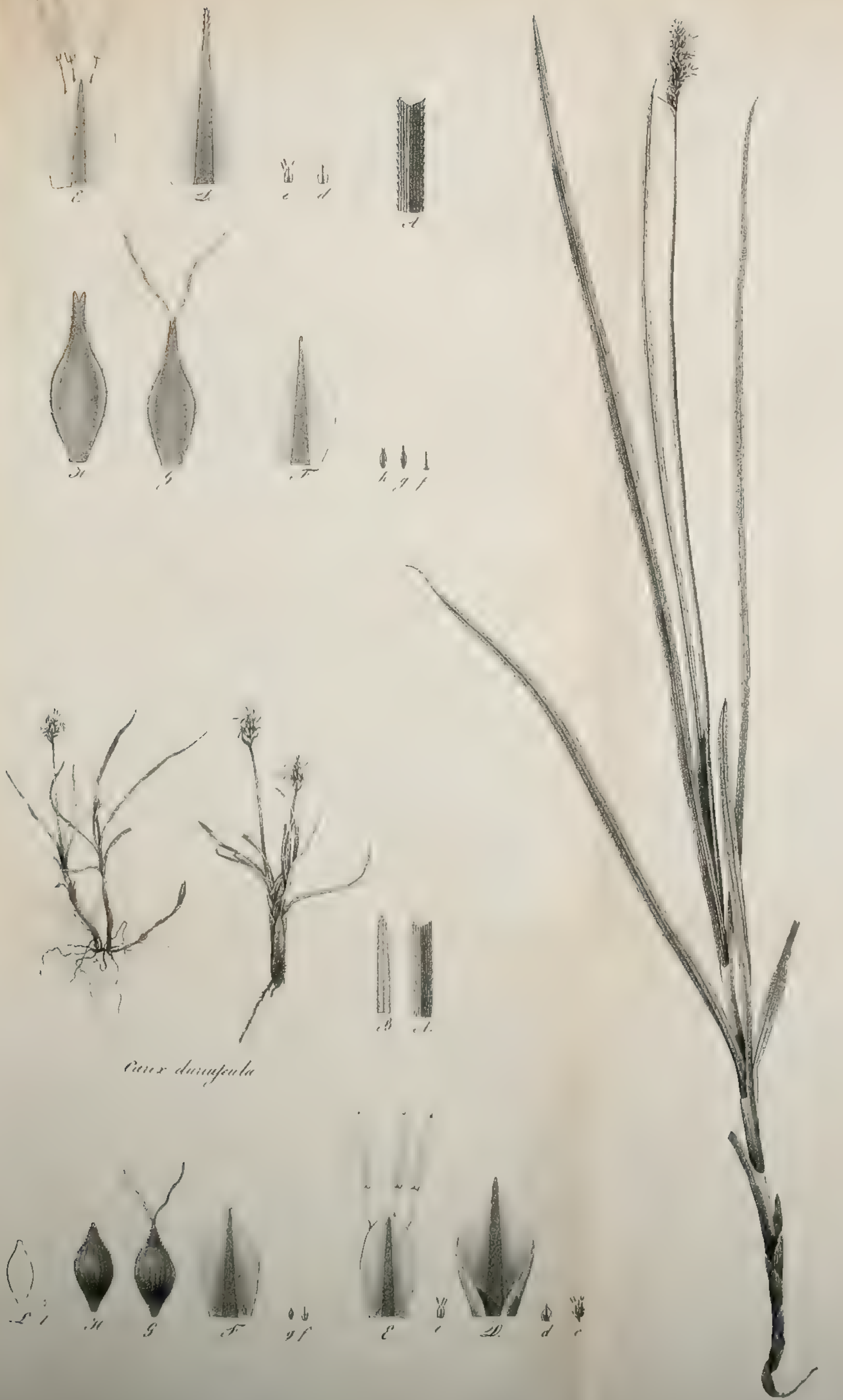
Carex nigricans.


G
F
F
g. f
f
E
e
A
O
N
n
K
A
i

Carex pyrenaica



E.


C
D
e
d
A
H
G
F
h
g
f
B
A
L
l
H
G
F
g
f
E
e
D
d
c

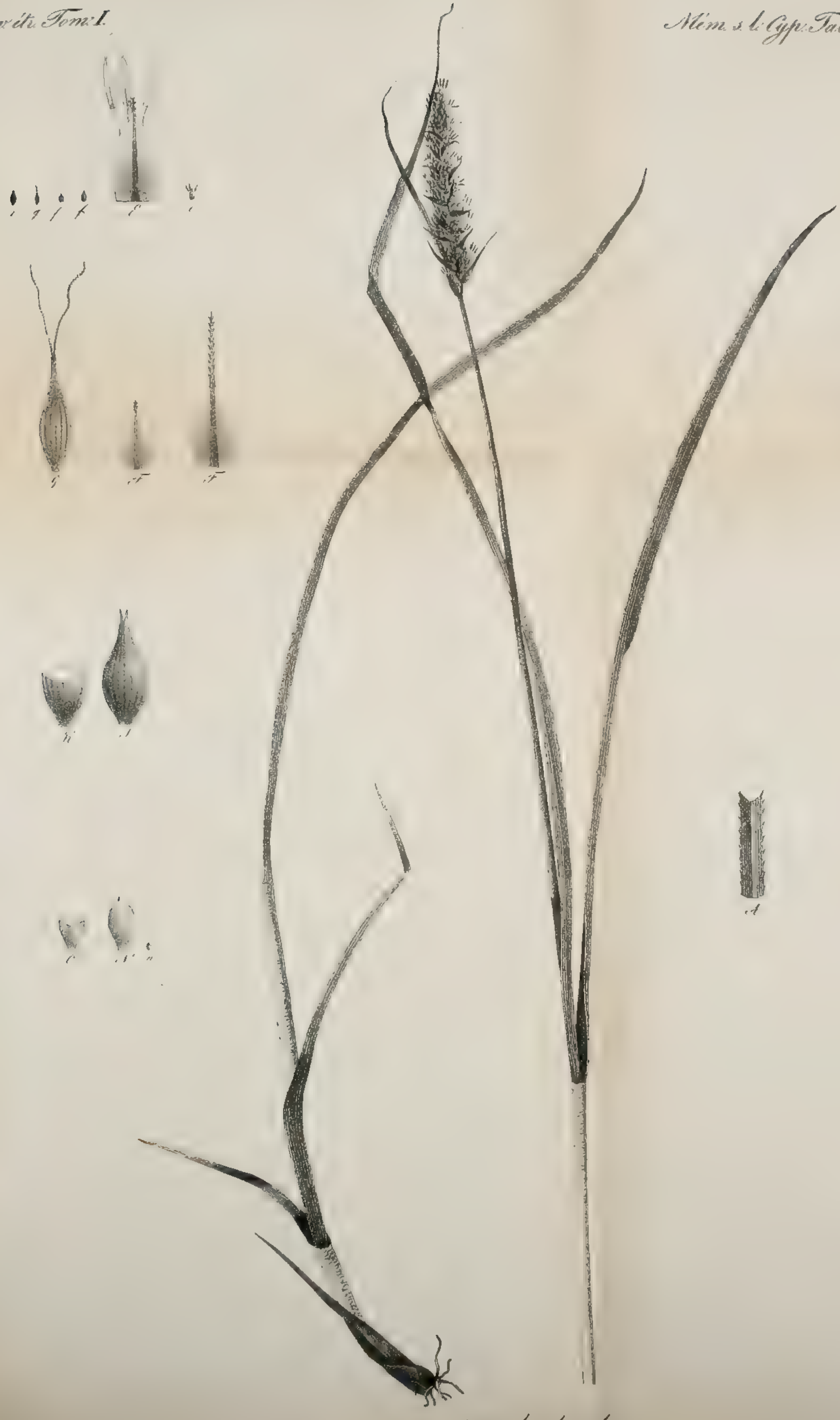
Carex duriuscula

Carex pallida.

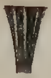
O.

N.²

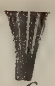
n.



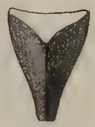
Carex leiorhyncha.



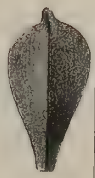
K.



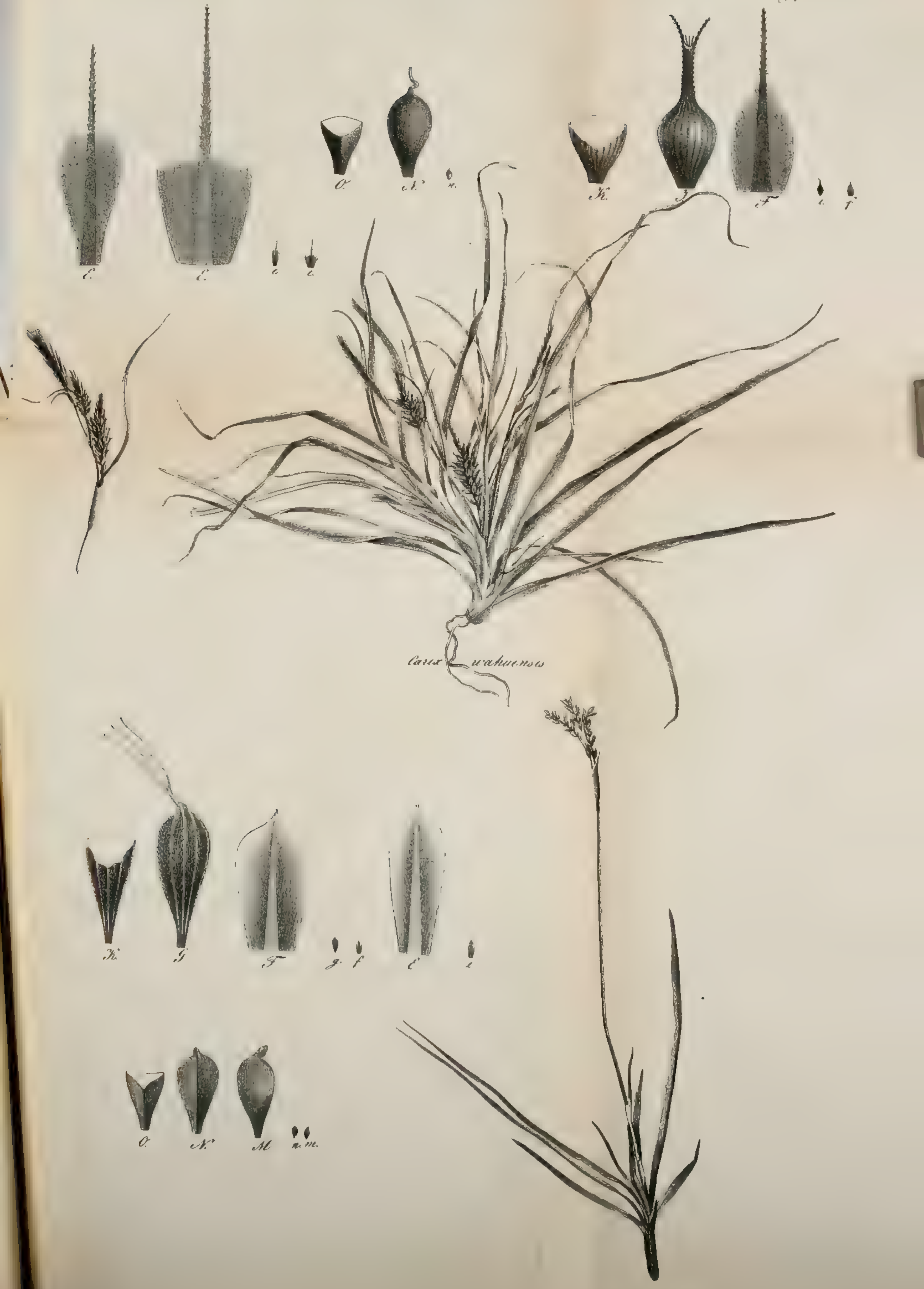
G.



O.



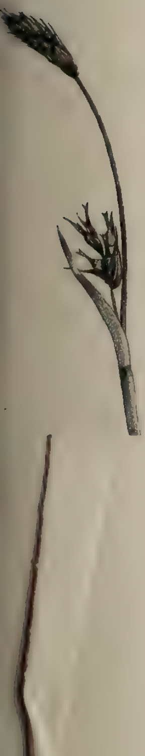
N.

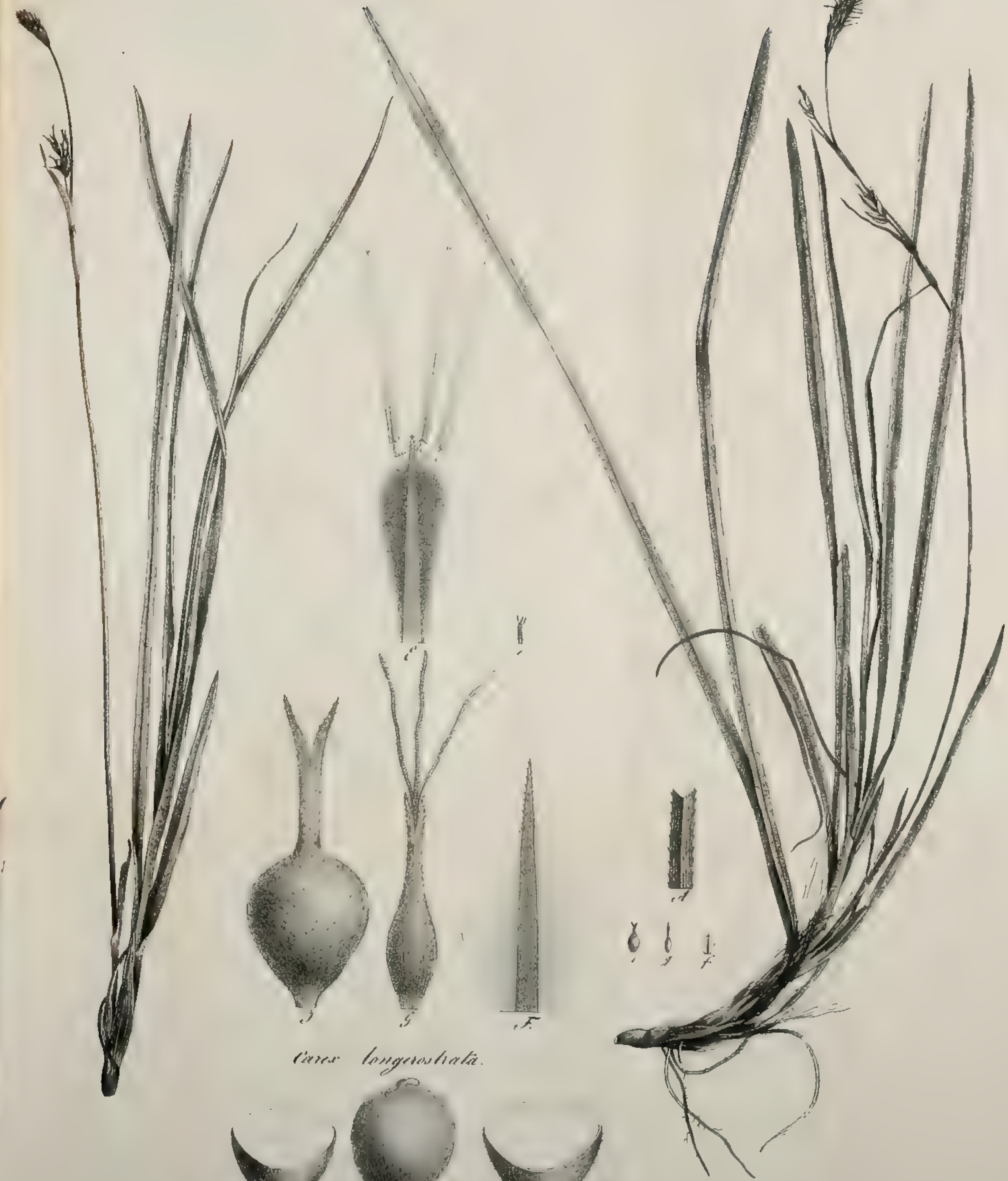

E.
E.
e
e.
O.
N.
n.
K.
J.
F.
i.
f.
K.
G.
F.
g.
f.
E.
e.
O.
N.
M.
n. m.

Carex wahuensis

Carex pediformis.

m. d. sav. étr.



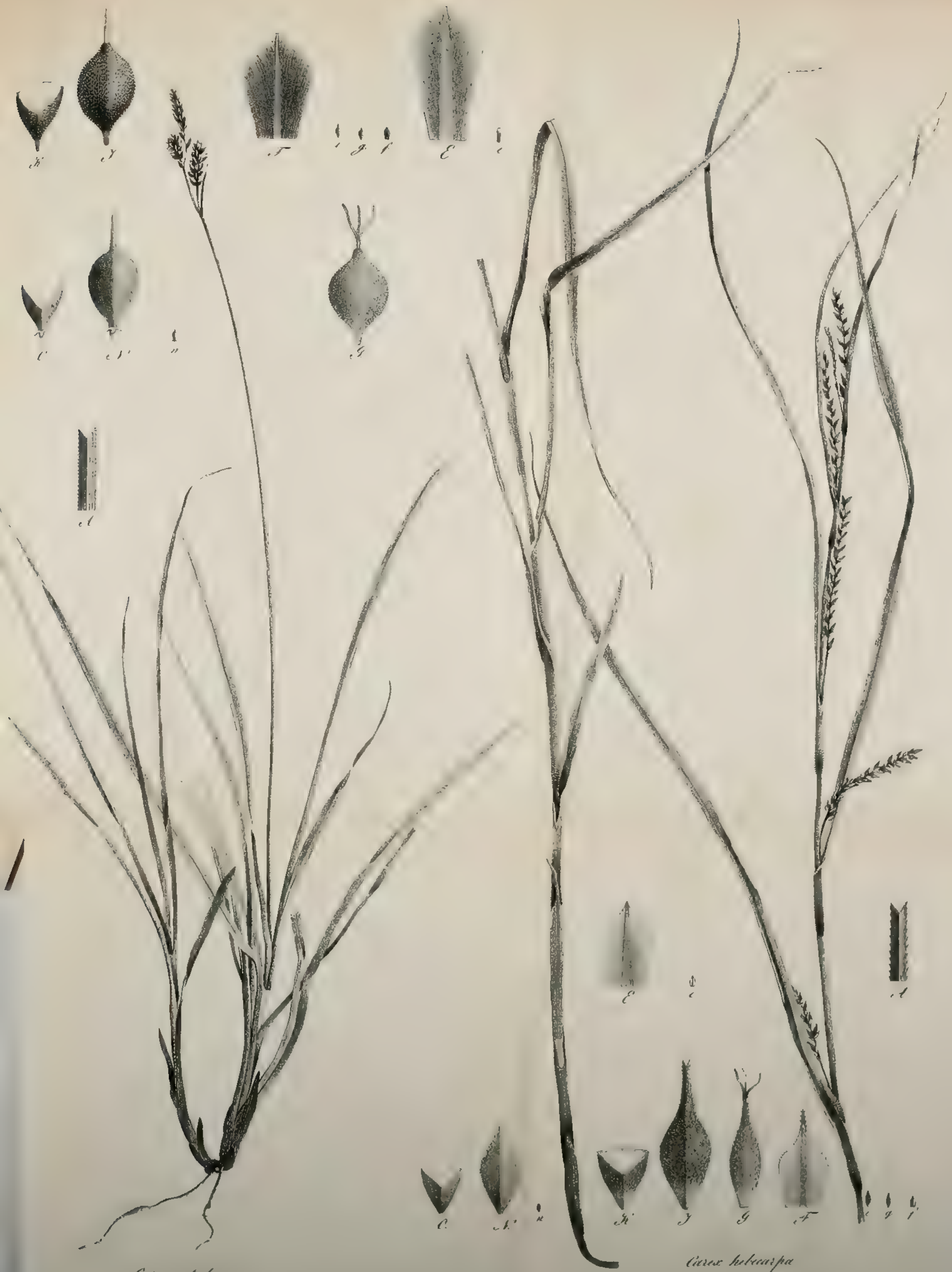

e
i
s
g
F.
d
i
g
f
o
s
n
k.

Carex longerostrata.

Mém. d. sa

K.

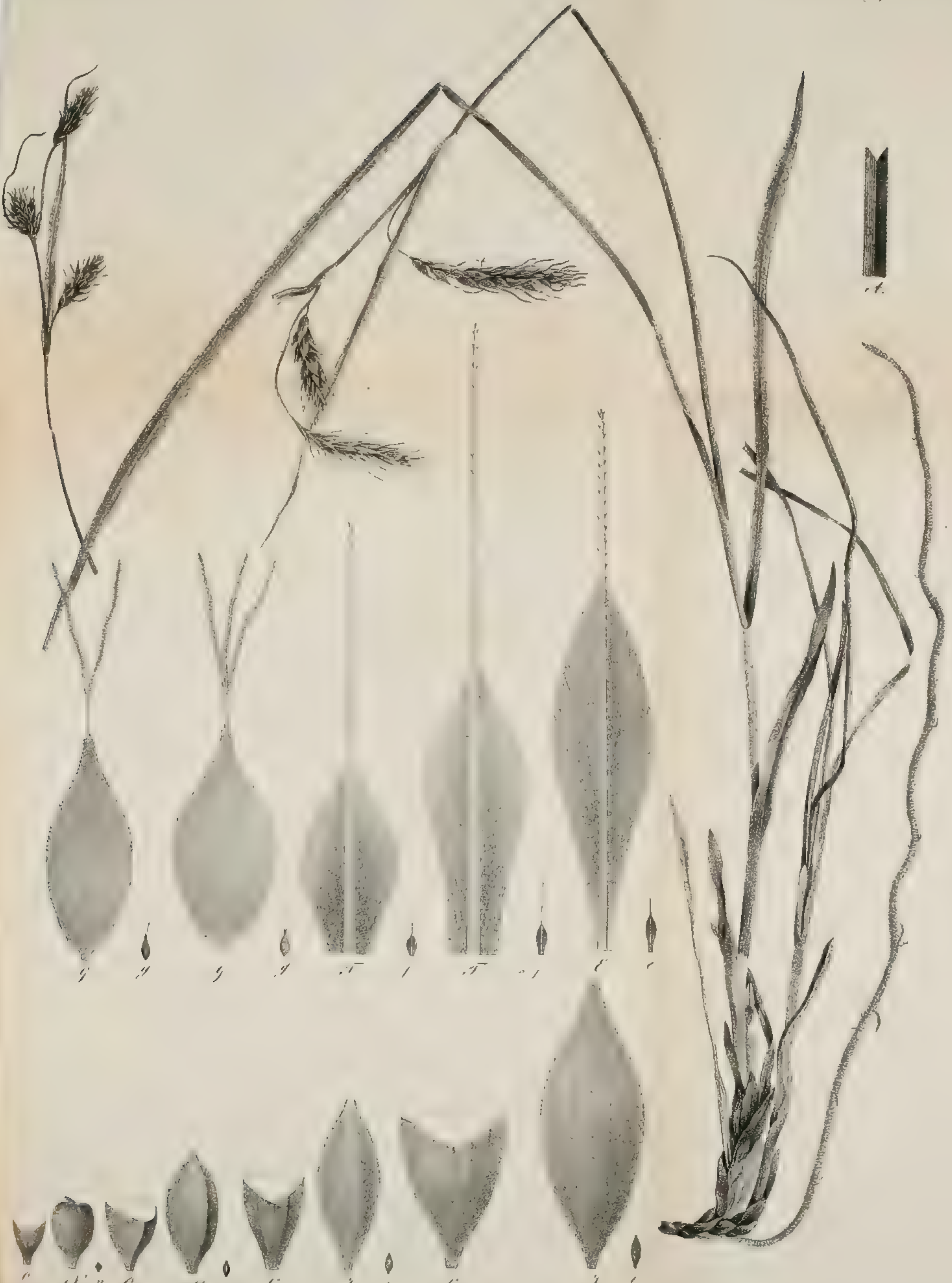
O


K
J
F
g
f
E
e
C
N
n
G
A
E
e
A
C
N
n
K
J
G
F
i
g
f

Carex stylosa

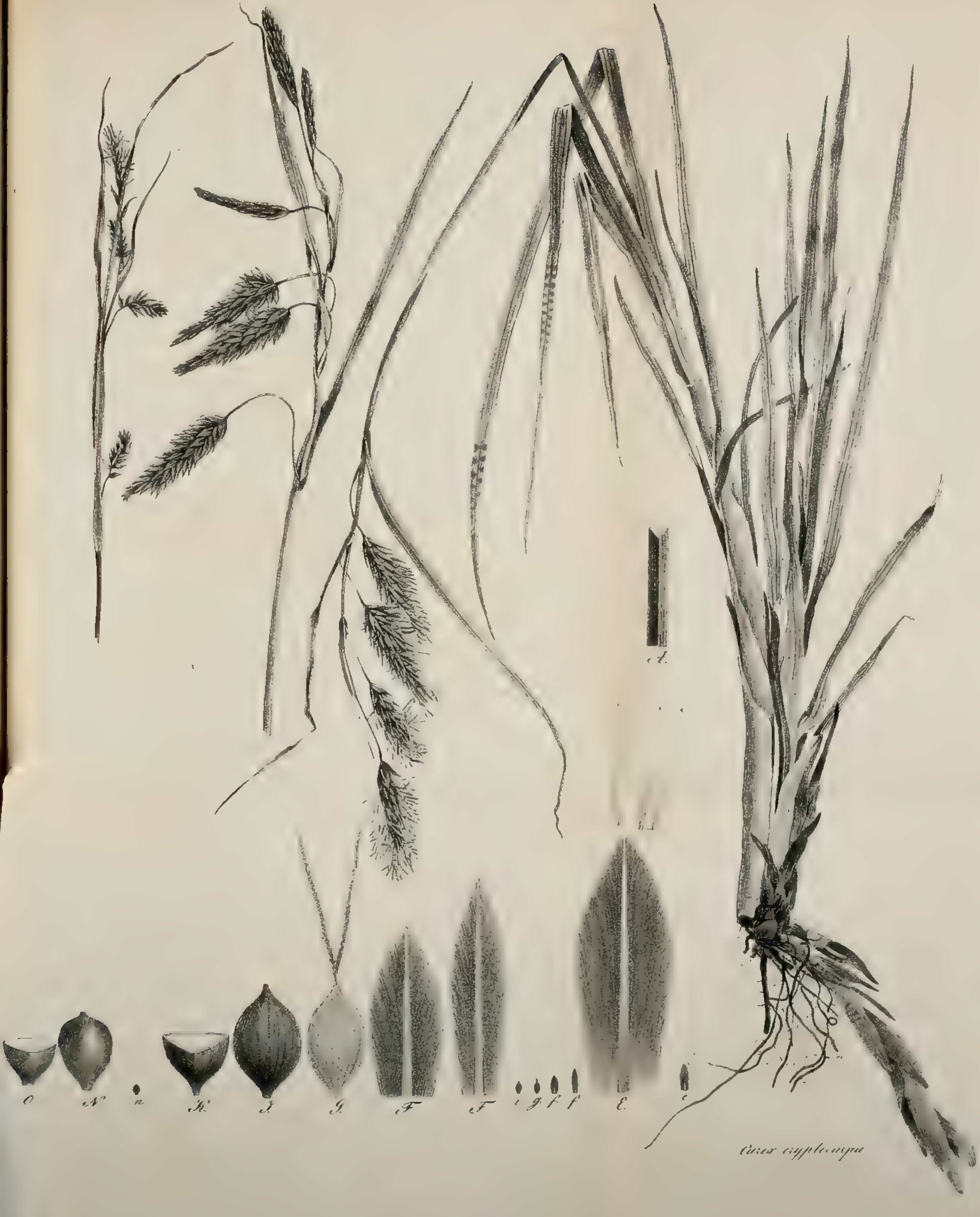
Carex leiocarpa

G.
g.
O.
N.'
n.
C.
M.


A.
G
g
G
g
F
f
F
f
E
e
O
N
n
O
M
m
K
I
i
K
I
i

Carex macrochaeta

Mém. d. sav. étr.


A.
O
N
n
K.
I.
G.
F
F
i
g.
f.
f
E.
e

Carex cryptocarpa

ÜBER DIE VÖGEL DER INSELGRUPPE VON BONINSIMA.

BEOBACHTET
ZU ANFANG MAY 1828,
VON
F. H. VON KITTLITZ.

(Gelesen am 28. April 1830.)

Während eines Aufenthaltes von vierzehn Tagen auf der beträchtlichsten Insel dieser unbewohnten Gruppe hatte ich wol hinreichende Gelegenheit, wenn freilich nicht alle, doch die meisten der diess abgesonderte Land bewohnenden Vögel zu sehen und oberflächlich kennen zu lernen. Denn wie natürlich darf man bei allen vom Continent etwas entfernten Inseln, zumal wenn sie von so geringem Umfange sind, keine Mannichfaltigkeit an Landthieren überhaupt erwarten; — selbst das Clima vergrössert diese nicht etwa nach Maasgabe der Wärme und Vegetationskraft, wie wir doch an den Continenten durchgängig zu sehen gewohnt sind, wo stets die Mannichfaltigkeit mit der Annäherung der heissen Zone zunimmt; eine Erscheinung, die wir auf den Inseln nicht wiederfinden. Im Gegentheil ist es hier nur die Grösse derselben und die Nachbarschaft beträchtlicher Länder, welche dem Naturforscher einen gewissen Reichthum an Erzeugnissen des trocknen Bodens, besonders an Thieren, versprechen kann, und diess gilt nicht etwa allein von den höhern Thierklassen; auch die sonst von der heissen Zone so unendlich vervielfachten Insekten findet man auf allen kleinen und entlegenen Inseln auf sehr wenige Arten beschränkt. Fast sind es immer noch die Vögel, die hier verhältnissmässig die grösste Mannichfaltigkeit zeigen, wie gering aber doch im Ganzen diese ist, wird hinlänglich aus den hier nachfolgenden Verzeichnissen derjenigen Arten erhellen, so ich auf den Carolinen, Marianen und Bonins-Inseln bei aller angestrengten Aufmerksamkeit wahrzunehmen vermochte. Ich mache den Anfang mit denen der letztgenannten, obgleich diese auch wirklich zuletzt von uns besucht wurden, weil ich aber annehmen kann, hier die meisten noch unbeschriebenen Arten gefunden zu haben, so will ich so wenig als möglich mit ihrer Bekanntmachung zögern.

Die drei grösseren Inseln, welche das eigentliche Boninsima bilden (eine ähnliche Gruppe von drei kleineren liegt in geringer Entfernung davon, ward aber von uns nicht betreten) liegen zwischen dem 27. und 28. Grade nördl. Breite und 217—218 Grade westl. Länge von Greenwich, und sind unter einander nur durch geringe Strecken des Meeres getrennt. Ihre Entstehung scheint durchaus vulkanisch zu seyn, und besonders die steilen Ufer bestehen grossentheils ganz aus uralter Lava, an welche sich unter dem Wasser zahlreiche Corallenbänke anheften, ohne jedoch schon solche Riffe gebildet zu haben, wie um fast alle bekannte Südseeinseln. Die schroffen Gebirgsmassen, aus denen das Land überall, so weit wir es gesehen haben, besteht, sind nicht so hoch, dass sie nicht bis auf die Gipfel wenigstens mit niedrigem Gehölz bewachsen erschienen, die Seiten der Berge aber, so wie alle Schluchten und Thäler sind mit der schönsten hochstämmigen Waldung bedeckt, deren zahlreiche Palmen und Pandanen, vermischt mit vielen schönen, auch auf den Carolinen und Marianen einheimischen Holzarten, dem Ganzen ein sehr tropisches Ansehn geben. Um so auffallender contrastiren damit wieder viele ansehnliche Gewächse aus nur der gemässigten Zone angehörigen Familien; alles deutet die glückliche Lage und das herrliche Clima dieser Inseln an, die, in gleicher Breite mit den canarischen, doch nicht, wie diese, die Sommermonate hindurch der sengenden afrikanischen Hitze ausgesetzt sind, vielmehr bei ihrer beträchtlichen Entfernung vom Continent und der ungeheuren Ausdehnung des sie umgebenden Oceans aller mildernden Einflüsse der Seeluft sich zu erfreuen haben.

Als grelle Abwechselung gegen die allenthalben steilen Höhen erscheinen indess im Innern der tiefen Einbuchten ansehnlich lange, wenn gleich immer nur sehr schmale Stellen des Ufers, die, wol unverkennbar ein Niederschlag aus dem Wasser, vollkommene Flächen bilden und gegenwärtig mit der herrlichsten Waldung prangen. Die felsigten Höhen hingegen, so unmittelbar der Brandung des Meeres ausgesetzt sind, erscheinen entweder als völlig nacktes Gestein, oder, wie überhaupt alle erhabene und den Winden mehr blos gegebene Stellen mit niedrigem aber äusserst dichtem und mannichfach zusammengesetztem Buschwerk bewachsen.

Eine dergleichen flüchtige Ansicht des Landes überhaupt wird nothwendig seyn, um die Lebensart derjenigen Thiere, die dasselbe bevölkern, sich deutlicher denken zu können. Nur zwei Arten Säugthiere scheinen (beiläufig gesagt) wirklich einheimisch zu seyn, sie gehören beide in die Familie der Chiropteren, ein ziemlich grosser *Pteropus* und eine kleine Fledermaus, welche letztere wir uns aber nicht selbst verschaffen konnten. Wie uns zwei dort vorgefundene englische Wallfischfänger, so die Insel in Folge eines Schiffbruchs seit anderthalb Jahren bewohnt hatten, erzählten, fände sich auf der zunächst gelegenen Insel ein kaninchenartiges Thier in grosser Menge, vielleicht sind diess wirkliche Kaninchen, die durch irgend einen Zufall dorthin gebracht worden und verwildert sind; — so wird gegenwärtig die damals von uns besuchte Insel reich an Schweinen seyn, davon ein Paar durch jenen Schiffbruch ans Land gekommen ist und bereits bei unserer Ankunft eine zahlreiche Nachkommenschaft über dasselbe verbreitet hatte.

Von Vögeln erhielt ich 15 hier vorkommende Species selbst, zwei davon, (*Charadrius pluvialis* und *Tringa brevipes Cuv.*) hatte ich bereits auf allen von uns besuchten Carolinen und Marianen angetroffen, und nur eine (*Pelecanus Sula Gm. L.*) war ein mehr ausschliesslicher Bewohner des Meeres und der die Insel umgebenden Klippen. Ausserdem überzeugte ich mich noch durch den Augenschein vom Vorkommen 5 anderer Arten, und noch 4—5 wurden uns von jenen beiden Leuten geschildert, welche während ihres Aufenthalts hier die ganze Insel allmählig kennen gelernt hatten; in allem 24—25 Species Vögel. Ich glaube kaum, dass mit diesen nicht die Ornithologie der Bonins-Inseln, beinahe wenigstens, erschöpft seyn werde, es müssten denn noch einige Seevögel, und vielleicht ein Paar solche Arten dieselbe vermehren, welche ausschliesslich sumpfige Stellen bewohnen, deren es allerdings in den weiten, uns unzugänglich gebliebenen Strecken der Insel noch geben mag.

Was mich nicht wenig in Erstaunen setzte, war der, wie es schien, gänzliche Mangel an Möven und Meerschwalben, vielleicht dass der Grund davon in der Jahreszeit zu suchen war, indem diese Vögel sich schon auf ihre entlegenen Brüteplätze zurückgezogen hatten. Auf der Insel selbst schien die eigentliche Brütezeit noch nicht gekommen zu seyn, wenigstens ward während unsers Aufenthalts vom 1. bis 14. Mai *) kein einziges Nest gefunden, obschon das Betragen der Vögel und der Zustand ihrer Geschlechtstheile deutlich zeigte, dass die meisten im Begriff standen, sich zu paaren.

Was nun die einzelnen Arten betrifft, so habe ich in Ermangelung der neuesten ornithologischen Werke es gewagt, alle diejenigen mir überhaupt unbekannten, so ich im Museum zu Paris nicht angetroffen, als neu zu beschreiben und in der That lässt sich wohl auch in einer noch so wenig besuchten Gegend verhältnissmässig viel Neues erwarten. Für einen oder den andern dennoch vorgefallenen Irrthum indess kann ich wol getrost auf Nachsicht rechnen, da es mir hier so ganz an Mitteln fehlt, mich über den neuesten Zustand der Ornithologie in gehörige Kenntniss zu setzen.

---

*) Neuen Styls.

1) *Ixos familiaris mihi.* (S. die Abbildung.)

Dieser schöne kleine Vogel ist der, welcher dem Besucher von Boninsima zumeist und gewöhnlich auch zuerst ins Auge fällt, in vieler Hinsicht der Repräsentant unsrer Sperlinge daselbst. Ich bin lange in nicht geringer Unschlüssigkeit darüber gewesen, in welche Gattung er eigentlich zu bringen sey; in der That hat zumal die Bildung seines Schnabels viel eigenthümliches, in Habitus und Lebensart aber habe ich keinen Vogel ihm so verwandt gefunden, als die sogenannte *Muscicapa* ***Psidii***, L., so neuerlich unter die wahren Drosseln ist gezählt worden, besser noch aber möchte sie wol in jener Neben-Gattung der Temminnischen Turdoïden (*Ixos*) Platz finden, wohin bereits ein paar ihr sehr ähnliche afrikanische Arten gebracht worden sind. Obgleich es nicht leicht seyn wird zwischen dieser Gattung und den wahren Drosseln recht in die Augen fallende Unterscheidungsmerkmale aufzustellen, so spricht doch wol allein schon die Lebensart, die doch bei Eintheilung der Vögel gewiss am meisten berücksichtigt werden muss, für die Natürlichkeit ihrer Trennung; und diese ist es denn auch, welche mich bewogen hat, den gegenwärtigen Vogel ebenfalls hier anzureihen. Wofern mich anders die Erinnerung nicht trügt, hat der weissköpfige Turdoïd von Rüppel (s. Frankf. Mus.) fast ganz einerlei Schnabelbildung mit ihm, diese weicht von ***T. Psidii*** in so fern ab, dass der Schnabel an der Wurzel viel schmäler und im Ganzen länger gestreckt ist, auch befinden sich ungleich viel weniger und schwächere Bartborsten um die Wurzel. Die Nasenlöcher sind wie bei jenem grösstentheils bedeckt von einer knorplichten Haut, welche nur eine länglichte ritzenförmige Oeffnung nicht weit vom Schnabelrande lässt, die Zunge (s. d. Abbild.) ist wie bei den Drosseln und Sylvien flach, vorn unregelmässig ausgeschnitten und gefasert. Die Füsse sind wie die der Sylvien, aber verhältnissmässig stärker.

Als häufigster Vogel des Landes scheint *Ixos familiaris* die Berge überall, wo nur Gebüsch ist, zu bewohnen. In Haltung und Betragen hat er etwas

Sperlingsartiges, er nähert sich dem Menschen dreist, und kam gewöhnlich auf den Küchentisch jener beiden Schiffbrüchigen, um von ihren Speisen zu kosten. Zur Winterszeit soll er oft in Menge um jene Wohnung gekommen seyn und alle Scheu abgelegt haben. Es ist ein flinker, lebhafter, äusserst artiger Vogel, den man gleich häufig auf den Wipfeln der Bäume, als im niedrigsten Gesträuch und selbst auf den Boden suchend antrifft. Zuweilen sah ich ihn sogar die Stellung eines Spechts annehmen und ganze Strecken an den Stämmen emporlaufen, was mich im Anfange mehrmals veranlasst hat, ihn für irgend einen mir unbekannten Klettervogel zu halten. Man hört zuweilen eine starke, aus einem einzigen oft wiederholten Tone bestehende Lockstimme von ihm, die nach der Lebhaftigkeit der Geberden und Verfolgung seines Weibchens zu schliessen, ein besonderer Ausdruck der Liebe zu seyn scheint. Sonst steht ihm eine grosse Mannigfaltigkeit von einzelnen Tönen zu Gebote, die vielleicht gemeinschaftlich seinen Gesang ausmachen, bald leise zwitschernd, bald in einem schmachtenden Flötenton u. s. w.; etwas zusammenhängendes der Art aber habe ich nie bei ihm vernehmen können. Zwischen beiden Geschlechtern ist weder in Grösse noch Gefieder ein Unterschied. Die Geschlechtstheile der Männchen waren alle stark angeschwollen, wie es die Jahrszeit erwarten liess. In dem kleinen, etwas muskulösen Magen fand ich meist Trümmer von kleinen Insekten, doch scheint er auch, wie unsre Sylvien, kleine fleischige Beeren und dergleichen zu geniessen.

Beschreibung. Schnabel und Füsse schwärzlich, Augenstern feurig hellbraun. Alle Federn am Körper sind ungewöhnlich lang, von sehr weitläuftigem Barte. Der Vorderkopf und ein grosser dreieckiger, nach unten zugespitzter Fleck um jedes Auge her sind schwarz, an der Stirn zu beiden Seiten der Schnabelwurzel ein gelber Fleck, die Augenlieder gelblichweiss. Kehle, Vorderhals, Einfassung der Wangen und ganzer Unterleib sind schön gelb, letzterer aber an den Seiten stark graugrünlich überlaufen. Bei der lockern Federbildung scheint am ganzen Oberleibe die aschgraue Grundfarbe etwas durch und theilt so dem an sich schon matten Grün der Spitzenhälfte einen noch stärkern Anstrich von Grau mit; an der Schwanzwurzel wird die grüne Farbe etwas lebhafter, am Scheitel und Hinterkopf aber fällt sie ins dunkelgelbe. Flügel- und Schwanzfedern sind dunkelbraun mit gelbgrünem Rande der äussern Fahne. Der Schwanz ist grade.

Ganze Länge	5 Z.	3 L.
Länge des Schnabels		6 —
— des Tarsus		7 —
— der Mittelzehe ohne Nagel		5 —
— des Schwanzes	2 —	3 —
— des Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	2 —	6 —

Schwungfedern: die erste sehr kurz, die 4te, 5te und 6te die längsten.

---

2) *Sylvia diphone m.* (S. die Abbildung.)

Die gestreckte und etwas niedergedrückte Form des Schnabels nähert diesen Vogel einigermassen unsrer *Sylvia Hippolais*, mit welcher auch die Lebensart so ziemlich überein zu stimmen scheint. Er ist ziemlich häufig in den Wäldern von Boninsima, obschon ich ihn nie in Gesellschaft sah, es scheint, dass er ausschliesslich die obern Theile der Bäume bewohnt, nie konnte ich ihn in der Nähe des Bodens bemerken. Diess ist der eigentlichste Singvogel der Bonins-Inseln, wenigstens um jene Jahrszeit rührt von ihm fast aller Gesang her, den man hört. Er hat zwei sehr auffallend verschiedene Singstimmen, die eine, bei welcher er gewöhnlich ruhig und verborgen sitzt, fängt mit einem tiefen, flötenden, äusserst wohlklingenden Tone an, der lang gedehnt und bald höher, bald tiefer angegeben wird, völlig gleich dem Anfange einer der Hauptstrophen im Gesange der Nachtigall, darauf folgt aber nichts weiter als eine kurze Cadenz mit plötzlichem Schlusse, was ganz besonders auffällt. Bei der ersten Note blässt der Vogel die Kehle stark auf, grade wie die Nachtigall, wenn sie denselben Ton anstimmt. Der andere Gesang, der von diesem ganz unabhängig gehört wird, hat einen völlig verschiedenen Charakter, und ich habe mich lange nicht überreden können, dass derselbe Vogel ihn hervorbringe. Er fängt mit einem starken und schönen Triller an, worauf nach einer kurzen Pause eine Strophe folgt, in der die Sylben ka, ki! ka, ki! sehr deutlich hörbar sind und einigemal modulirt werden. Es scheint dieser Gesang unruhige Empfindungen auszudrücken, und gewöhnlich ist auch der Vogel dabei in Bewegung.

Beschreibung. Schnabel und Füsse hellfleischfarben, ersterer oben und an der Spitze schwärzlich überlaufen. Die herrschende Farbe im Gefieder des ganzen Oberleibes ist ein hellfahles, nur wenig ins Olivenfarbige spielendes Rostgrau, von dieser sind die äussersten Ränder der Schwungfedern, das übrige derselben ist mattdunkelbraun. Der verhältnissmässig lange und etwas keilförmige Schwanz besteht aus 10 sehr weichen Federn, einfarbig hellbraun, nur die beiden äussersten mit undeutlichem weisslichen Spitzensaume. Ueber die Augen läuft ein rostgelblich weisser Streifen, durch dieselben ein undeutlicher dunkelbrauner, der ganze Unterleib ist weiss (wobei die aschgraue Grundfarbe zuweilen durchscheint), mehr oder weniger rostgelblich angelaufen, besonders an den Wangen und längs den Seiten hin. Die sogenannten Knie sind am vordern Theil gelblichweiss, am hintern dunkelbraungrau gefiedert.

Zwischen beiden Geschlechtern habe ich keinen Unterschied in Grösse und Gefieder bemerken können.

Ganze Länge	5 Z.	3 L.
Länge des Schnabels		5 —
— des Tarsus		7 —
— der Mittelzehe		4½ —
— des Schwanzes	2 —	3½ —
— des Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	2 —	2 —

Schwungfedern: die erste sehr kurz, die 4te, 5te und 6te die längsten.

3) *Fringilla Papa m.* (S. die Abbildung.)

Schwerlich möchte es irgendwo einen noch vollkommeneren Dickschnabel geben.

Die obere Figur der Abbildung stellt das alte, auf jeden Fall mehr als einjährige, Männchen vor, die untere das Weibchen, zwischen diesem und dem jüngern Männchen existirt vielleicht gar kein Unterschied im Gefieder, wenn nicht eswa das ganz alte Weibchen durch eine dunklere, entschiedener braune Grundfarbe und stärker gelbe Stirnflecken sich auszeichnet, wie mich wenigstens ein geschossenes Exemplar vermuthen lässt. Dass die Männchen nicht gleich nach der ersten Mauser die rothe Farbe bekommen müssen, bewiesen mir zwei dergleichen geschossene mit recht ausgebildeten Geschlechtstheilen und ganz grauem Gefieder, auch unter den rothen selbst bemerkt man beträchtliche Abstufungen, einige haben einen starken Anstrich von Gelb an Hals und Brust. Uebrigens schienen mir die rothen Exemplare in Verhältniss zu den nothwendig viel zahlreichern grauen nicht eben besonders selten zu seyn.

Dieser Vogel ist ziemlich überall in den Wäldern zunächst der Küste anzutreffen, aber gar nicht häufig. Er hält sich gern versteckt, ist äusserst phlegmatischer Natur und so wenig scheu, dass man, um einen zu schiessen, gewöhnlich eine grosse Strecke weit zurückgehen muss, wenn man ihn nicht ganz zerschmettern will, gewöhnlich fliegt er in solchen Fällen vom Boden auf einen niedrigen Zweig oder umgefallenen Baumstamm, von dem man ihn vergebens durch leises Winken zu verscheuchen sucht, er bewegt Kopf und Schwanz regelmässig nach beiden Seiten, bleibt aber ruhig sitzen, wird er indess endlich doch gescheucht, so entfernt er sich gewöhnlich sehr weit. Nur selten sah ich ihn hoch auf den Bäumen, am meisten auf der Erde laufend. Seine Lockstimme, die man dabei ziemlich oft hört, ist ein einziger leiser, äusserst feiner und hoher pfeifender Ton, den er bald länger, bald kürzer, bald einzeln, bald öfter wiederholt, angiebt. In dem stark muskulösen Magen und der geräumigen Speiseröhre fand ich nur vegetabilische Nahrungsmittel, als kleine Früchte, besonders aber regelmässig abgeschnittene Stückchen von Knospen einer und derselben Art.

Beschreibung. Altes Männchen: Oberleib schwärzlichbraun, mit schmalen rostgraulichen Federrändern, welche theils roth, theils gelblich überlaufen sind, Vorderkopf, ein Streif hinter den Augen, Wangen, Kehle, Vorderhals und Brust schön blutroth, zumal am Kopfe mit seidenartigem Glanze; an der Brust verliert sich allmählig die rothe Farbe in die röthlich aschgrane und schmutzigweisse des Unterleibs; Flügel und Schwanz dunkelbraun mit sehr schmaler hellerer Einfassung der Federn.

Weibchen und junges Männchen: Oberleib wie oben, aber mit breiteren, mehr ins Gelbe fallenden Federrändern; an der Stirn zu beiden Seiten der Schnabelwurzel ein bräunlichgelber Fleck, der sich allmählig in die olivenbraune Hauptfarbe des Oberkopfs verliert; ganzer Unterleib braungelblich grau, an der Gurgel mit einigen undeutlichen dunkelbraunen Längsflecken; Kehle stark rostfarbenweiss; Flügel und Schwanz wie oben, aber mit stärkerer Federeinfassung.

Schnabel dicker als an irgend einer bekannten Art dieser Gattung; die Ränder, besonders der untern Kinnlade, sehr eingezogen, ein starker Winkel; Bartborsten an der Schnabelwurzel zunächst den Augen, beim Männchen auch über den Nasenlöchern. Diese sind fast ganz unter den Federn der Stirn versteckt. Die Farbe des Schnabels ist gelblich horngrau, nach oben um vieles dunkler; die der Füsse bräunlich fleischfarben, ziemlich dunkel; Augenstern dunkelbraun.

Ganze Länge	8 Z.	
Länge des Schnabels	1 —	½ L.
— des Tarsus		7½ —
— der Mittelzehe		7 —
— des Schwanzes	3 —	1 —
— des Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	4 —	2 —

Schwungfedern: die 3te die längste, die erste nur wenig kürzer.

4) *Fringilla Chloris.* (Loxia Chloris L.)

Ich habe keine Ursach, sie für etwas anders zu halten. Von den bald nachher in Kamtschatka geschossenen Vögeln dieser Art, unterschieden sich die von Boninsima durch geringere Grösse, etwas minder gelbliches Grün und überhaupt weniger Gelb im Gefieder. Aber ich glaube diess für nichts anders halten zu dürfen, als für die gewöhnliche Erscheinung, dass Vögel einer und derselben Art auf ganz getrennten Inseln oft ein sehr verschiedenes Ansehn bekommen. In Lebensart und Betragen dieser hier habe ich keinen wesentlichen Unterschied von unserm Grünlinge bemerken können. Die trillernde Lockstimme desselben erkennt man ziemlich deutlich wieder, aber ich hörte dafür viel seltner und immer nur sehr leise den eigenthümlichen krähenden Ton, der so häufig bei unsrem Vogel und noch mehr bei dem in Kamtschatka gehört wird. Ich kann bei der Gelegenheit nicht umhin die Bemerkung zu äussern, dass es mit den Lockstimmen und noch mehr mit den Gesängen der Vögel wol fast die nämliche Bewandtniss haben mag, wie mit den Sprachen der Menschen, sie trennen sich und werden oft gänzlich verschieden, wenn jede Verbindung zwischen zwei Stämmen unmöglich ist. Bei Vögeln, die, ohne übers Meer fliegen zu können, abgelegene Inseln bewohnen, ist diess sehr sichtbar der Fall, und ich werde im Verfolg dieser Berichte noch wiederholt Gelegenheit haben, einzelner Beispiele davon zu erwähnen.

Der hier genannte Vogel findet sich auf Boninsima ziemlich häufig in kleinen Gesellschaften in den Waldungen längs dem Strande, er läuft und sucht seine Nahrung gern auf der Erde.

---

5) *Oriolus squamiceps m.* (S. die Abbildung.)

Da fast bei allen bisher bekannten Arten der Gattung Oriolus die gelbe Farbe vorherrscht, hat das noch ohnehin so eigenthümlich bezeichnete Gefieder des gegenwärtigen Vogels mich ziemlich lange anstehn lassen, ihn wirklich mit unter jene zu zählen, in der That aber glaube ich ihn nicht besser bestimmen zu können, Schnabel und Füsse, Zunge, Körperbau, Nahrung und Lebensart stimmen vollkommen mit jenen überein, und wenn gleich die zugespitzte Form der Federn am Kopf und Vorderleib diese und eine ihr ungemein ähnliche Art von Luçon besonders charakterisirt, auch bei diesen beiden die 5te Schwungfeder die längste, dahingegen beim *Oriolus cochinchinensis* die vordere kürzeste derselben ganz fehlt, so hielt ich mich doch noch nicht für befugt, auf so wenig erhebliche Unterscheidungszeichen erst für zwei Species eine neue Gattung zu gründen, die doch immer nur in die unmittelbarste Nachbarschaft von *Oriolus* hätte gestellt werden dürfen.

Ich glaube mit Recht überzeugt zu seyn, dass bei gegenwärtiger Gestalt der Ornithologie der Beschreiber neuer Arten, wenn es sich darum handelt, entweder eine neue Gattung zu viel oder eine zu wenig zu machen, unbedingt das letztere, als das kleinere Uebel, wählen müsse. Und so trage ich denn kein Bedenken, diese beiden Arten eine kleine besondere Gruppe der Gattung Oriolus bilden zu lassen, für welche ausser ihrer dunkelfarbigen Befiederung jene zugespitzten Federn ein recht artiges Kennzeichen abgeben können. Diess und der verhältnissmässig ziemlich lange Schwanz mögen überdiess leicht dazu dienen, sie den natürlichen Uebergang zu der bis jetzt noch gewiss nicht hinlänglich bestimmten Gattung *Malurus* andeuten zu lassen.

Die gegenwärtige Art ist nicht grade selten auf der von uns besuchten Insel; der Zufall hat es aber gefügt, dass ich in den ersten Tagen unsers dortigen Aufenthalts sie durchaus nicht im Freyen zu sehn bekam, so unausgesetzt ich auch beständig umherstrich, und obgleich mehrere Individuen derselben unterdess von meinen Gefährten erlegt wurden. Diese äusserten sämmtlich ihr Erstaunen über die besondere Dummheit und Trägheit dieses Vogels, den man fast mit Händen greifen könne, und wirklich war einer auch, ohne angeschossen zu seyn, mit dem Ladestocke erschlagen worden. Ich muss gestehen, dass ich selbst, indem ich späterhin viele Vögel dieser Art sah und schoss, doch diese auffallende Erscheinung nie habe wahrnehmen können; es scheint fast, als habe der Vogel nach den ersten Tagen unserer Gegenwart seine Lebensweise verändert, denn ich sah denselben auch nachher nur hoch auf den Bäumen, dahingegen er früher immer auf niedrigem Gebüsch und dicht am Strande war bemerkt worden. Auch in der Nahrung zeigte sich dieser auffallende Unterschied, in dem grossen wenig muskulösen Magen fand ich später nur kleine Beeren und andere vegetabilische Gegenstände, dahingegen er bei den erstern am Strande geschossenen, fast nur Trümmer von kleinen Krustaceen enthielt. Ein sehr eigenthümlicher Knoblauchs- oder Assa foetida-Geruch, der das ganze Fleisch und besonders die Eingeweide durchdrungen hatte, mag vielleicht von letzterer Nahrung kommen, denn bei den später geschossenen fand er sich in weit geringerem Grade und zuletzt kaum bemerkbar. Sollte es vielleicht die Paarungszeit seyn, eine Art Brunst, wie beim Auerhahn, der zu Folge dieser Vogel sich so sonderbar zeigt? Es waren nur Männchen, die am Strande durch ihre Achtlosigkeit Aufsehen erregt hatten, und das Fleisch der Weibchen, deren ich erst ganz zuletzt eins oder zwei erhielt, entbehrte zumeist jenes besondern Geruchs.

Der Vogel scheint vorzugsweise die hochstämmigen Wälder am Abhange der Berge zu bewohnen, liebt die höchsten Wipfel der Bäume, wo er lange unbeweglich mit etwas geöffneten Flügeln zu sitzen pflegt, und lebt, wenn gleich zerstreut, doch nicht ganz ungesellig; gewöhnlich finden sich in der Nähe des einen auch noch mehrere andere. Seine einzige Stimme scheint ein hoher pfeifender, aber heiserer Ton zu seyn, den er bald einzeln lang gedehnt, bald kürzer und mehrmals wiederholt hören lässt, das letztere besonders im Fluge. Dieser ist schnell, gewandt und seicht bogenförmig. Zwischen Männchen und Weibchen ist wenig Unterschied im Gefieder, letzteres hat nur im Allgemeinen blässere Farben und eine minder deutliche Zeichnung, wird aber leicht dadurch kenntlich, dass es merklich kleiner ist.

Beschreibung. Schnabel schwärzlich, Füsse fleischfarben braun. Sehr starke Bartborsten an der Schnabelwurzel zunächst den Augen, schwächere aber ziemlich lange hinter den Nasenlöchern und noch schwächere am Kinn. Keine an den Augenliedern. Alle Federn am Oberkopf, Nacken, Kehle, Vorderhals und Brust sind sehr zugespitzt und etwas abstehend, jede an der Spitze durch einen kleinen Längsfleck von etwas hellerer Färbung ausgezeichnet, allmählig verliert sich diese Form nach dem Rücken und Bauche hin. In dem 12fedrigen Schwanze sind die beiden mittelsten Federn nur fast unmerklich länger als die übrigen.

Oberkopf und Nacken schön dunkelaschgrau, durch die hellen Spitzenflecke besonders bezeichnet, Rücken und Steiss aschgraubraun. Flügel und Schwanz dunkelbraun, zum Theil mit schmalen helleren Federrändern, Unterflügel fahl roströthlich (wie bei *Turdus musicus*), Kinn und Vordertheil der Wangen hell aschgrau, Augengegend, Hintertheil der Wangen, Gurgel und Oberbrust schön kastanienbraun, Seiten der Brust dunkelbraungrau. Uebriger Unterleib hell olivengrau, zum Theil mit weissen Federspitzen, Mitte des Bauchs weiss, untere Schwanzfedern braungrau mit breiten weissen Spitzensäumen.

Ganze Länge	10 Z.	5 L.
Länge des Schnabels	1 —	2 —
— des Tarsus		7 —
— der Mittelzehe		6 —
— des Schwanzes	5 —	
— des Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	5 —	8 —

Schwungfedern: die 5te die längste, die erste sehr klein.

6) *Turdus terrestris m.* (S. die Abbildung.)

Vielleicht gehört dieser Vogel noch mehr in die Gattung *Myothera*, da aber, so viel mir bewusst, die Kennzeichen derselben noch nicht genau genug festgestellt sind, so habe ich jene Benennung vorgezogen, überzeugt, dass ohnehin noch mancher Umtausch unter den bereits benannten Arten dieser beiden *Genera* wird statt finden müssen. Mein gegenwärtiger Vogel scheint grade mitten inne zwischen den Hauptformen beider zu stehen; doch unterscheidet ihn meiner Ansicht nach nichts von den wahren Drosseln, als der verhältnissmässig kürzere Schwanz und in der Lebensart sein beständiger Aufenthalt auf dem Boden. Er kann nicht minder als ein Bindeglied zwischen *Turdus* und *Anthus* betrachtet werden, denn der letzteren Gattung kommt er im Habitus so nahe, dass ich von weitem ihn ganz unbedingt für eine Art derselben ansah. Er ist häufig überall in den Wäldern längs der Küste, zumal da wo der Boden ganz flach ist: doch habe ich ihn immer nur einzeln angetroffen. Nie sah ich ihn anders als auf dem Boden, wo er gewöhnlich sehr schnell läuft, sein Flug ist gewandt und wohl ausgebildet, doch hält er auch hier sich immer dicht über der Erde. Ziemlich oft hört man seine einfachen Locktöne tscheck! tscheck! die mit denen von *Picus major* Aehnlichkeit haben, aber nicht so durchdringend sind, eine andere Stimme habe ich an diesem Vogel nicht bemerken können. Zwischen Männchen und Weibchen fand ich keinen Unterschied in Gefieder und Grösse. Der kleine etwas muskulöse Magen enthielt allemal Trümmer von kleinen Insekten, zuweilen Krustaceen.

Beschreibung. Schnabel schwärzlich, Füsse bräunlich fleischfarben, Augenstern dunkelbraun. Gewöhnlich lange aber schwache Bartborsten von der Schnabelwurzel zunächst den Augen, kürzere hinter den Nasenlöchern, an den Augenliedern keine. Schwanz ziemlich kurz, zehnfedrig, ganz grade. Oberkopf und Nacken schön dunkelbraun, wenig mit schwarz gemischt. Am Rücken und den Schultern sind alle Federn zweifach der Länge nach gefärbt, die nach aussen gekehrte Fahne ist allemal hellbraun, an den grössern Federn noch mit schwarzem Vorsaum, die innere schwarz. Steiss, obere Schwanzdecken und Schwanz sind schön rostbraun: die unteren Schwanzdecken schwarz, rostbraun und weiss gemischt. Sämmtliche obere Flügeldecken sind braunschwarz mit breiter fahl hellbrauner Spitze und Vorsaum der äussern Fahne, die Schwanzfedern an der Wurzel fahl, weiterhin braunschwarz mit noch einem fahlen Randstreifen gegen die Spitze hin, nur die 5 hintersten gleich langen sind der ganzen Länge nach fahl gesäumt. Der ganze Unterleib ist an den Seiten schön hellbraun, in der Mitte rein weiss, an der Kehle mit sehr kleinen, an Gurgel und Oberbrust mit grösseren undeutlichen braunen Flecken bezeichnet.

Ganze Länge	6½ Z.	
Länge des Schnabels	1 —	
— des Tarsus	1 —	
— der Mittelzehe		7 L.
— des Schwanzes	2 —	2 —
— des Flügels vom Handgelenk bis zur Spitze	3 —	5 —

Schwungfedern; die 3te, 4te und 5te die längsten, die erste sehr klein.

7) *Turdus manillensis* L.

Buff. h. n. des oiseaux 3. p. 363: *Le Merle solitaire de Manille.* Pl. enl. 464. 2. et 636 (Zwei sehr schlechte Figuren.) — *Lath. synops.*, übersetzt von Bechstein. N. 55. 3. p. 49.

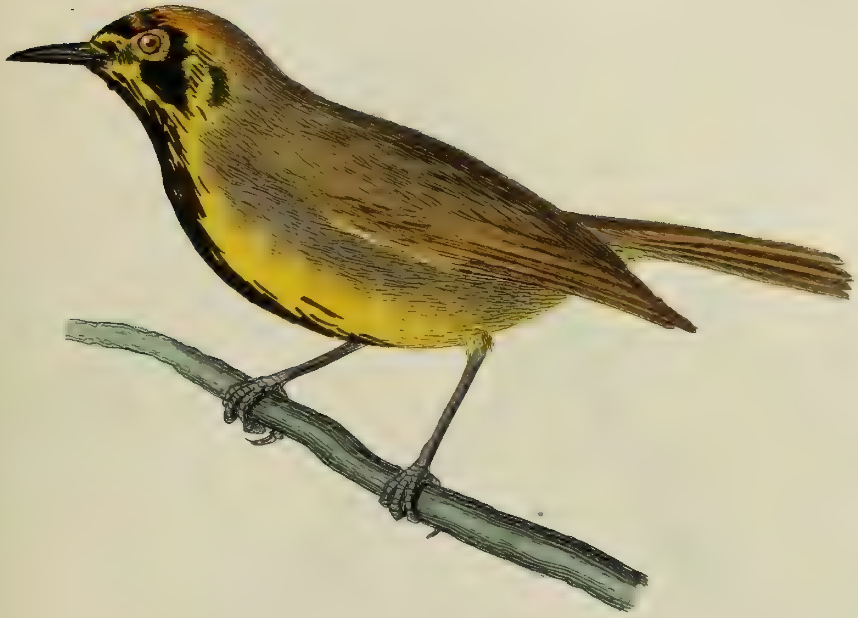
Nur selten bemerkte ich ihn auf Boninsima, indem er dann und wann einmal paarweis auf den zunächst dem Strande gelegenen Felsen und Bäumen erschien, und immer bald wieder verschwand; vielleicht dass er mehr die hohen und unzugänglichen Bergspitzen bewohnt. Vermuthlich findet man ihn auf allen den aus steilem Gebirge bestehenden Inseln, die noch zwischen dort und den Philippinen liegen, und so wohl auch in Japan; er vertritt in diesen Ländern unsere Steindrosseln (*Turdus saxatilis* und *cyanus*), deren Eigenschaften er durchaus zu besitzen und gleichsam beide in sich zu vereinigen scheint. Wie sehr aber doch in Haltung und Betragen unbezweifelt alle diese Vögel an Saxicola Oenanthe gränzen, ist mir an dem gegenwärtigen recht aufgefallen. In seinen Bewegungen äusserst gewandt, und besonders schnell im Laufen auf der Erde, sieht man ihn doch gern auf Bäume sich setzen, die Sicherheit aber mit der er an den Felsen läuft, lässt allein schon darauf schliessen, dass diese wohl sein vornehmster Aufenthalt sind. Die Lockstimme die er zuweilen einzeln, besonders im Auffliegen, hören lässt, erinnert an die der meisten Drosseln und klingt wie ein leises Tjak! Tjak! der Gesang aber, den das Männchen wie es scheint immer hochsitzend anstimmt, hat Aehnlichkeit mit dem unsrer Feldlerchen, und scheint sehr wohlklingend zu seyn; ich selbst hörte ihn indess nur einmal und sehr flüchtig, wie überhaupt der Vogel um jene Zeit sich ungemein unstät zeigte.

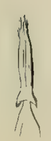
Beide Geschlechter hielten damals sehr sorgfältig zusammen. Das Weibchen war allemal von weitem kenntlich an seiner ganz grauen Farbe, indess die blauen sowohl als die rothen Theile des Männchens ganz rein und ungefleckt erschienen, unverkennbar eine Folge der Jahrszeit, wo das Gefieder schon so weit abgetragen ist, dass die weissliche und schwärzliche Spitzenzeichnung verschwindet: welches verhältnissmässig auch am Weibchen sich zeigt. Auch die ausgeblichene Farbe und die bestossenen Ränder der Schwung- und Schwanzfedern stellen es ausser Zweifel, dass der Vogel nur ein Mal im Jahr sich mausert und zwar im Herbst, wie ich mich noch deutlicher überzeugen konnte, als ich im Januar des folgenden Jahres die nämliche Art nicht weit von Manilla wieder fand. An mehreren, besonders weiblichen Exemplaren, die ich hier schoss, fand ich nicht die mindeste wesentliche Abweichung von jenen, doch fällt zumal am weiblichen Geschlecht der Unterschied des frischen Gefieders im ersten Augenblick sehr auf, hier zeigt beinahe jede Feder einen grossen weisslichen Spitzenfleck mit schmaler schwärzlicher Einfassung, von welcher so auffallenden Zeichnung man dort im Mai nur undeutliche Spuren noch sah. Auch das Männchen erscheint besonders am Hinterhals und Rücken einzeln roströthlich weiss und schwärzlich geschuppt; Schwung- und Schwanzfedern aber an beiden Geschlechtern unbeschädigt und von rein schwarzer Farbe.

In etwas bergigen Gegenden scheint dieser Vogel auf der Insel Luçon ziemlich häufig zu seyn. Ich sah ihn aber dort (unstreitig der Jahrszeit wegen) immer nur einzeln, entsinne mich auch nicht, seinen Gesang gehört zu haben. So flüchtig, scheu und zur Einsamkeit geneigt er auch ist, zeigt er hier doch eine besondere Vorliebe für gewisse menschliche Wohnungen, nämlich für die einzeln gelegenen grössern Meyerhöfe, Klöster u. dgl., so dort gewöhnlich reich an ansehnlichem und weitläuftigem Mauerwerk sind, und wo man ihn, ganz wie unsre *Sylvia Thytis*, von Zeit zu Zeit auf den Dächern und andern erhabenen Stellen erscheinen sieht. Er bewohnt dergleichen Gebäude für beständig, aber immer einsam und liebt doch die Verborgenheit. Sonst zeigt er sich auch ziemlich häufig auf den einzelnen Bäumen und Baumgruppen der grasbewachsenen Region der Berge, ich bemerkte ihn immer in der Nachbarschaft der kleinen *Saxicola caprata* der Philippinen.

Im Magen der von mir untersuchten fand ich allemal nur Insekten, und insbesondere auf Boninsima viele Larven irgend einer Käferart mit Sand vermischt.

(Fortsetzung folgt.)

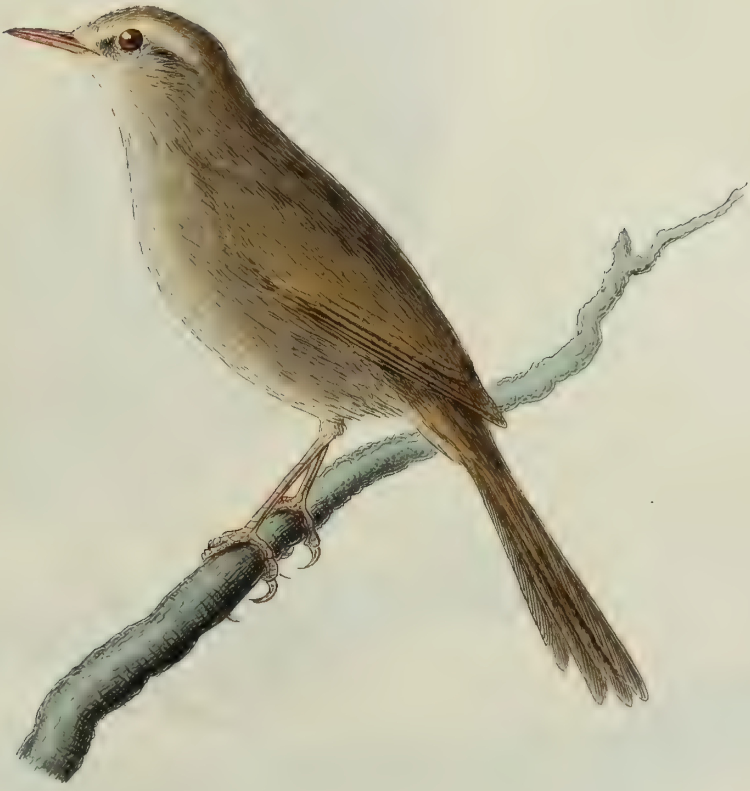




HvK

Ixos familiaris n.
Boninſima.

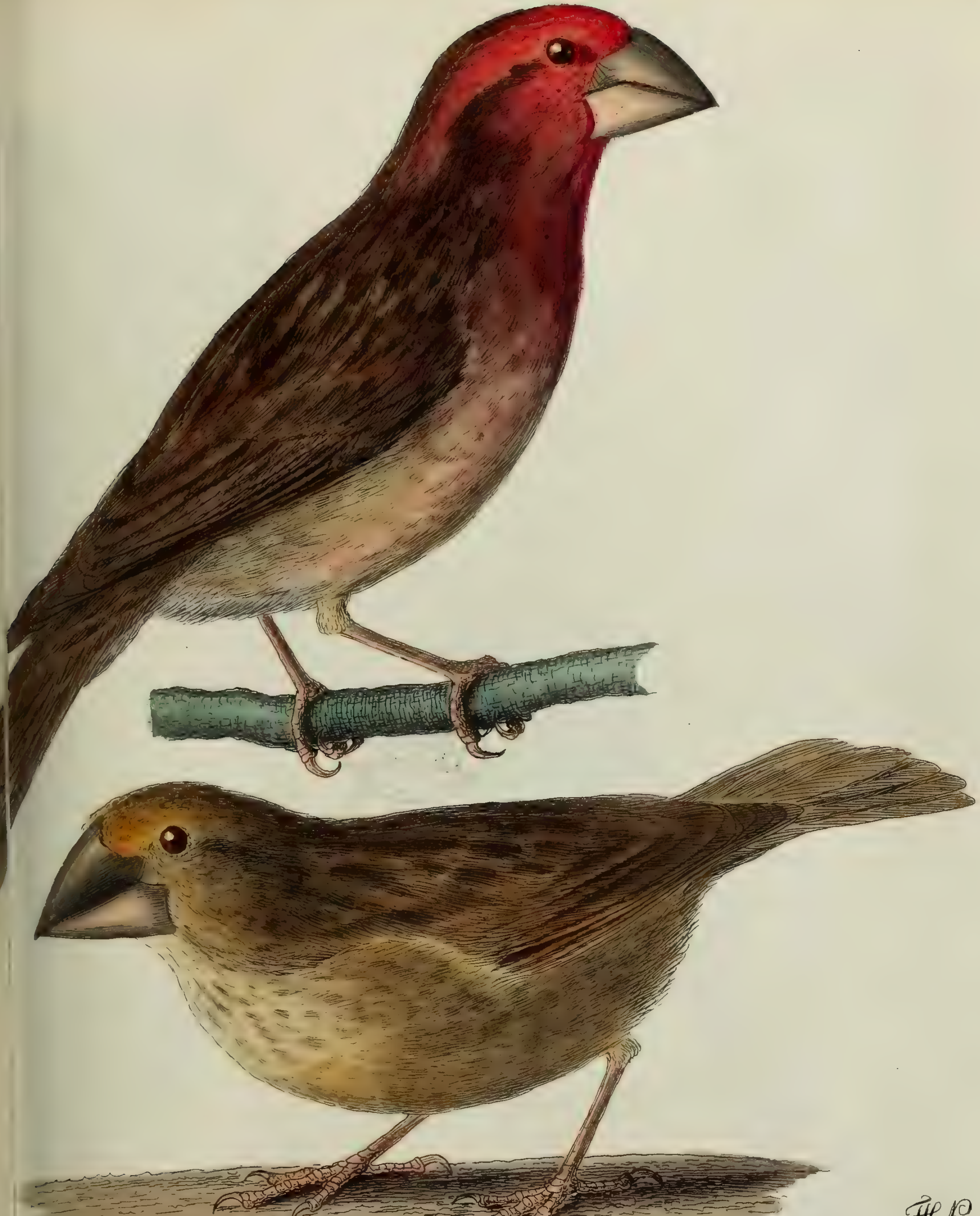
NATURAL HISTORY



THvK

Sylvia diphone n.
Boninſima.

NATURAL HISTORY

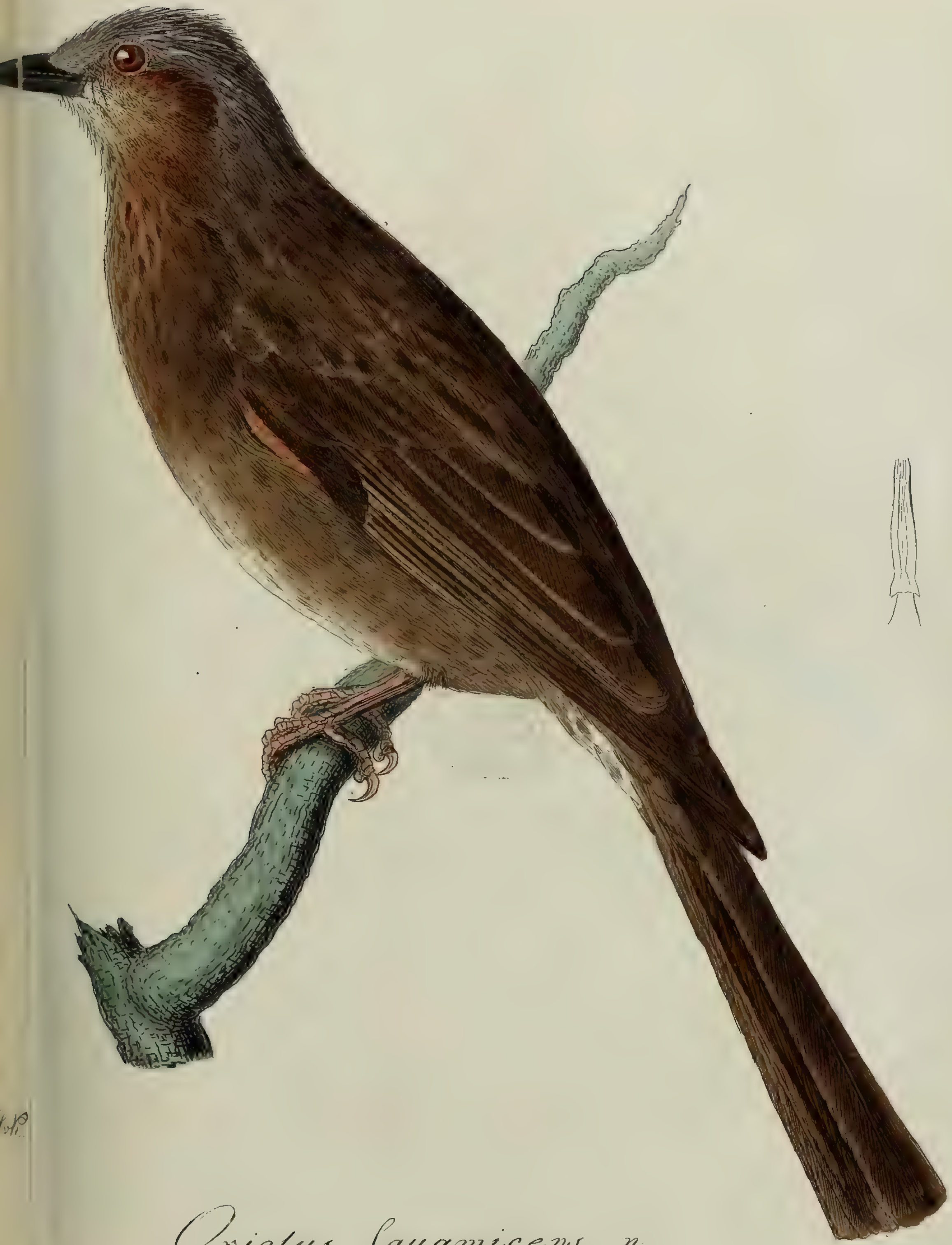


FHvK.

Fringilla Papa n.

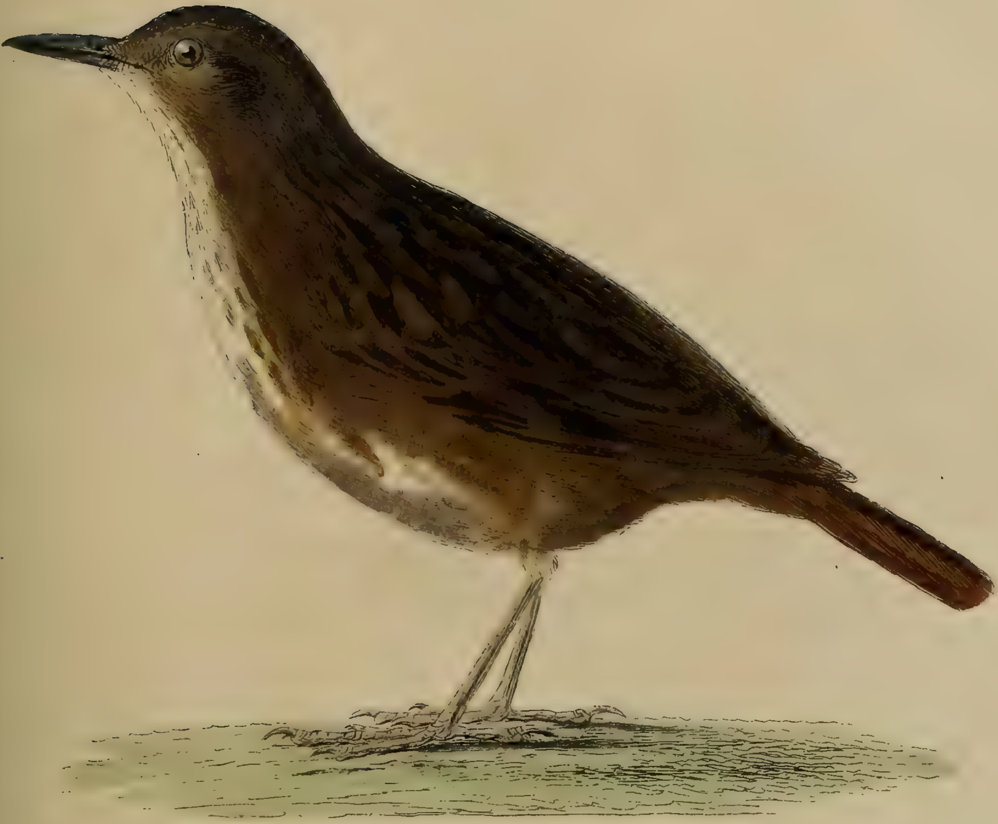
Boninſima.

[illegible]



Oriolus ſquamiceps n.
Boninſima.

NATURAL HISTORY



FHvK

Turdus terrestris n.
Boninſima.

NATURAL HISTORY

ÜBER DIE AUSDEHNUNG
DER
TROPFBAREN FLÜSSIGKEITEN
DURCH WÄRME.

VON

Dr. G. H. MUNCKE,
HOFRATH UND PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG.

(Gelesen am 13. August 1828.)

Die Gesetze der Ausdehnung durch Wärme, welche die verschiedenen Körper befolgen, gehören theils an sich, theils in Rücksicht auf ihre mehrfache Anwendung, unter die wichtigsten Aufgaben der Physik, zugleich aber ist ihre Auffindung schon deswegen mit unglaublichen Schwierigkeiten verbunden, weil man sehr kleine Grössen, und diese fast allezeit unter nachtheiligen Bedingungen, zu messen gezwungen ist. Eine Uebersicht der wichtigsten, bisher bekannt gewordenen, angestrengten Bemühungen zahlreicher und geübter Physiker, diese Gesetze der Ausdehnung der verschiedenen Körper aufzufinden, habe ich im ersten Bande des neuen Gehlerschen Wörterbuchs der Physik unter dem Artikel *Ausdehnung* zusammengestellt. Hieraus ergiebt sich, dass das Verhalten der festen Körper in dieser Hinsicht durch Hülfe der feinsten und sinnreichst gebaueten Maschinen mit hoher Genauigkeit aufgefunden ist; über die tropfbaren Flüssigkeiten sind ungleich weniger Versuche vorhanden, und die bisher bekannt gewordenen können auf einen gleichen Grad der Genauigkeit, als jene, keine Ansprüche machen; die Ausdehnung expansibler Flüssigkeiten soll zwar durch Dalton und Gay-Lussac mit genügender und unübertrefflicher Schärfe bestimmt seyn; allein wenn dieses auch allerdings von der trockenen atmosphärischen Luft gilt, so herrscht doch rücksichtlich der verschiedenen Dämpfe noch einige unverkennbare Ungewissheit, welche es wünschenswerth macht, dass nochmals ein vorzüglich geübter Experimentator diesen Gegenstand in genauere Untersuchung nehme.

Handelt es sich indess um die unbekannte Ausdehnung tropfbarer Flüssigkeiten, so muss vorerst das Quecksilber ausgenommen werden. Schon hatten sich ausnehmend viele Gelehrte bemüht, die Zunahme seines Volumens durch erhöhete Wärme zu finden, und ihre Resultate schwankten mit nicht grossen Abweichungen um ein Mittel aus den vielfachsten genauen Versuchen, als Dulong und Petit durch eine sinnreich construirte, und man darf sagen, unübertreffliche Vorrichtung die wahre Grösse seiner Ausdehnung durch Wärme auf das genaueste auffanden. Ueber die anderen Flüssigkeiten kennt man vorzüglich nur die bekannten Versuche von de Luc, allein wie schätzbar diese auch sind, so fallen sie dennoch in eine Zeit, wo man die jetzt übliche höchst scharfe Genauigkeit beim Experimentiren noch nicht kannte, und ausserdem ist die gewählte Methode, Thermometer mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten zu füllen, sie als wirkliche Thermometer zwischen den beiden festen Puncten zu graduiren und ihren Gang mit einem Quecksilberthermometer zu vergleichen, wohl nicht die empfehlenswertheste, sollte es auch nur deswegen seyn, weil die unbekannte Ausdehnung des Glases jedes einzelnen Thermometers nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden konnte.

Unter den sämmtlichen Flüssigkeiten haben vorzugsweise die Ausdehnungen des Wassers und des reinen sowohl als gemischten Alkohols mehrere Physiker beschäftigt, weil gerade diese beiden Flüssigkeiten in mehrfacher Hinsicht von vorzüglicher Wichtigkeit sind. Die erhaltenen Resultate findet man gleichfalls in der erforderlichen Vollständigkeit im oben genannten Physikalischen Wörterbuche zusammengestellt, ausser der gehaltreichen Abhandlung des berühmten Hällström über die Ausdehnung des Wassers, welche mir damals noch nicht bekannt seyn konnte. Diese Untersuchungen eines unserer gelehrtesten und geübtesten Physikers gehören allerdings unter die schätzbarsten Arbeiten, welche die physikalische Literatur der neuesten Zeiten aufzuweisen hat, allein dennoch kann man nicht sagen, dass die Aufgabe, die bei verschiedenen Temperaturen veränderliche Dichtigkeit das Wassers zu finden, völlig durch sie gelöset sey, wie aus zwei Gründen unwidersprechlich folgt. Zuerst nämlich hat Hällström zwar die Vorsicht gehabt, die Ausdehnung des von ihm zum Abwägen gebrauchten Glaskörpers dadurch genau zu finden, dass er sie an einer von derselben Masse gefertigten Röhre vorher mass; allein theils ist eine solche Messung an sich schwierig, theils senkt sich das schwere Glas im Tiegel stets herab, und es bleibt daher fraglich, ob die Masse der Röhre und der zum Abwägen angewandten hohlen Kugel genau dieselbe war, endlich aber ist noch nicht entschieden, ob ungleich dickes und ungleich gekühltes Glas auch dann, wenn es auf verschwindend kleine Differenzen ankommt, die nämlichen Gesetze der Ausdehnung befolgt. Gesetzt aber auch, es liesse sich dieses Argument, als zu ängstlich gesucht, beseitigen, so bleibt doch ein zweiter Einwurf auf allen Fall unerledigt, nämlich die veränderliche Temperatur des angewandten Wassers während der Dauer der Wägungen selbst, und die ungleiche Dichtigkeit der verschiedenen horizontalen Schichten dieser Flüssigkeit in dem gebrauchten Gefässe. Die nachfolgenden langen Reihen von Versuchen geben nämlich die evidenteste Ueberzeugung, dass eine tropfbare Flüssigkeit und namentlich das Wasser keine 6, und ich will hoch annehmen, keine 10 Secunden ruhig stehen darf, ohne sich in Schichten von ungleicher Dichtigkeit zu trennen. Indem aber jede Wägung nothwendig längere Zeit als die hier angegebene, erforderte, um die Waage zum Stillstande zu bringen und die Gewichte zu bestimmen, so können die durch Hällström erhaltenen Resultate auf den erforderlichen Grad der Genauigkeit keine Ansprüche machen.

Bei meinen anderweitigen vielen Geschäften würde ich es nicht gewagt haben, eine so schwierige Aufgabe zum Gegenstande neuer Untersuchungen zu wählen, wenn ich nicht eine bedeutende Stütze in der Hülfe zweier junger Männer gefunden hätte, deren Verdienste um die Auffindung der untersuchten Gesetze ich um so weniger hier verschweigen darf, als ohne sie die ganze Arbeit nicht hätte vollendet werden können. Der eine derselben, namens Arneth, welcher nach beendigtem Studio der Mathematik und der übrigen Hülfswissenschaften sich der Experimentalphysik seit einigen Jahren ausschliesslich widmet, und in dieser Wissenschaft unter günstigen Bedingungen künftig zuverlässig noch viel leisten wird, benutzte gern die dargebotene Gelegenheit, sich an so schwierigen Versuchen zu üben, und bewies dabei eine unübertreffliche Geschicklichkeit in der Handhabung der Instrumente, eine ausserordentliche Sorgfalt und Schärfe der Beobachtung und zugleich diejenige Dreistigkeit, woran man den geübten Experimentator zu erkennen pflegt. Von ihm ist der grösste Theil der Beobachtungen, denn es fand sich bald, dass sein Gesicht zum Ablesen der ausnehmend feinen Theilstriche der Messröhre das schärfste war, und ausserdem sicherte die ruhige und feste Haltung des Arms bei ihm die unausgesetzte unmittelbare Berührung der Kugeln des Thermometers und der Messröhre, wie nicht minder die erforderliche Schonung und Erhaltung so zerbrechlicher Apparate. Mit eben diesem habe ich bei seiner Fertigkeit in der Geometrie die zur Berechnung erforderlichen Formeln entworfen, auch hat er den weitläuftigen numerischen Calcul zum Theil allein, zum Theil in Gemeinschaft mit mir durchgeführt, wobei ich selbst jedoch allezeit eine Revision vorgenommen habe, und daher für die Richtigkeit mit Gewissheit stehen kann. Der andere, namens v. König, Candidat der Forstwissenschaft, hat hauptsächlich das Protocoll geführt, die Wägungen controlirt, und neben mir die stets nöthigen Hülfsleistungen besorgt, indem der eigentliche Beobachter, meistens Arneth, minder häufig ich selbst, oder in einigen Fällen wir beide, durch das Halten der Instrumente und unverrücktes Beobachten ihrer Skalen gefesselt waren. Das grösste Verdienst hat aber auch dieser bei seiner Kenntniss der Mathematik und Fertigkeit im Calcul sich durch die zugleich geführte Berechnung erworben, denn da die erforderlichen Zahlenreihen zu lang waren, als dass sie bequem mit Logarithmen behandelt werden konnten, so waren Rechnungsfehler leicht möglich, und weil hierdurch die Zuverlässigkeit der gefundenen Resultate geschwächt wäre, so wurden die Berechnungen zu besserer Controle sogleich doppelt angestellt, die Resultate mit einander verglichen, und hierdurch jeder Verstoss mit Sicherheit vermieden. Wie langweilig und ermüdend übrigens diese Rechnungen waren, wird jeder Sachverständige aus der Abhandlung selbst leicht entnehmen, wenn ich insbesondere noch versichere, dass die sämmtlichen, in den Formeln angegebenen, Zahlen als Resultate einer scharfen Rechnung gefunden und in ihrem ganzen Umfange benutzt sind.

Damit aber die hier gelieferte Arbeit gehörig gewürdigt werden könne, muss ich vorläufig die angewandte Methode des Experimentirens und die dabei gebrauchten Instrumente näher beschreiben. Alle Messungen sind mit thermometerartigen Apparaten angestellt, welche aus einer Glasklugel von etwa 0,75 bis 1,25 par. Zoll Durchmesser und einem angeblasenen Thermometerröhrchen von 11 Z. Länge bestanden. Sie waren von dem bekannten, in Arbeiten dieser Art sehr geübten, Mechanicus Loos in Darmstadt aus Würzburger Glase verfertigt, und ertrugen zu unserer aller und des Künstlers eigener Verwunderung den Wechsel der Temperatur vortrefflich. Auf die Röhrchen war mit den feinsten Strichen eine Skala von 200 gleichen Theilen geätzt, welche, gegen durchfallendes Licht gehalten, mit eben so grosser Sicherheit als Schärfe abgelesen werden konnten. Sie waren darauf mit reinem Quecksilber gefüllt und nach Art der Thermometer vollständig ausgekocht. Auf solche Weise gefertigt und bis obenhin mit Quecksilber gefüllt, erhielten wir sie vom Künstler und benutzten sie dann zu unseren Versuchen. Zum Messen der Temperaturen gebrauchten wir ein gewöhnliches, bis 80° R. und ein anderes bis 280° R. getheiltes Quecksilberthermometer gleichfalls von Loos mit auf Glas geätzten Skalen, bei denen wir uns vorläufig von der Richtigkeit der beiden festen Punkte überzeugten [1]) und sie noch obendrein zu grösserer Sicherheit mit 6 andern verglichen. Bei dem ersteren jener beiden Thermometer waren die Theilstriche bei weitem nicht so fein, als bei den Messröhren, und würden also nicht so scharfe Bestimmungen der Temperaturen gegeben haben, als wir verlangten; wir halfen uns aber damit, dass wir die Grade von der Rückseite ablasen, indem wir das Niveau des Quecksilbers auf die Mitte des Theilstriches projicirten. Ein drittes von uns gebrauchtes Thermometer ist vom jüngeren Greiner in Berlin verfertigt, gehört

---

Anm. 1. Die Ausdehnung einiger Flüssigkeiten, namentlich des Wassers, verdient hauptsächlich beim Schmelzpuncte des Eises (dem 0° C.) und bei den nahe um diesen Punct liegenden Temperaturen untersucht zu werden. Man hat indess neuerdings die Genauigkeit der Grade dicht über und unter diesem Puncte, namentlich bei Quecksilberthermometern verdächtig gemacht, und es ist daher nöthig, dass ich auch über diese Frage vorläufig meine Erklärung abgebe, weil sonst ein Zweifel darüber obwalten müsste, auf welche Weise von uns die Temperatur nahe bei dem 0 der Thermometer bestimmt sey.

Die Behauptung, dass der Schmelzpunct des Eises oder Schnees bei den Thermometern, selbst bei den genauesten derselben, höher liege, als die Skalen ihn angeben, ist so oft wiederholt und die Thatsache durch übereinstimmende Versuche so geübter und glaubhafter Physiker nicht bloss bestätigt, sondern auch mit anscheinend so triftigen Gründen unterstützt, dass sie gegenwärtig von den meisten als keinem Zweifel mehr unterworfen angesehen wird. Indem ich also dessenungeachtet derselben widersprechen muss, so erfordert es schon die Achtung gegen so viele bedeutende Autoritäten, dass ich den Gegenstand hier gründlich erörtere und zu zeigen versuche, dass die Sache nicht nur nicht so sey, sondern auch bei übrigens genauen und von zuverlässigen Künstlern verfertigten Thermometern nicht so seyn könne.

Sobald die angegebene Behauptung, nämlich dass in der Regel bei den Quecksilberthermometern der Schmelzpunkt des Eises höher liege, als die Skalen ihn angeben, von vielen Physikern wiederholt wurde, als insbesondere Flaugergues (in Bibl. univ. XX. 117) die Ursache in der Compression des Glases durch die Luft fand und dieses durch eine Reihe anscheinend entscheidender Versuche von de la Rive und Marcet bestätigt wurde (Bibl. univ. XXII. 265) indem sie fanden, dass das Quecksilber in den Thermometern unter der Luftpumpe auf den auf der Skale verzeichneten Nullpunct herabsank, unter dem Drucke der Atmosphäre aber höher stand (wie schon Taberati u. a. gefunden haben wollen, ohne die Ursache zu kennen S. Comm. Soc. Bonon. II. I. 319 und II. III. 237) probirte ich sogleich eine Reihe vorzüglich guter Thermometer mit geätzter Skala von dem genannten Mechaniker Loos, und glaubte auch wirklich an diesen die Behauptung bestätigt zu finden. Mit solchen oberflächlichen Versuchen konnte ich mich aber nicht begnügen, als ich die zu beschreibende Reihe von Beobachtungen anfing, sondern hierfür war es nothwendig die Sache schärfer zu prüfen, um die Differenz genau zu kennen und in Rechnung zu bringen. Allein eben durch diese scharfe Prüfung gelangte ich zu der festen Ueberzeugung, dass bei den beiden zu unsern Versuchen gebrauchten Thermometern von Loos der Schmelzpunkt des Eises genau mit dem Nullpuncte der Skalen zusammenfällt, bei dem von Greiner verzu einem Psychrometer nach Angabe des Dr. August, ist von —30° bis +30° R. jeder Grad in 5 Theile getheilt, wovon 0,5 eines Theiles und bei erforderlicher Uebung 0,25 desselben mit genügender Sicherheit geschätzt werden kann. Unsere Beobachtungen hiermit gehen also für einige, dicht bei dem Nullpuncte liegende Temperaturen bis auf 0,2 Grad unmittelbar, und bis 0,05 eines Grades nach noch immer sehr sicherer Schätzung.

Die Vermeidung der Parallaxe beim Ablesen der Theilstriche ist hauptsächlich ein Gegenstand der durch Uebung erlangten Fertigkeit. Inzwischen ver-

---

fertigten liegt er aber 0,05 eines Grades R. darunter, und zeigt dieses Thermometer also gerade das Gegentheil von dem, was die Physiker bisher gefunden haben. Dieser fast verschwindende, und nur bei einer so grossen Skale merkbare Fehler liegt ohne Zweifel an einer geringen Dehnung des Papiers, worauf die Theilstriche der Skala gezeichnet sind, verschwindet allmälig, und ist bei 1,5 Grade nicht mehr wahrnehmbar. Die Beobachtungen übrigens, worauf sich jene ausgesprochene Ueberzeugung gründet, sind nicht etwa ein oder zweimal angestellt, sondern mehr als zehnmal wiederholt, auch haben wir die Thermometer nicht bloss 5 oder 10 Minuten in der Mischung von Wasser und Schnee erhalten, sondern wenn sie zugleich mit den Messröhren, in deren grossen Kugeln sich gegen Wärme unempfindliche Flüssigkeiten befanden, in jene Mischung getaucht wurden, so mussten sie oft 30 Minuten ja bis eine Stunde auf dem Schmelzpuncte erhalten werden, um von der Genauigkeit dieser Beobachtung, welche im Allgemeinen den Anfangspunct einer ganzen nachfolgenden Reihe ausmachte, mit völliger Gewissheit überzeugt zu seyn, und dann ergab sich mit grösster Evidenz nicht bloss ihr bleibender Stand auf 0° C., sondern es kam auch die Ursache zum Vorschein, welche leicht eine Täuschung hervorbringen kann.

Wenn aber durch die oben genannten Gelehrten die angegebene Behauptung nicht bloss aufgestellt, sondern auch durch die Versuche im Vacuo der Luftpumpe bestätigt ist, so muss nothwendig hier auch die ihr widerstreitende, nämlich dass eine solche Differenz nicht stattfinden könne, näher begründet werden, welches indess ohne Schwierigkeit geschehen kann. Man hat bisher die genannte Unrichtigkeit hauptsächlich von zwei Ursachen abgeleitet, nämlich entweder von einem geringen Antheile im Quecksilber zurückgebliebener Luft nach Gourdon (Bibl. univ. XIX. 154) oder von einer Zusammendrückung der Thermoterkugeln durch die atmosphärische Luft nach den oben angeführten Autoritäten. Die erstere Hypothese scheint mir ganz unzulässig, denn sobald sich in Thermometern etwas zurückgebliebene Luft oder Feuchtigkeit ansammelt, wird ihr Gang überhaupt unsicher, und die Säule der Röhre trennt sich in mehrere Theile, welche sich bei zunehmenden Temperaturen weiter von einander entfernen, während sie bei niederen und namentlich beim Gefrierpuncte richtig sind. Das hiesige Cabinet besitzt ein in Paris verfertigtes, für 20 Gulden früher angeschafftes Thermometer, dessen Skale bis 400° C. reicht. Als ich dasselbe für die zu beschreibenden Versuche benutzen wollte und vorher seinen richtigen Gang prüfte, fand ich den Nullpunct genau, aber schon bei 20° und noch mehr bei 40° und 60° trennte sich die Säule in so viele Theile, dass ich es unbenutzt bei Seite legen musste; denn obgleich es allezeit wieder richtig auf den Gefrierpunct herabging und die einzelnen Theile der Säule sich durch suchten wir auch hierbei die Anwendung mechanischer Hülfsmittel, welche aber im Ganzen zu beschwerlich waren. Bei den Thermometern zuvörderst war die Sache nicht schwierig, denn die Röhren der beiden von Loos verfertigten sind flach, und es ist also durchaus nicht schwer sie ohne parallaktische Fehler abzulesen, das dritte von Greiner aber hat so grosse Theile und ist so vortrefflich construirt, dass der Fehler der Parallaxe dabei für einen geübten Beobachter verschwinden muss. Für die Messröhrchen versuchten wir anfangs einen solchen Cylinder von zusammengerolltem Papiere mit unterer ganz gerader Flä-

---

Herumschwenken desselben wieder vereinigten, blieb es doch für die höheren Wärmegrade unbrauchbar. Rücksichtlich der zweiten Hypothese lässt sich wohl nicht in Abrede stellen, dass der Druck der atmosphärischen Luft das Glas der Thermometerkugeln vermöge seiner Elasticität um eine Kleinigkeit zusammendrücke, allein da diese Grösse eine constante ist, so muss sich nothwendig die ihr zugehörige Correction in jeder Skale mit befinden. Die Künstler bestimmen nämlich die festen Puncte ihrer Thermometer zuerst nur beiläufig, blasen sie dann oben zu, wobei etwas Quecksilber verloren wird, und lassen sie dann auf allen Fall einige Stunden, meistens mehrere Tage liegen, bis sie die festen Puncte bestimmen, weil sie selten ein einzelnes Thermometer allein verfertigen, sondern in der Regel selbst ganze Dutzende. Indem aber der Druck der Atmosphäre unaufhörlich wirkt, so muss er seinen Einfluss auf das elastische Glas der Thermometer in demselben Augenblicke äussern, als das Ende des Röhrchens zugeschmolzen ist und das erkaltende Quecksilber sich zurückzieht, die Glaskugel muss daher dieser Wirkung proportional zusammengedrückt werden, und das Thermometer erhält, wenn man es so ausdrücken will, einen durch alle Grade fortlaufenden constanten Fehler, welcher aber bei der Bestimmung der festen Puncte corrigirt wird. Nach den Angaben der Physiker, welche eine fehlerhafte Bestimmung des Eispunctes wahrgenommen haben wollen, soll diese Abweichung sich nur dort und nicht auch bei höheren Graden zeigen; allein dieses ist ganz unmöglich, vielmehr muss sie sich nothwendig auch beim Siedepuncte zeigen, indem ja durch die Umgebung des siedenden Wassers der Druck der Atmosphäre auf die Glaskugel des Thermometers nicht aufgehoben wird. Endlich wird man aber schwerlich behaupten wollen, dass der Luftdruck das elastische Glas der Thermometerkugeln erst allmälig zusammendrücke, folglich der hieraus entspringende Fehler nicht schon in der bald nach dem Zuschmelzen des Röhrchens verfertigten Skale corrigirt sey. Hiergegen streitet überhaupt schon das bekannte Verhalten elastischer Körper, welche endlich zerbrechen, wenn sie einem äusseren Drucke mit zunehmender Aenderung ihrer Form nachgeben, und dann müsste ja die Abweichung von dem richtigen Nullpuncte soviel grösser seyn, je älter die Thermometer sind. Der Ungrund einer solchen Voraussetzung wird aber durch folgende interessante Erfahrung widerlegt. Um die Veränderungen in den Temperaturen der Erdkruste zu messen, liess ich mir 1820 drei Thermometer von 2, 5, von 4 und 6 F. langer Quecksilbersäule durch den mehrgenannten Mechaniker Loos verfertigen. Als der Künstler diese kostbaren Riesen-Instrumente ablieferte, bemerkte er, ich würde meine Freude über ihre genaue Uebereinstimmung haben, wenn sie nur erst eine hinlänglich lange Zeit neben einander im Zimmer gelegen hätten, war aber nicht wenig betroffen, als sie eine mit der Länge zunehmende Differenz zeigten. Inzwischen che anzuwenden, welcher auf dem Röhrchen herabgeschoben wurde und mit seiner unteren horizontalen Fläche eine die obere Fläche der Flüssigkeit berührende Ebene bildete, nach welcher die Theilstriche genau abgelesen werden konnten. Zur Schätzung der Zehntel eines Theils zwischen zwei Strichen auf der Röhre wandten wir ein feines Brandersches Glasmikrometer und eine Loupe an; allein die Erfahrung ergab bald, dass durch so zusammengesetzte Vorrichtungen und die Bemühung, diese stets gehörig einzurichten, die Beobachtungen bei dem schnellen Wechsel der Ausdehnungen nur unsicherer wurden, der hohle

---

verschwand diese augenblicklich, nachdem wir die Instrumente lothrecht gestellt hatten, und sie zeigten alle drei genau die nämliche Temperatur. Diese Thermometer stehen jetzt fast sieben Jahre in der Erde, der dicke Cylinder des längsten trägt eine Quecksilbersäule von 72 par. Zollen, hält also einen Druck von 1$\frac{4}{7}$ Atmosphären über den äusseren atmosphärischen während dieser langen Zeit aus, und dennoch finde ich den Gang desselben noch stets unverändert, so weit sich hierüber aus dem bei allen dreien gleichen Mittel aus ganzjährigen Beobachtungen schliessen lässt. (Vergl. dasjenige, was ich über diese Thermometer im neuen Phys. Wörterbuche Th. III. S. 987 gesagt habe.)

Aber, wird man fragen, wie war es möglich, dass so viele bewährte Physiker bei ihren Beobachtungen hierüber getäuscht werden konnten? Hierauf erwidre ich in der Kürze Folgendes: Die Bestimmung des Nullpunctes bei Thermometern ist keinesweges so leicht, als man gewöhnlich glaubt, und die Behauptung, dass Wasser, so lange sich schmelzendes Eis oder Schnee in demselben befindet, stets genau den Nullpunct der Thermometer zeige, ist strenge genommen durchaus falsch. Indem nämlich stets Wärme von aussen durch das Gefäss dringt, welches die kalte Mischung enthält, und der Oberfläche dieser Mischung zugeführt wird, auch wenn die Temperatur des Zimmers nur wenige Grade über 0° C. beträgt, so wird das geschmolzene Wasser sehr bald um eine Kleinigkeit wärmer als 0° C., sinkt vermöge seines grösseren Gewichts herab, und ein hineingesenktes Thermometer zeigt in demselben unter dem Schnee 0°,5 bis 1°,5 über 0° C., ja selbst das in den Zwischenräumen des schmelzenden Schnees gesammelte Wasser kann bis 0°,5 C. erwärmt seyn, wenn nur hauptsächlich die den Beobachter umgebende wärmere Atmosphäre eine Zeitlang darauf einwirkt. Im Gegentheil ist es auffallend, dass durch das Mischen des Schnees mit Wasser im ersten Augenblicke, auch wenn das Wasser ganz rein ist, leicht der Schmelzungsprocess des Schnees gesteigert wird, so dass ein hineingesenktes Thermometer in diesem Zeitraume, insbesondere wenn der Schnee locker ist, bis — 1° C. herabsinken kann. Als das beste Mittel zur genauen Bestimmung des Frostpunctes habe ich das Verfahren gefunden, wenn man die Menge des in das Wasser geworfenen und wohl umgerührten Schnees nicht zu klein nimmt, dann die Kugel des Thermometers durch die sich bildende Decke des schmelzenden Schnees herabsenkt, und sie 10 bis 15 Minuten lang, je nach ihrer Grösse, stets von unten wiederholt so heraufzieht, dass sie völlig von schmelzendem Schnee umgeben ist. Bei der Anwendung dieses Verfahrens werden gute Thermometer constant den Nullpunct zeigen. Diese Methode haben wir stets zur Bestimmung des Gefrierpunctes bei den gebrauchten Messröhrchen, eben wie zur Prüfung der Thermometer befolgt.

Cylinder und das Mikrometer wurden also entfernt, die Loupe aber in einigen Fällen zu grösserer Sicherheit beibehalten, indem sie zugleich zur Vermeidung der Parallaxe diente, weil die Oberfläche der Flüssigkeit genau in den Focus der Linse gebracht werden musste. Zur Vermeidung der Parallaxe zeigte sich indess bald ein eben so leichtes als sicheres Mittel. Die feinen Theilstriche der Röhrchen konnten am besten abgelesen werden, wenn sie etwas seitwärts gehalten wurden. Hierdurch bildeten sie aber an sich schon eine kleine horizontale Ebene, allein noch vortheilhafter war es, wenn das Röhrchen beim Beobachten wiederholt etwas um seine lothrechte Axe gedreht wurde, wodurch der Theilstrich einen Theil einer Kreisfläche beschrieb, über oder unter welche die ihr parallel laufende, die Oberfläche der Flüssigkeit berührende, Ebene bequem projicirt werden konnte. Endlich gab auch die Oberfläche des Gefässes mit der zum Eintauchen des Thermometers und Messröhrchens bestimmten Flüssigkeit, welche meistens 6 bis 8 Zoll Höhe hatte, ein bequemes Mittel zur Vermeidung der Parallaxe, indem die das obere Ende der Flüssigkeit berührende Ebene mit ihr parallel projicirt wurde. Die Schätzung der Zehntheile des Zwischenraumes zwischen zwei Theilstrichen kann bei der grossen angewandten Sorgfalt und der langen Zeit, welche den Beobachtungen gewidmet wurde, für sehr genau, ja wohl für absolut genau, bis auf die Fehlergrenze von 0,25 oder höchstens 0,1 dieses Zwischenraums gelten, wenn man berücksichtigt, dass beide Abschnitte, der eine unter und der andere über der Oberfläche der Flüssigkeit, mit einander verglichen wurden.

Bei den Beobachtungen unter dem Gefrierpuncte senkten wir die Messröhre nebst dem Thermometer zugleich in die kaltmachende Mischung so, dass die Kugeln beider in unmittelbarer Berührung waren. Man sollte hiernach vollkommen genaue Resultate erwarten, allein schon während der Versuche überzeugten wir uns, dass wegen der ungleichen Empfindlichkeit der in den Kugeln enthaltenen Substanzen gegen die, wenn gleich langsamen Aenderungen der Temperatur, auch weil an einzelnen Stellen die Mischung durch unbekannte Einflüsse ungleich erkaltet seyn konnte, die erhaltenen Resultate an Genauigkeit denjenigen weit nachstehen, welche wir über dem Gefrierpuncte erhalten haben, obgleich das zur Aufnahme der Apparate dienende Gefäss in einem weit grösseren, gleichfalls mit Schnee und Kochsalz gefüllten, stand, und die Bestandtheile der Mischung in jenem vor dem Hineinsenken der Apparate mit einem hölzernen oder gläsernen Röhrstabe stark und lange durch einander gemengt wurden. Ungleich besser würde es gewesen seyn, wenn wir in das äussere Gefäss ein kleineres mit Quecksilber gesetzt, und in dieses Metall die Apparate gesenkt hätten. Die Dauer der strengen Kälte ging uns indess für den Umfang unserer Versuche zu schnell vorüber, und wir eilten zur Beendigung unserer grossen Arbeit. Dass übrigens die Beobachtungen unter dem Gefrierpuncte in Zimmern angestellt wurden, deren Temperatur mehrere Grade unter dem Nullpuncte war, zuweilen am offenen Fenster bei — 10 bis — 15 Centesimalgraden, um die Einwirkung der äusseren Wärme möglichst abzuhalten, möge hier nur beiläufig erwähnt werden.

Die Messungen der Ausdehnungen über dem Gefrierpuncte wurden vor dem Fenster eines mässig erhitzten Zimmers deswegen angestellt, weil das stärker durchfallende Licht zum genauen Ablesen der Skalen erforderlich war. Hierbei waren Messröhre und Thermometer in einen irdenen Topf mit Wasser gesenkt, jedoch nicht so, dass sie den Boden berührten, welches nie richtige Resultate gab, sondern der Beobachter hielt die Röhren beider Instrumente zwischen den Fingern möglichst in der lothrechten Axe des Topfes schwebend, die Durchmesser beider Kugeln in einer horizontalen Ebene, und mass die Tiefe der Einsenkung nach derjenigen Höhe ab, bis zu welcher die Flüssigkeit im Messröhrchen schon aufgestiegen war, um den Stand der Flüssigkeit und die Skale über dem Rande des Topfes bequem erkennen und letztere genau ablesen zu können. Der Topf selbst stand in einem blechernen Gefässe mit etwa 2,5 Zoll hohem Rande, welches theils zur Aufnahme des überfliessenden Wassers diente, theils zur Erhaltung einer constanten Temperatur beförderlich war, zu welchem

Ende dasselbe mit Wasser von nahe der nämlichen Temperatur gefüllt wurde, als welche im Topfe selbst bleibend erhalten werden musste.

Die Nothwendigkeit dieser Vorsichtsmassregel ergab sich bald; denn die Empfindlichkeit der Flüssigkeit im Messröhrchen und auch des Quecksilbers in dem feinen Thermometer war so gross, dass bei niederen und insbesondere bei sehr niederen Temperaturen beide nach wenigen Secunden zu steigen anfingen, wenn die warme Hand an die Aussenseite des Topfes gelegt wurde, ein Mittel dessen wir uns oft bedienten, um die Temperatur etwas zu erhöhen. Dem Wasser im Topfe gaben wir übrigens die erforderliche Wärme durch Zugiessen von heissem Wasser oder durch Beimischung von etwas Schnee, welche beide in Gefässen nahe zur Hand bereit gehalten wurden. Durch dieses Mittel brachten wir zuerst das Wasser auf die erforderliche Temperatur, und um es dann die gehörige Zeit unverändert darauf zu erhalten, da die Kugel der Messröhre ungleich grösser, und ausserdem die Empfindlichkeit der Flüssigkeit in diesem Apparate grösstentheils ungleich geringer gegen den Einfluss des umgebenden Wassers war, als die des Quecksilbers im Thermometer, wurden in kurzen Zeitintervallen so geringe Quantitäten heissen Wassers oder Schnee's zugesetzt, dass die Temperatur des Wassers im Topfe eine beliebig lange Zeit unverändert blieb, auf allen Fall so lange, bis die Flüssigkeit im Messröhrchen anhaltend einen bleibenden Stand zeigte. Aus leicht begreiflichen Gründen konnte dieses ohne Schwierigkeit zwischen etwa 10 und 30 Graden der hunderttheiligen Skale erreicht werden, für die übrigen Grade, insbesondere die über jene hinausliegenden, war es dagegen höchst beschwerlich und langweilig, und von etwa 60 Graden an bis zum Siedepuncte reichte dieses Verfahren überhaupt nicht hin, um dem Wasser die erforderliche Temperatur bleibend zu erhalten, sondern wir bedienten uns zweier Weingeistlampen, deren eine durch ihre grössere Flamme die Wärme des Wassers zu erhöhen diente, die andere aber so eingerichtet wurde, dass sie möglichst genau hinreichte, um die erforderliche Temperatur des Wassers bleibend zu erhalten. Für die Temperaturen über dem Siedepuncte des

Wassers bedienten wir uns eines Gefässes mit Olivenöl und der Weingeistlampen. Das Oel war zwar vorher stark erhitzt, aber dennoch war das Dampfen desselben für den Geruch und die Respirationswerkzeuge nicht bloss unangenehm, sondern bei so langer Dauer der Beobachtungen und der grossen Nähe, in welcher sich die Experimentatoren bei dem dampfenden Apparate befanden, kaum zu ertragen, so dass es uns gegen unseren lebhaften Wunsch unmöglich wurde, namentlich die Versuche mit Schwefelsäure und Mandelöl noch weiter zu treiben, als von uns geschehen ist, und wir fanden uns hierzu um so viel weniger aufgefordert, als die schon erhaltene Reihe der Beobachtungen das Gesetz der Ausdehnung dieser Flüssigkeiten völlig genau anzugeben schien. Statt des Olivenöls eine andere Substanz zu wählen, war nicht wohl thunlich, denn Quecksilber drohete Gefahr wegen der Dämpfe und das leicht flüssige Metallgemisch wird leicht an der Oberfläche oxydirt, beide aber lassen sich wegen ihrer geringen Fluidität durch Umrühren nicht so vollständig in steter Bewegung erhalten, als erforderlich ist, um bei ihrer grossen Fortleituug der Wärme unrichtige Resultate genügend zu entfernen.

Es ist nämlich schon oben bemerkt, dass das Wasser kaum einige Secunden ruhig stehen darf, ohne sich in Schichten von ungleicher Temperatur zu trennen. Hiervon überzeugte uns gar bald die Erfahrung, indem das Thermometer in unbewegtem Wasser fast augenblicklich seinen Stand veränderte, und bei einer nur geringen Veränderung der Tiefe, bis zu welcher es eingetaucht war, um mehr als einen ganzen Grad stieg oder fiel. Es war daher ein fortwährendes Geschäft eines der Experimentatoren, das Wasser sowohl als auch das Oel, wenn Letzteres statt des Ersteren gebraucht wurde, mit einem flachen hölzernen Spatel stets tüchtig umzurühren.

Um die Ausdehnung der Flüssigkeiten durch Wärme zu finden, mussten die Räume, welche dieselben bei ungleichen Temperaturen ausfüllten, genau gemessen werden. Hierzu bedient man sich allgemein des Quecksilbers, welches wegen seines grossen specifischen Gewichts zu diesem Zwecke vorzüglich geeignet ist. Inzwischen müssen bei solchen Messungen zwei Grössen bekannt seyn, nämlich die Ausdehnung, welche das Quecksilber selbst und welche das gläserne Gefäss durch Wärme erleiden, und da die Beobachtungen nur eine dieser Grössen gaben, so musste die andere als bekannt vorausgesetzt werden. Wir wählten hierzu unbedenklich die Ausdehnung des Quecksilbers durch Wärme, weil schon oben bemerkt ist, dass diese durch Dulong und Petit als mit vollkommener Sicherheit gefunden angesehen werden kann. Es ist ferner schon erwähnt, dass die zum Messen bestimmten Apparate vom Künstler mit reinem Quecksilber gefüllt und ausgekocht abgeliefert waren, und es musste daher vollkommene Sicherheit gewähren, den Inhalt der Messröhren aus dem Gewichte des in ihnen enthaltenen Quecksilbers, die Ausdehnung des Glases aber aus dem Stande desselben bei verschiedenen Graden der Temperatur nach Theilen der auf dem Röhrchen befindlichen Skale zu bestimmen. Die Abwägungen wurden höchst scharf mit einer vortrefflichen, dem hiesigen chemischen Kabinette zugehörigen, von Baumann in Stuttgart verfertigten Waage und mit Gewichten aus der Werkstatt des Geheimen Rath's Pistor in Berlin angestellt, und die gefundenen Werthe mussten völlig genau werden, weil wir alle Grössen auf das absolute Gewicht des Quecksilbers reducirten, wobei es also überflüssig war, wegen des aërostatischen Einflusses eine Correction anzubringen. Bei der Verfertigung der Messröhren hatte ich dem Künstler vorzugsweise eine höchst sorgfältige Calibrirung empfohlen, inzwischen controlirten wir diese nach der Ausleerung der Apparate, und gelangten dadurch zu der Ueberzeugung von ihrer vollständigen Genauigkeit. Weil endlich unsere ersten Wägungen zu wenig übereinstimmende Werthe gaben, indem man für eine solche Genauigkeit, als wir zu erreichen wünschten, bei aller Fertigkeit im Experimentiren doch erst mit den jedesmal gebrauchten Apparaten genau bekannt seyn muss, so wiederholten wir sie, des grossen hierzu erforderlichen Aufwandes von Zeit und Mühe ungeachtet, zum zweitenmale, und erreichten hierbei den gewünschten Zweck. Bei jener ersten Wägung zerbrach die Kugel des einen Messröhrchens, weil sie durch den schmelzenden Schnee zu hart auf den Boden des Gefässes herabsank; es wurde daher eine neue Kugel von grösserem Durchmesser angeblasen, und diese hat nachher alle damit angestellten Versuche ausgehalten, befindet sich also noch jetzt im hiesigen Cabinette, um künftig zu ähnlichen Versuchen benutzt zu werden, oder auch, wenn irgend ein Zweifel gegen die Genauigkeit der mitgetheilten Bestimmungen erhoben werden sollte, zur Controlle zu dienen. Durch das Anblasen der neuen Kugel wurde das Röhrchen um fast 2 Zoll kürzer; ich werde nun künftig jene längere Messröhre mit der kleineren Kugel durch *A*, die letztere kürzere mit der grösseren durch *B* bezeichnen.

Zur vollständigen Uebersicht der beim Experimentiren befolgten Methode muss endlich noch Folgendes bemerkt werden. Die Röhren der Messapparate waren zu kurz, als dass die ganze Ausdehnung der in ihnen enthaltenen Flüssigkeiten in einer einzigen Reihenfolge von Beobachtungen gemessen werden konnte. Es musste daher ein Theil der Flüssigkeit herausgenommen werden, wenn sie dem Ende der Skale nahe gekommen war; mit der verminderten Quantität wurde dann eine oder noch einige der letzten Beobachtungen wiederholt, um hierdurch die Quantität der herausgenommenen Flüssigkeit zu bestimmen, und dann die Ausdehnung nach den später anzugebenden Formeln zu berechnen. Damit aber die Versuche selbst deutlich übersehen und erforderlichen Falles, auch hinsichtlich der Berechnungen, genau controlirt werden können, scheint es mir nöthig, jederzeit sowohl die Original-Beobachtungen, als auch die hiernach berechneten Werthe anzugeben, dagegen finde ich es überflüssig auch diejenigen Resultate herzusetzen, welche uns gleich anfangs zweifelhaft schienen, weswegen wir, jedoch in seltenen Fällen, die Beobachtungen wiederholten, um von ihrer Genauigkeit vollkommen überzeugt zu seyn. Ausserdem fand sich meistens, dass unsere Besorgniss ungegründet gewesen war, indem wir zum zweitenmale genau diejenigen Grössen wieder fanden, welche wir zuerst erhalten hatten. Schliesslich muss ich noch bemerken, dass wir die Original-Beobachtungen gewissenhaft aufzeichneten, und uns hieran aus Muthmassung nichts zu ändern erlaubten, auch späterhin die Berechnungen genau nach denselben geführt haben, wenn gleich kleine Aenderungen eine nähere Uebereinstimmung in dieselben bringen würden. Es ist nämlich viel besser, dass ein Naturgesetz noch zweifelhaft bleibt, und durch spätere Versuche erst völlig begründet wird, als dass man dasselbe nach Wahrscheinlichkeitsgründen modificirt, ihm die Beobachtungen anpasst, und es auf solche Weise gleichsam wie durch die Erfahrung festbegründet ansieht.

Vorbereitende Versuche.

Da wir keine Grösse als bekannt voraussetzen wollten, ausser der Ausdehnung des Quecksilbers durch Wärme, so war zuerst erforderlich, die Ausdehnung des Glases der Messröhre zu bestimmen, denn obgleich die Ausdehnung des Glases schon durch viele Versuche gefunden ist, und meistens in gewiss sehr genähertem Werthe = 0,000027 für 1° C. angenommen wird, so hielten wir es dennoch für nöthig, sie für die individuelle Glassorte unserer Apparate abermals aufzusuchen. Es wurde daher das Messröhrchen mitsammt dem enthaltenen Quecksilber genau gewogen und der Stand der Quecksilbersäule bei den beiden festen Puncten des Thermometers gemessen; dann wurde ein Theil Quecksilber herausgenommen, gleichfalls auf das genaueste gewogen und eine abermalige Bestimmung der Quecksilberhöhen bei den zwei festen Puncten des Thermometers gesucht. Vermittelst dieses Verfahrens gab die Differenz der Stände bei beiden Gefrierpuncten die Länge einer Quecksilbersäule in Theilen der Messröhre ausgedrückt und bei 0° C. Temperatur, nebst dem Gewichte derselben. Durch die Unterschiede der Quecksilberstände bei den beiden festen Puncten des Thermometers fanden wir ferner die Ausdehnung des Glases durch eine Temperaturerhöhung von 100° C., die Ausdehnung des Quecksilbers durch eine gleiche Temperaturerhöhung als bekannt voraussetzt, endlich aber wurde der innere Raum des Röhrchens und seiner Kugel durch das absolute Gewicht des enthaltenen Quecksilbers ausgemittelt.

Es sey demnach

das Volumen des gesammten, in der Messröhre befindlichen, Quecksilbers bei 0° C. v

der Inhalt des Raumes im Röhrchen zwischen zwei Theilstrichen, oder der Werth eines Theiles der Röhre gleichfalls bei 0° C. . k

die Ausdehnung des Quecksilbers durch 1° C. . . . . d

die Ausdehnung des Glases durch 1° C. . . . . δ

Wird ferner angenommen, dass sich das Glas, nämlich der Raum in demselben, welcher mit Quecksilber gefüllt ist, von 0° C. angerechnet, um t Grade C. ausdehnte, so würde alsdann der Raum

$$v' = v\,(1 + \delta t)$$

und die Vermehrung desselben $= v\delta t$ werden, also das Quecksilber um eine dieser Grösse proportionale Menge Theilstriche herabsinken.

Dehnt sich dann ferner das Quecksilber von 0° C. an gerechnet um t Grade C. aus, und wird sein Volumen dadurch um n Theile der Skale vermehrt, vorausgesetzt, dass sich der weiter durch das Quecksilber ausgefüllte Raum im Innern des Röhrchens auf gleiche Weise als das ganze Röhrchen ausdehnt; so ist der vom Quecksilber erfüllte Raum dann

$$v\delta t + nk\,(1 + \delta t)$$

Es ist aber das Volumen des von 0° C. bis t Grade C. ausgedehnten Quecksilbers

$$v\,d\,t$$

und es folgt also, dass

$$1) \qquad v\delta t + nk\,(1 + \delta t) = vdt$$

seyn muss, aus welcher Gleichung sowohl die Ausdehnung des Quecksilbers, als auch die des Glases gefunden werden kann, wenn man eine dieser beiden Grössen als bekannt voraussetzt. Indem aber oben schon gesagt ist, dass die Ausdehnung des Quecksilbers für 1° C. zwischen den beiden festen Puncten des Thermometers nach Dulong und Petit $= \frac{1}{5550}$ seines Volumens $= d$ angenommen sey, so liess sich die kubische Ausdehnung des Glases nach dieser Formel mit grösster Schärfe finden, nachdem zuvor die Werthe für ν und k mit der erforderlichen Genauigkeit ausgemittelt waren.

Ist demnach das Gewicht des gesammten in der Messröhre enthaltenen
Quecksilbers bei 0° C. . . . . P
das Gewicht eines Cubik-Centimeters Quecksilbers gleichfalls bei 0°C. . γ
(welche letztere Grösse übrigens bei der Berechnung von selbst wegfällt, so dass die Genauigkeit ihrer Bestimmung nicht in Betrachtung kommt), so ist

$$\nu = \frac{P}{\gamma}.$$

Es seyen ferner aus der Röhre herausgenommen
Theile des Quecksilbers . . . . m
deren Gewicht betrage . . . . p
so ist

$$k = \frac{p}{m\gamma}$$

und um zu finden, den wievielsten Theil des ganzen Volumens diese Grösse ausmache, oder wie oft k in ν enthalten sey, dient die Gleichung

$$\frac{\nu}{k} = \frac{P}{\gamma} : \frac{p}{m\gamma} = \frac{Pm}{p}$$

Es sey der Kürze wegen $\frac{Pm}{p} = a$; so ist

$$\nu = ak$$

und aus der Gleichung 1 wird

$$ak\delta t + nk\,(1 + \delta t) = akdt$$

oder

$$a\delta t + n\delta t = adt - n$$

folglich

2) $$\delta = \frac{adt - n}{t\,(a + n)}$$

Für das Röhrchen A wurde bei der zweiten Abwägung gefunden:

Das Gewicht der Glasröhre mit dem in ihr enthaltenen
Quecksilber . . . . 74121 Milligrammes
das Gewicht des Quecksilbers für sich gewogen . . . 54861 ——
das Gewicht der Röhre . . . . 19260 ——

Beide zusammen addirt geben genau die erstere Grösse und die Wägungen waren daher als völlig scharf anzusehen. Die erste Wägung hatte eine Differenz von — 3 Milligrammes gegeben, an sich zwar nicht gross, allein für unseren Zweck doch zu bedeutend, welches uns dann zu einer Wiederholung des Abwägens vermogte, die nichts Geringeres als ein abermaliges Füllen und Auskochen des Röhrchens erforderte. Beim Eispuncte stand das Quecksilber anfangs
auf . . . . 106,9 Theilstriche
in siedendem Wasser auf . . . . 194,6 ——
nach herausgenommenem Antheile Quecksilbers zeigte die
Skale beim Eispuncte . . . . 8,2 ——
beim Siedepuncte . . . . 94,4 ——
Die herausgenommene Quantität Quecksilber wog . . . . 946 Milligrammes.

Hiernach ist der Werth

$$m = 106{,}9 - 8{,}2 = 98{,}7$$

und wenn man den Werth von k, oder den Inhalt des Raumes im Röhrchen zwischen zwei Theilstrichen, nach dem Gewichte des Quecksilbers bei 0°C. ausdrücken will, so ist

$$k = \frac{p}{m} = \frac{946}{98{,}7} = 9{,}5846 \text{ Milligr.}$$

Soll der Werth von k aber im Raummaasse ausgedrückt werden und nimmt man mit Biot *) an, dass ein Cubik-Centimeter Quecksilber bei 0° C. 13597,19 Milligramme $= \gamma$ wiegt, so betrug der Cubik-Inhalt jenes Raumes

$$k = \frac{p}{m\gamma} = \frac{9{,}5846}{13597{,}19} = 0{,}000704896 \text{ Cubik-Centimeter,}$$

---

*) Traité de Physique math. et expérimentale. Tom. I. pag. 406.

oder nahe 0,7 Cubik-Millimeter; und es lässt sich daneben leicht das Verhältniss eines solchen genannten Theiles zum Ganzen, nämlich

$$\frac{k}{v} = \frac{9{,}5846}{54861} = \frac{1}{5724}$$

finden, woraus dann folgt, dass unter der Voraussetzung, es seyen die Zehntheile der Abtheilungen richtig geschätzt, oder es reiche die genaue Beobachtung bis an ein solches Zehntheil, die Fehlergrenze ein Funfzigtausendstel oder genauer 0,00017471 des Ganzen betragen würde.

Aus dem oben angegebenen Werthe von $m = 98{,}7$ und den bekannten Grössen $\boldsymbol{P}$ und p findet man

$$a = \frac{Pm}{p} = \frac{54861 + 98{,}7}{946} = 5723{,}8696617336 \ldots$$

für die gemessene Ausdehnung des Quecksilbers von 0° bis 100° C. vor Herausnahme eines Theiles dieses Metalles, und für diese Messung nachher, als 946 Mgr. Quecksilber herausgenommen waren, mithin $\boldsymbol{P} = 54861 - 946 = 53915$ Mgr. betrug, ist

$$a = \frac{P'm}{p} = \frac{53915 + 98{,}7}{946} = 5625{,}1696617336 \ldots$$

Soll dann für beide Werthe von a die Ausdehnung des Glases aus der Ausdehnung des Quecksilbers zwischen den beiden festen Puncten des Thermometers nach der Formel Nr. 2 berechnet werden, so ist für die eine Beobachtung des Standes im Messröhrchen bei 0° und 100° C.

$$a = 5723{,}8696617336$$

$$n = 87{,}7$$

$$t = 100$$

$$\delta = \frac{103{,}132786697 - 87{,}7}{100 + 5811{,}5696617336} = 0{,}0000265552$$

für die andere dagegen

$$a = 5625{,}1696617336 \ldots$$

$$n = 86{,}2$$

$$t = 100$$

$$\delta = \frac{101{,}354408319 - 86{,}2}{100 + 5711{,}3696617336} = 0{,}0000265337$$

und das arithmetische Mittel aus beiden giebt also die kubische Ausdehnung des Glases für 1° C., das Volumen desselben bei 0° C. = 1 gesetzt

$$\delta = 0{,}0000265445$$

Dieser Werth weicht von den anderweitig gefundenen Bestimmungen nur unbedeutend ab, denn die lineare Ausdehnung beträgt hiernach 0,0000088481. Es fanden aber Lavoisier und de La Place für gemeines weisses Glas im Mittel aus drei Versuchen 0,0000089694, welches um 0,0000001213 grösser ist; Dulong und Petit fanden 0,0000086100, welches um 0,0000002381 kleiner ist. Nimmt man aus beiden Werthen das Mittel, so beträgt dieses 0,0000087897, welches um 0,0000000584 kleiner ist. Grösser ist dagegen die Abweichung von denjenigen Resultaten, welche v. Horner durch seine Versuche fand. Das arithmetische Mittel aus vier, wenig von einander abweichenden, Resultaten dieses Beobachters ist nämlich 0,0000091900 mithin um 0,0000003419 grösser *).

Die Messröhre *B* ist zwar aus der nämlichen Glassorte geblasen, als die eben untersuchte *A*, und beide Massen sind vermuthlich aus dem nämlichen Tiegel genommen; weil aber das Glas nach der Art seiner Abkühlung, der jedesmaligen Dicke und andern darauf einfliessenden Umständen leicht einen kleinen Unterschied seiner Ausdehnung zeigt, wir ausserdem zwar das oben in der Anmerkung pag. 254 näher beschriebene Mittel schon kennen gelernt hatten, den Frostpunct völlig genau zu finden, die Bestimmung des Siedepunctes aber einigen Schwierigkeiten unterliegt, sobald es auf absolute Genauigkeit mit Vermeidung sehr kleiner Fehler ankommt, und wir ausserdem aus mehreren Beobachtungen gern ein möglichst richtiges Mittel zu erhalten, daneben aber zugleich die Grenze kennen lernen wollten, bis zu welcher die einzeln erhaltenen Werthe mit einander übereinstimmten; so wählten wir zur Bestimmung der Grösse der Ausdehnung, welche dem Glase des Röhrchens *B* eigen seyn möchte, eine etwas andere Methode. Wir bestimmten zuvörderst den Punct des schmelzenden Schnees auf das genaueste, maassen dann die Stände des Quecksilbers im Röhrchen bei zunehmender Wärme von 10 zu 10 Graden C., und weil die Skale an diesem Apparate zu kurz war, als dass wir mit demselben zwei Paare Frost- und Siede-Puncte, einmal vor und das andere Mal nach Herausnahme von Quecksilber erhalten konnten, indem die Länge der Skale nicht einmal die Ausdehnung des Quecksilbers zwischen den beiden festen Puncten des Thermometers umfasste, so bestimmten wir den einen Frostpunct als das Röhrchen fast ganz gefüllt war, nahmen dann eine bedeutend lange Quecksilbersäule heraus, wogen diese, und bestimmten den zweiten Frostpunct, um hieraus den Werth von *k* zu finden. Nur gelegentlich mag hier bemerkt werden, dass wir zur Controle des hierdurch erhaltenen Werthes von *k* später die blosse Glasröhre wieder mit dem erforderlichen Theile des ausgeleerten Quecksilbers füllten, in Schnee bis auf den Nullpunct des Thermometers abkühlten, die Länge dieser Säule massen und das erhaltene Quecksilber wogen. Beide erhaltene Resultate wichen aber nicht von einander ab, weswegen ich hier nur das eine derselben mittheile.

---

*) S. Gehler's physikalisches Wörterbuch, neue Ausgabe. Th. 1. p. 585.

Es war also bei dem Röhrchen *B*

das Gewicht desselben mit Inbegriff des Quecksilbers .	142528,75	Milligr.
das Gewicht des Quecksilbers allein	125345	——
das Gewicht des leeren Röhrchens	17183	——

Die Summe der beiden letzten Grössen weicht von der ersten um eine so unbedeutende Kleinigkeit ab, dass die Differenz füglich vernachlässigt werden kann.

Das Gewicht des herausgenommenen Quecksilbers betrug . .	1755	Milligr.
der Eispunct vor dem herausgenommenen Quecksilber war bei	190,85	——
der Eispunct nach herausgenommenem Quecksilber bei . .	23,45	——

Hieraus ergaben sich also für *m* 167,4 Theilstriche der Skale des Röhrchens. Aus diesen Grössen folgt nach der oben angegebenen Berechnungsart der Werth von

$$a = \frac{125345 + 167,4}{1755} = 11955,9846153857 \cdots\cdot$$

Um die Ausdehnung des Glases $= \delta$ zu finden, mussten die für t, t', t''... gehörigen Werthe von n, n', n''... durch Beobachtung gesucht werden. Nachstehende tabellarische Uebersicht enthält diese und die daraus berechneten Werthe für δ:

t in Cent. Graden.	Stand des Quecksilbers in der Röhre.	Werth von p.	Berechneter Werth von δ.
0	23,45	——	——
10	41,75	18,30	0,0000270781
20	60,05	36,60	0,0000270359
30	78,40	54,95	0,0000268559
40	96,65	73,20	0,0000269537
50	114,90	91,45	0,0000269959
60	133,30	109,85	0,0000268028
70	151,50	128,05	0,0000268905

Das arithmetische Mittel aus allen diesen Werthen ist $\delta = 0{,}0000269446$... und die grössten Abweichungen von diesem betragen nicht mehr als $+0{,}0000001335$ und $-0{,}0000001418$. Beide gegen einander aufgehoben, lassen eine Differenz $= -0{,}0000000083$. Das Maximum des Unterschiedes oder der grösste Werth mit dem kleinsten verglichen, beträgt nur 0,0000002753. Wird der auf diese Weise gefundene Werth für die kubische Ausdehnung des Glases wie oben mit den Bestimmungen anderer Physiker verglichen, so ergeben sich folgende Unterschiede. Die lineare Ausdehnung des Glases ist nach der hier erhaltenen Bestimmung der kubischen $= 0{,}0000089815$. Diese mit den Versuchen von Lavoisier und La Place verglichen, giebt einen Unterschied $= +0{,}0000000121$ von Dulong und Petit $= +0{,}0000003715$; von v. Horner $= -0{,}000002081$. Das arithmetische Mittel aus allen dreien beträgt 0,000089231, wovon unsere Bestimmung um $+0{,}0000000583$ abweicht. Da die von uns gefundene Grösse sowohl nach der Art zu experimentiren, als auch nach der Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe auf einen so hohen Grad der Genauigkeit Anspruch machen kann, unter der Voraussetzung, dass die Ausdehnung des Quecksilbers durch Dulong und Petit vollkommen genau gefunden sey, so folgt, dass die durch v. Horner gefundenen Werthe zu gross, der durch Dulong und Petit gefundene zu klein sind, die durch Lavoisier und La Place erhaltenen aber der Wahrheit am nächsten kommen [2]. Wird endlich die zuletzt gefundene Grösse mit derjenigen verglichen, welche unsere früheren Versuche gaben, so ist der Unterschied zwischen beiden nicht sehr bedeutend, und kann leicht aus einer Differenz beider Glasarten abgeleitet werden, indess ist es durchaus nicht zweifelhaft und auch oben schon zugestanden, dass die letzte Bestimmung bei weitem die zuverlässigste sey. Weil es uns aber besser schien, bei der Berechnung unserer gemachten Beobachtungen uns strenge an die Ergebnisse der Versuche zu halten und die constante Differenz zwischen den für jedes der beiden Röhr-

---

Anm. 2. Ist es erlaubt, auf diese Betrachtungen rückwärts geschlossen, ein Urtheil über die Genauigkeit zu fällen, womit die Ausdehnung des Quecksilbers durch Dulong und Petit gefunden ist, so fällt dieses sehr günstig aus. Die Formel, wonach δ gefunden ist, ergiebt nämlich, dass der Werth hiervon mit der Zunahme von d (der Grösse, um welche sich das Quecksilber ausdehnt) wächst. Wollte man nun annehmen, abgesehen von der Uebereinstimmung des aus unseren Beobachtungen gefundenen Werthes für δ mit demjenigen, welchen die genannten Gelehrten erhalten haben, dass Dulong und Petit die Ausdehnung des Quecksilbers zu klein gefunden hätten und daher den Factor d vergrössern, so würde die durch uns gefundene Bestimmung für die Ausdehnung des Glases noch weniger mit der durch Dulong und Petit erhaltenen übereinstimmen, welches um so weniger anzunehmen ist, da die genauen Beobachter Smeaton und Roy noch kleinere Werthe hierfür auffanden. Wollte man dagegen den Factor d noch mehr verkleinern, so würde der Werth von δ gleichfalls geringer werden, und von den durch v. Horner, Lavoisier und La Place gefundenen zu sehr abweichen, mehr als sich nach Wahrscheinlichkeitsgründen annehmen lässt. Dass übrigens die Ausdehnung des Glases nach unsern Versuchen etwas geringer ist, als sie von den genannten Gelehrten gefunden wurde, beweiset mehr für die Richtigkeit der Angabe als gegen dieselbe, denn auch Sabine (s. An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth u. s. w. London 1826. 4. p. 207) fand durch seine höchst feinen Versuche aus den Schwingungen eines Pendels in verschiedenen Temperaturen die Ausdehnung des Messings geringer als Smeaton, Lavoisier, Roy und Horner sie gefunden haben. Auf allem Fall hege ich die Ueberzeugung, dass die von uns auf die angegebene Weise gefundene Ausdehnung dieser individuellen Glassorte auf den höchsten Grad der Genauigkeit Anspruch machen darf.

chen gefundenen Werthen für die Ausdehnung des Glases auf das Gesetz der Ausdehnung der Flüssigkeiten kaum einen messbaren Einfluss hat, so schien es uns am zweckmässigsten, bei der Berechnung der Beobachtungen mit beiden Apparaten die für einen jeden derselben gefundene Ausdehnung in Rechnung zu nehmen. Die Wichtigkeit einer genauen Bestimmung der Ausdehnung des Glases durch Wärme wird übrigens die Ausführlichkeit dieser Untersuchung entschuldigen.

Ausdehnung der Flüssigkeiten.

Wenn die Ausdehnung des Glases genau bekannt ist, so lässt sich die Ausdehnung der in gläsernen Messröhren eingeschlossenen Flüssigkeiten vermittelst der oben unter Nr. 1 gegebenen Formel leicht finden. Man darf zu diesem Ende nur die daselbst für die Ausdehnung des Quecksilbers gewählte Bezeichnung $= d$ auf die übrigen zu untersuchenden Flüssigkeiten übertragen, dieses als unbekannt ansehen, und aus den durch die Beobachtungen bekannten Werthen von v, t, k und n finden. Soll indess dieses geschehen, so darf die Masse der Flüssigkeit, welche in der Formel durch v ausgedrückt ist, ihren Werth nicht ändern, indem dieser bekanntlich bei 0° Temperatur bestimmt ist, für jede andere Temperatur aber ein anderer wird, welche Aenderung eben durch die Versuche ausgemittelt werden soll. Es ist aber schon oben bemerkt, dass bei den verhältnissmässig für die Weite der Röhrchen grossen Kugeln übermässig lange Röhrchen erforderlich gewesen wären, wenn die Ausdehnungen der Flüssigkeiten vermittelst derselben von den niedrigsten bis zu den höchsten Temperaturen ohne Weiteres hätten gefunden werden sollen, und es war daher erforderlich, wenn die durch Temperatur-Erhöhung ausgedehnte Flüssigkeit im Röhrchen einen zu hohen Stand erreicht hatte, einen Theil derselben herauszunehmen und die Beobachtungen am untern Ende des Skale wieder anzufangen und fortzusetzen. Bei einigen Flüssigkeiten geschah dieses Herausnehmen zu wiederholten Malen, im Allgemeinen desto öfterer, je stärker die Flüssigkeiten durch Wärme ausgedehnt wurden, und je grösser der Inhalt der Kugel im Verhältniss zur Weite und Länge des Röhrchens war, ungleich häufiger also bei dem Apparate *B* als bei *A*. Es versteht sich von selbst, dass es genügend war, den Stand der Flüssigkeit, welcher im obern Ende des Röhrchens beobachtet war, bei der nämlichen Temperatur nach Herausnahme eines Theiles der Flüssigkeit am untern nochmals zu beobachten, weil sich aus der Vergleichung beider die Verminderung der Masse ergeben musste, sicherer für diese letztere Bestimmung war es indess allerdings, wenn nicht die letzte Beobachtung allein, sondern zwei oder mehrere derselben nach Herausnahme eines Theiles der Flüssigkeit wiederholt wurden. Bei einigen Flüssigkeiten ist dieses auch wirklich geschehen, wie die in der Folge mitzutheilende Uebersicht der Beobachtungen ergeben wird, woraus zugleich der Grad der Genauigkeit bei den Messungen hervorgeht; bei anderen Flüssigkeiten war dieses aber wegen ihrer zu grossen Ausdehnung nicht wohl möglich, und wir bemüheten uns daher, die beiden zusammenfallenden Beobachtungen mit möglichster Genauigkeit anzustellen. Auf welche Weise übrigens diese Veränderung der Masse zu berechnen sey, zeigt folgende Betrachtung.

Es bezeichne v das anfängliche Volumen der Flüssigkeit bei 0° C. Temperatur.

Es seyen ferner

$$v', \quad v'', \quad v''' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad v^p$$

die neuen Volumina nach jedesmaligem Herausnehmen, das bei 0° C. Temperatur als Einheit angenommen;

$$t', \quad t'', \quad t''' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad t^p$$

bezeichnen die jedesmaligen Temperaturen, bei denen ein Theil der Flüssigkeit herausgenommen wurde;

$$n', \quad n'', \quad n''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad n^p$$

bezeichnen die Theilstriche, bei denen die Flüssigkeit vor dem Herausnehmen stand;

$$m', \quad m'', \quad m''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad m^p$$

bezeichnen diejenigen Theilstriche, bei denen sie nach dem Herausnehmen stand;

$$d', \quad d'', \quad d''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad d^p$$

seyen die jenen oberen Temperaturen zugehörigen Zunahmen des Volumens, das bei 0° C. $= 1$ gesetzt.

Endlich setze man statt

$$v', \quad v'', \quad v''', \quad v'''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad v^p$$

die gleichen Werthe

$$a'k, \quad a''k, \quad a'''k, \quad a''''k \quad \ldots\ldots\ldots \quad a^pk.$$

Ist dann die Temperatur von t' auf t'' gestiegen und hat sich die Flüssigkeit dadurch um n' Theile über ihren anfänglichen Stand erhoben, so ist das neue Volumen

$$= (v + n'k)\,(1 + \delta t')$$

dieses muss aber auch seyn

$$v\,(1 + d')$$

mithin ist

$$v\,(1 + d') = (v + n'k)\,(1 + \delta t')$$

oder durch Substitution

$$a\,(1 + d') = (a + n')\,(1 + \delta t')$$

woraus

3) $$1 + d' = \frac{a + n'}{a}\,(1 + \delta t')$$

gefunden wird. Nach der Herausnahme eines Theiles der Flüssigkeit bleibt im Röhrchen zurück

$$(v + m'k)\,(1 + \delta t')$$

und dieses neue Volumen v' wächst durch Zunahme der Temperatur zu

$$v'\,(1 + d')$$

mithin ist

$$v'\,(1 + d') = (v + m'k)\,(1 + \delta t')$$

oder

$$a'\,(1 + d') = (a + m')\,(1 + \delta t')$$

und hieraus wird

$$4) \qquad a' = \frac{a + m'}{1 + d'}\,(1 + \delta t')$$

oder wenn man aus Nr. 3 den Werth für $1 + d'$ einführt

$$5) \qquad a' = \frac{a\,(a + m')}{a + n'}$$

Steigt die Temperatur bis t'', so wird auf gleiche Weise

$$v'\,(1 + d'') = (v + n''k)\,(1 + \delta t'')$$

oder

$$a'\,(1 + d'') = (a + n'')\,(1 + \delta t'')$$

also

$$6) \qquad 1 + d'' = \frac{a + n''}{a'}\,(1 + \delta t'')$$

oder aus Nr. 5 für a' substituirt

$$7) \qquad 1 + d'' = \frac{(a + n')\,(a + n'')}{a\,(a + m')}\,(1 + \delta t'')$$

Es ergiebt sich, dass auf die nämliche Weise

$$8) \qquad a'' = \frac{a + m''}{1 + d''}\,(1 + \delta t'')$$
$$= \frac{a\,(a + m')\,(a + m'')}{(a + n')\,(a + n'')}$$

und

$$9) \qquad 1 + d''' = \frac{a + n'''}{a''}\,(1 + \delta t'')$$
$$= \frac{(a + n')\,(a + n'')\,(a + n''')}{a\,(a + m')\,(a + m'')}\,(1 + \delta t''')$$

mithin ganz allgemein

$$10)\qquad a^{p-1} = \frac{a + m^{p-1}}{1 + d^{p-1}}\,(1 + \delta l^{p-1})$$

$$= \frac{a\,(a + m')\,(a + m'')\cdots(a + m^{p-1})}{(a + n')\,(a + n'')\cdots(a + n^{p-1})}$$

$$11)\qquad 1 + d^p = \frac{a + n^p}{a^{p-1}}\,(1 + \delta l^p)$$

$$= \frac{(a+n')(a+n'')(a+n''')\cdots(a+n^p)}{(a+m')(a+m'')\cdots(a+m^{p-1})}\,(1 + \delta l^p)$$

Werden nach dieser Formel bei öfter wiederholtem Herausnehmen die Werthe von d^p berechnet, so versteht sich, dass man die früher gefundenen Grössen bei der Bestimmung der nächstfolgenden stets wieder benutzen kann, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird. Soll indess $1 + d^p$ ausser der Reihe aufgefunden werden, oder auch allgemein lässt sich der angegebene Bruch in einer Reihe entwickeln. Es ist dann

$$\begin{aligned} 12)\qquad 1 + d^p = \Big[1 &+ \frac{n'}{a} \\ &+ \frac{a+n'}{a} \times \frac{n''-m'}{a+m'} \\ &+ \frac{(a+n')(a+n'')}{a\,(a+m')} \times \frac{n'''-m'''}{a+m''} \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ \frac{(a+n')(a+n'')\cdots(a+n^{p-1})}{a\,(a+m')\cdots\cdots(a+m^{p-2})} \times \frac{n^p-m^{p-1}}{a+m^{p-1}}\Big]\,(1 + \delta l^p). \end{aligned}$$

---

1) *Ausdehnung des reinen Wassers.*

Nachdem erst neuerdings das Gesetz der Ausdehnung des Wassers durch Hällström untersucht und in der oben erwähnten Abhandlung bekannt gemacht ist, könnte es überflüssig scheinen, diesen Gegenstand noch einmal einer neuen Prüfung zu unterwerfen. Weil sich indess gegen jene Versuche, ihrer hohen Genauigkeit ungeachtet, noch immer bedeutende Zweifel aufstellen lassen, die genaue Kenntniss der Ausdehnung des Wassers durch Wärme aber in der Physik von ganz vorzüglicher Wichtigkeit ist, so haben wir gerade auf diese Flüssigkeit einen ungewöhnlichen Grad von Mühe und Sorgfalt verwandt. Vier Reihen von Beobachtungen wurden gemacht, je zwei mit jedem der beiden Messröhrchen, deren Resultate hier nach einander mitgetheilt werden sollen, theils der Vollständigkeit wegen, theils um den Grad der auf sie verwandten Sorgfalt zu prüfen. Inzwischen verdient die eine Reihe vor den übrigen vielleicht einen Vorzug, weil die ihr zugehörigen Versuche erst später angestellt wurden, als wir die vielfachen zu berücksichtigenden Nebenbedingungen bereits durch anhaltende Uebung kennen und die daraus leicht entspringenden Fehler vermeiden gelernt hatten. Diese Reihe möge daher hier voranstehen, obgleich sich aus einer Vergleichung der anderen Beobachtungsreihen mit dieser, wenn eine jede nach den Differenzen der einzelnen Beobachtungen, und nach dem Gesetze des Fortganges, welches dieselben befolgen, geprüft wird, das Resultat herausstellt, dass auch diese auf einen hohen Grad der Genauigkeit Anspruch machen können, und jener kaum merklich nachstehen, ausser vielleicht bei den niederen Temperaturen. Jene voranstehende Reihe von Beobachtungen hat ausserdem insofern einen Vorzug, als sie mit der Röhre B erhalten wurde, deren grössere Kugel mehr Wasser fasste, so dass daher gleichen Temperaturunterschieden mehrere Grade der Skale zugehörten, wodurch die Fehlergrenze kleiner wurde; dagegen musste aber auch öfter Wasser herausgenommen werden, welches die Beobachtungen etwas erschwerte.

Weil nämlich die Kugel der Röhre B verhältnissmässig gegen die Länge des Rohres gross ist, so musste dreimal Wasser herausgenommen werden. Dieses wurde leicht bewerkstelligt, indem wir die Kugel stärker erhitzten, das oben auslaufende Wasser rein abtrockneten, und dann die zwei letzten Beobachtungen sorgfältig wiederholten, um die Menge der herausgenommenen Flüssigkeit hierdurch auf das genaueste bestimmen zu können. Ein anderes leichtes Mittel bestand darin, dass wir vorzüglich bei den Versuchen in höheren Temperaturen die Flüssigkeit soweit erkalten liessen, bis eine kleine Luftblase von verhältnissmässiger Grösse in die Kugel drang, und beim Wiedererhitzen die erforderliche Menge der Flüssigkeit vor sich her aus dem Röhrchen trieb. Diese letztere Methode wurde hauptsächlich bei den Säuren und beim Mandelöle in den höheren Temperaturen angewandt. Um endlich die Uebersicht und die Controle der Berechnung zu erleichtern, sind die beobachteten und berechneten Grössen neben einander gestellt. Man findet nämlich vor der Herausnahme das bei 0° C. als Einheit angenommene und durch Erhöhung der Temperatur um die Grösse $\pm d'$ vermehrte oder verminderte Volumen nach der oben angegebenen Formel 3, indem $1 + d' = \left(1 + \frac{n'}{a}\right) \left(1 + \delta t'\right)$ ist. Nach der ersten Herausnahme wird auf gleiche Weise das um die Grösse d'' vermehrte Volumen nach der Formel 7 gefunden, indem $1 + d'' = \frac{(a + n')\,(a + n'')}{a\,(a + m')}\,(1 + \delta t'')$ ist, nach der zweiten aber giebt die Formel 9 das Volumen und so giebt allgemein für jede folgende Herausnahme die Formel 11 oder 12 das gesuchte Volumen. Die erstere ist für fortlaufende Berechnungen die bequemste und daher hier gewählt. In der nachfolgenden Tabelle bezeichnet also t die Temperatur nach Centesimalgraden, d die abgelesene Zahl der Theilstriche, n die Vermehrung oder Verminderung derselben über oder unter den ursprünglichen Stand, δ den Coefficienten für die Ausdehnung des Glases, welcher nach der oben mitgetheilten Berechnung für die Röhre $B = 0{,}0000269446$ gefunden wurde; a endlich ist die aus dem Quecksilbergewichte bestimmte Einheit, nämlich 11955,9846153857 Milligr. und weil der Stand des gewogenen Quecksilbers bei 0° C. = 23,45 Theilstriche war, der Anfang der Beobachtung mit Wasser aber bei 30,6 gemacht wurde, so ist $a = 11955{,}9846153857\cdots + 7{,}15$ also $= 11963{,}1346153857$. Nach der ersten Herausnahme war der Stand bei 55° C. = 16,6 Theilstriche der Messröhre, folglich $m' = -14$; $a + m' = 11949{,}1346153857 \cdot \frac{a + n'}{a} \times \frac{1}{(a + m')} = \frac{1{,}0124298526}{11949{,}1346153857} = 0{,}00008472830$,

mithin ist das neue Volumen

$$1 + d'' = \left(1 + \frac{n'}{a} + \frac{a + n'}{a\,(a + m')} \times (n'' - m')\right) \times (1 + \delta t'')$$

Nach der zweiten Herausnahme war der niedrigste Stand bei 75° C. $= 39{,}4$; folglich $m'' = 8{,}8$; also

$$a + m' = 11971{,}9346153857$$

$$1 + \frac{n'}{a} + \frac{a + n'}{a\,(a + m')} \times \frac{n'' - m'}{a + m''} = \frac{1{,}0228513499}{11971{,}9346153857}$$

$$= 0{,}000085437432$$

und das Volumen wird wie oben nach der Formel 9 oder 11 gefunden.

Nach der dritten Herausnahme war der niedrigste Stand bei 85° C. $= 68{,}8$ und also ist $m''' = 38{,}2$.

$$a + m''' = 12001{,}3346153857$$

$$\frac{(a + n')\,(a + n'')\,(a + n''')}{a\,(a + m')\,(a + m'')\,(a + m''')} = \frac{1{,}0289438398}{12001{,}3346153857}$$

$$= 0{,}000085735776$$

Die Beobachtungen nach der letzten Herausnahme wurden von oben herab abwärts angestellt, indem das Röhrchen lange in siedendem Wasser erhalten wurde, wobei wir nur eine Kleinigkeit des in demselben enthaltenen Wassers herausnahmen, dann den Stand bemerkten und hernach die Temperatur herabsinken liessen, um die niederen Stände mit den früher beobachteten vergleichbar zu erhalten. Weil gerade das Barometer nicht völlig auf 28 par. Zoll stand, an der genauen Bestimmung bei der Temperatur des siedenden Wassers aber viel gelegen war, so setzten wir dem Wasser des Gefässes, worin das Röhrchen erwärmt wurde, so lange etwas liquiden salzsauren Kalk zu, bis das eingesenkte Thermometer genau den Siedepunct zeigte.

Die Beobachtungen bei den höchsten Temperaturen waren ausnehmend schwierig, theils weil das Wasser im Topfe der steten Verdunstung wegen und bei dem nothwendigen unablässigen Rühren nur mit Mühe eine hinlängliche Zeit hindurch auf der erforderlichen Temperatur erhalten werden konnte, hauptsächlich aber deswegen, weil beide Skalen, sowohl die des Thermometers als auch die der Messröhre, mit den verdichteten Wasserdämpfen so stark belegt wurden, dass sie in dem obendrein sie umgebenden Dunste bei ihrer Feinheit nur mit grosser Schwierigkeit genau abgelesen werden konnten. Um aber auch hierbei den erreichten Grad der Genauigkeit zu beurkunden, stelle ich die zusammengehörigen Beobachtungen beider Versuchsreihen, vor und nach der Herausnahme, nebeneinander

a 1) $t = 80^\circ$ $v = 1{,}0289875517$
b 2) $t = 80^\circ$ $v = 1{,}0281017741$
a 3) $t = 90^\circ$ $v = 1{,}0347698157$
b 4) $t = 90^\circ$ $v = 1{,}0348263069$
a 5) $t = 95^\circ$ $v = 1{,}0385321397$
b 6) $t = 95^\circ$ $v = 1{,}0383131481$

Der Werth in Nr. 1 ist zu gross und wurde als solcher auch gleich anfangs im Protocole notirt, indess wollten wir uns nicht länger dabei aufhalten, weil wir die nämliche Beobachtung doch noch einmal erhalten mussten, indem wir der Sicherheit wegen es vorzogen, wieder von 75° anzufangen, um die zweifelhafte Beobachtung zu controliren; indess habe ich die erste Beobachtung deswegen in der nachfolgenden Tabelle nicht aufgenommen. Die Vergleichung der vier letzten Grössen zeigt, dass keine von beiden Reihen mit einem constanten Fehler behaftet ist, denn ihre Abweichungen sind einander entgegengesetzt. Da sich also nicht ausmitteln lässt, welcher Reihe der Vorzug gebührt, so habe ich die erstere beibehalten, weil die längsten Reihen die grösste Genauigkeit versprechen, und aus der letzten bloss die Bestimmung für den Siedepunct aufgenommen.

Um endlich die in dieser und den mehreren nachfolgenden Tabellen vorkommenden Columnen rücksichtlich der enthaltenen Zahlenwerthe bequemer zu bezeichnen, bemerkte ich hier noch, dass $1 + \frac{n'}{a} = A'$

$$A' + \frac{a + n'}{a\,(a + m')}\,(n'' - m') = A''$$

$$A'' + \frac{(a + n')(a + n'')}{a\,(a + m')(a + m'')}\,(n''' - m'') = A'''$$

$$A''' + \frac{(a + n')(a + n'')(a + n''')}{a\,(a + m')(a + m'')(a + m''')}\,(n'''' - m''') = A''''$$

u. s. w. gesetzt ist. Die übrigen Bezeichnungen der Tabelle sind oben angegeben

$t' =$	θ'	$n' =$	$1 + \frac{n'}{a} = A'$	$1 + \delta t'$	Volumen.
0	30,6	0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
1	29,6	— 1,0	0,9999164098	1,0000269446	0,9999433517
2	28,8	— 1,8	0,9998495461	1,0000538892	0,9999034267
3	28,3	— 2,3	0,9998077426	1,0000808338	0,9998885604
4	27,9	— 2,7	0,9997743066	1,0001077784	0,9998820603
5	27,6	— 3,0	0,9997492296	1,0001347230	0,9998839194
6	27,7	— 2,9	0,9997575886	1,0001616676	0,9999192266
7	27,8	— 2,8	0,9997659476	1,0001886122	0,9999545119
8	28,2	— 2,4	0,9997993836	1,0002155568	1,0000148964
9	28,6	— 2,0	0,9998328197	1,0002425014	1,0000752801
10	29,2	— 1,4	0,9998829739	1,0002694460	1,0001523893
11	30,0	— 0,6	0,9999498436	1,0002963906	1,0002462188
12	31,0	+ 0,4	1,0000334360	1,0003233352	1,0003567817
13	32,15	1,55	1,0001295647	1,0003502798	1,0004798896
14	33,4	2,8	1,0002340523	1,0003772244	1,0006113648
15	34,8	4,2	1,0003510785	1,0004041690	1,0007553893
16	36,3	5,7	1,0004764637	1,0004311136	1,0009077823
17	38,0	7,4	1,0006185669	1,0004580582	1,0010769083
18	39,8	9,2	1,0007690292	1,0004850028	1,0012544039
19	41,8	11,2	1,0009362094	1,0005119474	1,0014486359
20	43,9	13,3	1,0011117487	1,0005388920	1,0016512394
21	46,0	15,4	1,0012872880	1,0005658366	1,0018538527
22	48,3	17,7	1,0014795453	1,0005927812	1,0020732031
23	50,8	20,2	1,0016885206	1,0006197258	1,0023092925
24	53,4	22,8	1,0019058550	1,0006466704	1,0025538399
25	56,2	25,6	1,0021399073	1,0006736150	1,0028149635
26	58,8	28,2	1,0023572417	1,0007005596	1,0030594525
27	61,6	31,0	1,0025912949	1,0007275042	1,0033206840
28	64,6	34,0	1,0028420645	1,0007544488	1,0035986573
29	67,7	37,1	1,0031011939	1,0007813934	1,0038850102
30	71,0	40,4	1,0033770413	1,0008083380	1,0041881089
31	74,2	43,6	1,0036445297	1,0008352826	1,0044828553
32	77,6	47,0	1,0039287362	1,0008622272	1,0047943504
33	81,0	50,4	1,0042129426	1,0008891718	1,0051058601
35	87,2	56,6	1,0047312014	1,0009430610	1,0056787239
40	106,4	75,8	1,0063361319	1,0010777840	1,0074207447
45	128,4	97,8	1,0081751149	1,0012125070	1,0093975340

$t' =$	θ'	$n' =$	$1 + \frac{n'}{a} = A'$	$1 + \delta t'$	Volumen.
50	152,2	+121,6	1,0101645600	1,0013472300	1,0115254837
55	179,3	148,7	1,0124298526	1,0014819530	1,0139302246
t''	ϑ''	$n'' - m'$	$A' + \frac{a+n}{a(a+m)}(n''-m')$	$1 + \delta t''$	Volumen.
60	45,8	29,2	1,0149038353	1,0016166760	1,0165446056
65	75,8	59,2	1,0174456843	1,0017513990	1,0192276373
70	107,0	80,4	1,0192419234	1,0018861220	1,0211643377
75	139,6	123,0	1,0228513499	1,0020208450	1,0249183698
t'''	ϑ'''	$n''' - m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumen.
80	73,8	34,4	1,0258903975	1,0021555680	1,0281017741
85	110,7	71,3	1,0289438398	1,0022902910	1,0312996188
90	149,6	110,2	1,0322665549	1,0024250140	1,0347698157
95	191,9	152,5	1,0358805582	1,0025597370	1,0385321397
100	189,3	120,5	1,0392740008	1,0026944600	1,0420752830

Die zweite Reihe von Beobachtungen, welche mit dem Messröhrchen A angestellt wurde, steht an Genauigkeit der hier mitgetheilten wenig nach, auf allen Fall nur rücksichtlich der wegen der kleineren Kugel auch verhältnissmässig kürzeren Skale. Inzwischen giebt dieses nur verschiedene Differenzen der einzelnen Beobachtungen, die sich im Ganzen aber wieder ausgleichen. Die Art der Berechnung ist dieselbe wie oben, und nur zu bemerken, dass für diese die Ausdehnung des Glases so genommen wurde, wie die beiden angegebenen Versuche mit dieser Röhre sie gegeben haben. Es ist also

$$a = 5625{,}16966173336$$

und weil der Gefrierpunct des Quecksilbers bei 8,2 Theilstrichen bestimmt war, das Wasser aber 12,2 zeigte, so ist

$$a = 5629{,}16966173336$$

$$\delta = 0{,}0000265445$$

Die Herausnahme des Wassers geschah nur einmal bei 75° C. Dabei war

$$m' = 92{,}3$$

$$\frac{a + n'}{a\,(a + m')} = 0{,}00017879403$$

Um die Genauigkeit der Beobachtungen besser zu beurtheilen, will ich aus beiden Reihen die correspondirenden Beobachtungen zusammenstellen:

a) $t = 80$ $v = 1{,}02807936$
b) $t = 80$ $v = 1{,}02915456$
a) $t = 85$ $v = 1{,}03158061$
b) $t = 85$ $v = 1{,}03155002$
a) $t = 90$ $v = 1{,}03488690$
b) $t = 90$ $v = 1{,}03494872$

Die Unterschiede sind an sich unbedeutend und bald positiv, bald negativ, so dass keine Reihe mit einem constanten Fehler behaftet seyn kann. Es schien mir daher am sichersten, die erste Reihe, so weit sie reichte, beizubehalten.

t'	θ	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
0	12,2	0,00	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
1	11,85	— 0,35	0,9999378239	1,0000265445	0,9999643955
2	11,5	— 0,7	0,9998756478	1,0000530890	0,9999287301
3	11,1	— 1,1	0,9998046071	1,0000796335	0,9998842250
4	10,9	— 1,3	0,9997690601	1,0001061780	0,9998752116
5	10,9	— 1,3	0,9997690601	1,0001327225	0,9999017492
6	10,8	— 1,4	0,9997512955	1,0001592670	0,9999105358
7	10,95	— 1,25	0,9997779423	1,0001858115	0,9999637423
8	11,0	— 1,2	0,9997867247	1,0002123560	0,9999991337
9	11,1	— 1,1	0,9998046071	1,0002389005	1,0000434679
10	11,3	— 0,9	0,9998401186	1,0002654450	1,0001055261
11	11,8	— 0,4	0,9999289427	1,0002919895	1,0002209308
12	12,3	+ 0,1	1,0000177641	1,0003185340	1,0003363033
13	12,9	0,7	1,0001243522	1,0003450785	1,0004694732
14	13,5	1,3	1,0002309399	1,0003716220	1,0006026567
15	13,95	1,75	1,0003108806	1,0003981675	1,0007091708
20	18,0	5,8	1,0010303473	1,0005308900	1,0015689900
25	24,0	11,8	1,0020962238	1,0006636125	1,0027612273
30	31,0	18,8	1,0033397465	1,0007963350	1,0041387392
35	38,9	26,7	1,0047431512	1,0009290576	1,0056766154
40	48,6	36,4	1,0064663178	1,0010617800	1,0075349626

t	θ	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t$	Volumen.
45	58,7	+ 46,5	1,0082605433	1,0011945025	1,0094649129
50	70,4	58,2	1,0103390026	1,0013272250	1,0116799498
55	83,4	71,2	1,0126484019	1,0014599475	1,0141268144
60	96,2	84,0	1,0149222718	1,0015926700	1,0165387067
65	110,2	98,0	1,0174093017	1,0017253925	1,0191647308
70	124,5	112,3	1,0199496562	1,0018581150	1,0218448399
75	141,2	129,0	1,0229163460	1,0019908375	1,0249528143
80	158,0	145,8	1,0259008000	1,0021235600	1,0280793610
85	176,9	164,7	1,0292583110	1,0022562825	1,0315806068
90	194,7	182,5	1,0324204120	1,0023890050	1,0348869290
95	175,5	71,0	1,0356107221	1,0025217275	1,0382222489
100	197,0	92,5	1,0394547937	1,0026544500	1,0422139727

Man hat verschiedene Methoden vorgeschlagen, um durch Compensation die Correction für die Ausdehnung des Glases zu vermeiden. Die einzige zweckmässige scheint mir darin zu bestehen, dass man soviel Quecksilber in die Kugel bringt, als erforderlich ist, um durch die stärkere Ausdehnung desselben diejenige des Glases aufzuheben, indem man beide einander gleichmacht. Heisst diesemnach die hierzu erforderliche Menge Quecksilbers $= y$, so ist seine Ausdehnung durch die Wärme nach den oben gewählten Bezeichnungen $= ydt$, die des Glases aber für dasjenige Volumen, welches die Flüssigkeit zusammt dem Quecksilber einnimmt $= v\delta t$. Beide müssen einander gleich seyn, wenn die positiv auf die Vermehrung des Volumens der eingeschlossenen Flüssigkeit wirkende Ausdehnung des Quecksilbers die negativ wirkende des Glases völlig aufheben soll, und hieraus findet sich $y = \frac{v\delta}{d}$.

Es ist wohl nicht zu leugnen, dass auf diese Weise die Ausdehnung solcher Flüssigkeiten mit grosser Genauigkeit gefunden werden könne, welche auf das Quecksilber nicht chemisch einwirken und im Allgemeinen lässt sich diese Methode daher mit Grunde empfehlen. Da wir übrigens schon im Besitze von zwei vorzüglich genauen Beobachtungsreihen waren, so diente diese dritte zugleich dazu, die Methode der Compensation zu prüfen. Im Ganzen stimmen die hierbei gefundenen Werthe mit den früher erhaltenen sehr genau überein, und die grössten Abweichungen zeigen sich nur bei den niedrigsten Temperaturen, welches daraus erklärlich wird, dass die verminderte Wassermasse kleinere Ausdehnungen und somit eine grössere Fehlergrenze giebt. Auf allen Fall muss man bei dieser Methode zu vermeiden suchen, dass sich an das Quecksilber keine Luft festsetze und zwischen dem Metalle und Wasser sitzen bleibe, eine Veranlassung zu Fehlern, welche übrigens bei unserer Art, das Röhrchen zu füllen, nicht stattfinden konnte.

Die numerischen Werthe zur Bestimmung von y sind oben angegeben. Es betrug nämlich das Totalgewicht des Quecksilbers im Röhrchen A bei 0° C., und wenn es bis 8,2 Theilstriche stand 53915 Mgr. $= v$; die Ausdehnung des Quecksilbers wurde $= \frac{1}{5550} = d$ vorausgesetzt, und die Ausdehnung des Glases ist $= 0,0000265445$ für das Glas dieses Röhrchens gefunden. Weil aber während der Versuche die Rechnungen so scharf nicht geführt wurden als nachher, um die günstige Zeit des Experimentirens nicht zu verlieren, so hatte sich in der letzteren Grösse ein unbedeutender Fehler eingeschlichen, indem $\delta = 0,00002655$ genommen wurde. Hiernach ist also

$$y = 53915 \times 0,00002655 : \frac{1}{5550}$$
$$= 7944,5100375$$

wofür 7945 Mgr. genommen und in das Röhrchen gebracht wurden, ehe die Füllung desselben mit destillirtem Wasser erfolgte.

Inzwischen war nunmehro nicht mehr die nämliche Quantität Wassers im Röhrchen vorhanden, wie vorher, weil das Quecksilber einen aliquoten Theil der Kugel einnahm, mithin musste auch das Verhältniss der Ausdehnung des Ganzen zum Inhalte eines Theilstriches ein anderes werden, oder mit anderen Worten, die Grösse a musste einen anderen Werth erhalten. Es befanden sich nämlich jetzt nur 53915 — 7945 = 45970 Mgr. nach dem Gewichte des Quecksilbers gerechnet im Röhrchen und es war demnach

$$a = \frac{45970 \times 98{,}7}{946} = 4796{,}2357293869.$$

Weil aber der Nullpunct bei 8,2 Theilstrichen bestimmt war, das Wasser aber bei derselben Temperatur 16 Theilstriche zeigte, so kommen noch + 7,8 hinzu, wonach also

$$a = 4804{,}0357293869$$

ist; und da der Factor $1 + \delta t'$ bei der Berechnung wegfällt, so ist das Volumen unmittelbar

$$v = 1 + \frac{n'}{a}.$$

Die folgende Tabelle giebt die durch Beobachtung und Rechnung erhaltenen Werthe, wobei aber beiläufig zu bemerken ist, dass der Siedepunct nicht mit völliger Schärfe wie bei den Versuchen mit dem Röhrchen *B* bestimmt wurde.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$
0	16,00	0	1,0000000000	15	20,00	4,00	1,0008326332
1	15,80	— 0,20	0,9999583683	20	23,60	7,60	1,0015820023
2	15,60	— 0,40	0,9999167366	25	29,2	13,2	1,0027476898
3	15,55	— 0,45	0,9999063288	30	35,9	19,9	1,0041423505
4	15,50	— 0,50	0,9998959209	35	43,4	27,4	1,0057035379
5	15,65	— 0,35	0,9999271446	40	52,0	36,0	1,0074936995
6	15,75	— 0,25	0,9999479605	45	61,5	45,5	1,0094712035
7	16,00	0,00	1,0000000000	50	72,1	56,1	1,0116776817
8	16,10	0,10	1,0000208158	55	83,8	67,8	1,0141131340
9	16,55	0,55	1,0001144870	60	95,0	79,0	1,0164445072
10	17.05	1,05	1,0002185662	65	108,1	92,1	1,0191713812
11	17,60	1,60	1,0003330533	70	120,9	104,9	1,0218358076
12	18,00	2,00	1,0004163166	75	135,7	119,7	1,0249165509
13	18,70	2,70	1,0005620274	76,25	139,6	123,6	1,0257283658
14	19,10	3,10	1,0006452907	77,50	143,0	127,0	1,0264361066

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$
78,75	146,2	130,2	1,0271022116	90,00	182,9	166,9	1,0347416236
80,00	150,4	134,0	1,0279764782	91.25	187,0	170,1	1,0354077302
81,25	154,3	138,3	1,0287882956	92,50	191,5	175,5	1,036537851
82,50	158,5	142,5	1,0296625606	93,75	195,7	179,7	1,0374060501
83,75	162,2	146,2	1,0304327463	95,00	199,6	183,6	1,0382178675
85,00	166,0	150,0	1,0312237480	96,25	204,1	188,1	1,0391545799
86,25	170,0	154,0	1,0320563812	97,50	208,7	192,7	1,0401121082
87,50	174,3	158,3	1,0329514620	98,75	213,4	197,4	1,0410904523
88,75	179,0	163,0	1,0339298061	100	217,6	201,6	1,0419647173

Wenn man die hier mitgetheilten Werthe mit denen vergleicht, welche vermittelst des Röhrchens *B* erhalten sind und aus oben angegebenen Gründen für die genauesten gelten müssen, so zeigt sich, dass sie die Ausdehnungen in den niederen Temperaturen zu gross, in den höhern zu klein geben, obgleich die Differenzen beider Reihen an sich so sehr bedeutend nicht sind, wohl aber wenn man sie mit denen vergleicht, welche eine Zusammenstellung der ohne Compensation mit dem Röhrchen *B* und dem Röhrchen *A* erhaltenen Werthe giebt. Welche Ursache die Abweichung veranlasst haben mag, ist jetzt auf keine Weise mehr auszumitteln, da die Kugel des Röhrchens zerbrochen und die zur Compensation angewandte Menge Quecksilbers nicht mehr vorhanden ist. Bei der Genauigkeit übrigens, welche wir bei allen Versuchen ohne Unterschied anwandten, bin ich geneigt, die Ursache der Abweichungen in den Bedingungen der Compensation selbst zu suchen, obgleich ich diese letztere bestimmt anzugeben nicht vermag. Noch muss ich einen Umstand erwähnen, welcher gleich anfangs etwas Auffallendes hatte, aber auf keine Weise enträthselt werden konnte. Als das Röhrchen mit Quecksilber und Wasser gehörig gefüllt war, bestimmte ich selbst den Stand des Wassers 0° C. zu 15 Theilstrichen, und beobachtete dann die Ausdehnungen von 0° C. bis 16°, worauf die einbrechende Dunkelheit uns zwang, die Versuche zu beendigen. Der Apparat blieb in einem ungeheizten Zimmer in einer Temperatur von etwa 0° C. die Nacht stehen, und als am folgenden Nachmittage die Versuche fortgesetzt werden sollten, und, wie gewöhnlich, zur grösseren Sicherheit zuvor der Stand des Wassers beim Schmelzpunct des Eises nochmals nachgesehen wurde, fanden wir ihn bei 16 Theilstrichen, vermuthlich weil in das enge Röhrchen durch irgend einen Zufall, vielleicht selbst aus dem Hütchen, womit dasselbe nach dem Gebrauche oben bedeckt wurde, ein kleines Wassertröpfchen, etwa von ein wenig Eis oder Schnee gekommen und während der Nacht herab gelaufen seyn mogte. Dieser Umstand verdient aber bemerkt zu werden, weil er uns veranlasste, die Tags vorher schon gemessenen Ausdehnungen von 0° bis 15° C. noch zwei Mal zu messen, wobei wir aber beide Male die constante Differenz von einem Theilstriche erhielten. Hiernach ist die Abweichung nicht in einer mangelhaften Genauigkeit der Experimente zu suchen.

Ehe ich versuche aus den hier mitgetheilten Resultaten der Beobachtungen das Gesetz der Ausdehnung des destillirten Wassers zu entwickeln, wird es nicht überflüssig seyn, zuvor einige allgemeine Bemerkungen voraus zu schicken, eben weil dieser Gegenstand schon oft untersucht ist, und eine abermalige Behandlung desselben daher überflüssig seyn würde, wenn sie nicht das schon Geleistete an Genauigkeit und Umfang überträfe.

1) Es sind drei Reihen von Beobachtungen mitgetheilt, welche mit zwei verschiedenen Apparaten nach nicht völlig übereinstimmenden Methoden erhalten und erst zwei Monate nach Beendigung der Versuche berechnet wurden. An den Originalbeobachtungen ist nach Wahrscheinlichkeitsgründen oder um grössere Uebereinstimmung zu erhalten nichts geändert, welches auch schon deswegen unmöglich war, weil jeder von uns dreien für sich rechnete und die Resultate nachher verglichen wurden. Werden aber die in den drei Tabellen enthaltenen Werthe mit einander verglichen, wobei ich mich nach der Reihenfolge der Bezeichnung 1ste, 2te und 3te Tabelle bedienen werde, indem die 4te kürzere bloss die Bestimmung des Punctes der grössten Dichtigkeit des Wassers betrifft,

so zeigt sich bei allen eine gewisse regelmässige Zunahme der Ausdehnungen, und das Wasser ist daher eine Flüssigkeit von ungleichmässiger, stets wachsender, Ausdehnung, wie dieses auch schon frühere Versuche ergeben haben. Einen sehr überzeugenden Beweis von der Genauigkeit der Beobachtungen geben übrigens die Extreme aller drei Reihen. Beim Siedepuncte ist nämlich das Volumen des Wassers

nach Tab. 1 = 1,0420752830
— — 2 = 1,0422139727
— — 3 = 1,0419647173
Mittel = 1,0420846576.

Von diesem Mittel weicht der geringste Werth um — 0,0000199403, der grösste um + 0,0001293151, der in Tabelle 1 enthaltene aber nur um — 0,0000093746, also nicht um $\frac{1}{100000}$ ab und bewährt sich somit als der zuverlässigste, wie dieses auch aus den angegebenen Bedingungen des Versuches zu erwarten war.

2) Bei der Untersuchung der Ausdehnung des Wassers durch Wärme hat man sich vorzüglich bemühet den Punct seiner grössten Dichtigkeit zu finden, und es ist wohl so ziemlich allgemein angenommen, dass von diesem Puncte aus nach beiden Seiten für gleiche Grade der abnehmenden und zunehmenden Temperatur die Ausdehnungen einander gleich sind. Im Ganzen haben auch wir dieses bestätigt gefunden, jedoch schien es uns bei den sehr feinen, absichtlich für diese Bestimmung angestellten, Versuchen, als wenn die Ausdehnungen über diesem Puncte schneller zunähmen, als unter demselben. Der bisher angenommene Satz kann daher noch nicht als ein fest begründetes physikalisches Gesetz gelten. Wenn übrigens ein Unterschied der Ausdehnungen nach beiden Seiten hin statt findet, so ist derselbe sehr geringe, und kann nicht anders aufgefunden werden, als wenn man das Wasser mehrere Grade unter dem Gefrierpuncte erkalten lässt und dann seine Ausdehnung findet. Diesen Versuch durften wir aber wegen der unausbleiblichen Gefahr für unseren, mit grösster Mühe und

vielem Zeitaufwande hergestellten, Apparat nicht wagen, und auf allen Fall ist die Differenz der Ausdehnung für gleiche Grade über dem Puncte der grössten Dichtigkeit des Wassers, und von diesem Puncte aus bis zum Gefrierpuncte, eine unmessbare Grösse, weswegen wir auch eine gleichmässige Ausdehnung des Wassers vom Puncte seiner grössten Dichtigkeit ausgehend nach beiden Seiten hin bei der Berechnung angenommen haben. Inzwischen wünschten wir vor allem diesen Punct der grössten Dichtigkeit völlig scharf durch unmittelbare Beobachtung zu erhalten, und weil die Correction wegen der Ausdehnung des Glases dann allezeit einige Ungewissheit zurück lassen musste, wenn er etwa zwischen zwei beobachtete Grade fiele, und die Ausdehnungen von diesem Puncte aus nach beiden Seiten ungleich seyn sollten, welches alles wir während des Experimentirens und vor angestellten Berechnungen nicht wissen konnten, so wählten wir das einfache Mittel, das Röhrchen *B* durch Quecksilber zu compensiren, dann dasselbe mit dem oben beschriebenen Thermometer von Greiner in Eiswasser zu senken, und so wie dieses in einer äusseren Temperatur von 10° C. langsam wärmer wurde, genau denjenigen Punct zu beobachten, auf welchem das Wasser im Röhrchen seinen tiefsten Stand erreicht hatte. Da das genannte Thermometer in Fünftel eines Reaumurschen Grades getheilt ist, so gab jeder Theilstrich 0,25 eines Grades der Centesimalskale an, so dass es hiernach schien, als müste der gesuchte Punct bis auf 0,125 eines Grades nach C. genau bestimmbar seyn. Allein wie viele Mühe wir uns auch bei diesen Versuchen gaben, und wie lange Zeit wir auf dieselben anwandten, so erreichten wir doch keinesweges unsern Zweck so vollkommen, als wir erwartet hatten, weil die Aenderungen des Volumens um den gesuchten Punct bei so kleinen Temperaturunterschieden so geringe waren, dass sie nur mit Mühe beobachtet werden konnten. Die hierbei angewandte Kugel war zwar im Verhältniss zu dem Kaliber des Röhrchens so gross, dass ich zu Versuchen über die Ausdehnungen der Flüssigkeiten im Ganzen nie grössere empfehlen würde; allein für die hier gesuchte specielle Bestimmung hätte sie mindestens doppelt so gross seyn können, welches dann aber andere Unbequemlichkeiten, namentlich in Betreff des Abwägers, herbeigeführt haben würde. Inzwischen hoffe ich, dass die vorliegende Frage durch die gesammten angegebenen Versuche mit genügender Gewissheit beantwortet werden kann.

Die Art, wie die zur Compensation erforderliche Menge Quecksilber bestimmt wird, ist oben beschrieben, und es genügt daher hier nur, die numerischen Werthe anzugeben. Für die Compensation des Röhrchens *B* nämlich $= y = \frac{v\delta}{d}$ ist $v = 125345$ Mgr., $\delta = 0{,}0000269446$, $d = \frac{1}{5550}$ und diesemnach

$$y = 18744{,}40842285$$

der Werth von *a*, welcher nach der Compensation aus den oben angegebenen Gründen verändert wird, ist hiernach

$$a = (125345 - 18744) \times \frac{167{,}4}{1755} = 10168{,}0953846153.$$

Weil aber der Nullpunct für das Quecksilber im Röhrchen bei 23,45 Theilstrichen gefunden war, das Wasser in demselben bei 0° C. dagegen auf 38 zeigte, so muss zu *a* noch $38 - 23{,}45 = 14{,}55$ hinzu addirt werden und es ist also

$$a = 10182{,}6453846153.$$

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten und berechneten Werthe:

t'	ϑ'	n'	$1+\frac{n'}{a}=$ Volum.	t'	ϑ'	n'	$1+\frac{n'}{a}=$ Volum.
0,00	38,0	0,0	1,0000000000	2,50	37,0	— 1,0	0,9999017937
0,50	37,7	— 0,3	0,9999705381	2,75	36,9	— 1,1	0,9998919734
0,75	37,6	— 0,4	0,9999607174	3,00	36,9	— 1,1	0,9998919734
1,00	37,5	— 0,5	0,9999508968	3,25	36,8	— 1,2	0,9998821524
1,25	37,4	— 0,6	0,9999410762	3,50	36,8	— 1,2	0,9998821524
1,50	37,4	— 0,6	0,9999410762	3,75	36,8	— 1,2	0,9998821524
1,75	37,3	— 0,7	0,9999312555	4,00	36,9	— 1,1	0,9998919734
2,00	37,2	— 0,8	0,9999214349	4,25	36,9	— 1,1	0,99989 9734
2,25	37,1	— 0,9	0,9999116143				

Hiernach liegt also der Punct der grössten Dichtigkeit als unmittelbares Ergebniss der Versuche genau bei 3°,5 C.

3) Jede Reihe von Beobachtungen für sich betrachtet, giebt ein bestimmtes Gesetz des Fortganges der Ausdehnung des Wassers an, und wenn man die Reihenfolge der Resultate nur im Allgemeinen betrachtet und dabei berücksichtigt, dass die Endpuncte bei 100° C. so genau übereinstimmen, wenn gleich die absolute Richtigkeit der Beobachtungen bei den höchsten Temperaturen aus schon angegebenen und später nochmals zu erwähnenden Gründen nicht die vorzüglichste seyn kann, so weiss man kaum, welcher von ihnen der Vorzug gebühren soll. Eben dieses Resultat stellt sich heraus, wenn man die Differenzen der einzelnen Werthe aufsucht, zugleich kommen hiebei aber die unvermeidlichen Beobachtungsfehler mehr zum Vorschein. Obgleich es mir nämlich unmöglich scheint, dass überhaupt eine grössere Genauigkeit bei den Beobachtungen angewandt werden könne, als welche gerade auf diese Versuche von uns verwandt ist, es daher auch schwerlich jemanden möglich seyn wird, noch sicherere Resultate zu erhalten, wenn es ihm nicht gelingt, dieses durch einen zweckmässigeren Apparat, als den von uns angewandten, zu erreichen, so muss man doch wohl berücksichtigen, was für einen bedeutenden Einfluss die Differenz von nur einem Zehntheil eines Skalentheiles der gebrauchten Glasröhre hauptsächlich in den niederen Temperaturen hat, und wir beruhigten uns daher über den Erfolg unserer aufgewandten grossen Mühe und Zeit, als es sich ergab, dass die zweiten Differenzen bei allen drei Tabellen kein gleichmässiges Gesetz des Fortgangs zeigten, welches jedoch nur bei einzelnen Beobachtungen der Fall ist, und zwar so, dass die Fehler, ohne Einfluss auf das Ganze, nur den einzelnen Resultaten zugehören, und meistens auf eine oder beide angrenzende vertheilt sind. In so fern also keine der Beobachtungsreihen aus entscheidenden Gründen für verwerflich zu halten ist, aus der grösseren Menge der genauesten Beobachtungen aber, insbesondere denen in der mittleren Temperaturen angestellten, die Curve der Ausdehnung des Wassers mit grösster Sicherheit gefunden werden

kann und somit also die einzelnen Beobachtungsfehler am vollständigsten verschwinden; so schien es mir am rathsamsten, das arithmetische Mittel aus allen drei Reihen bei der Berechnung zum Grunde zu legen, mit Weglassung derjenigen aus der dritten Tabelle, welche zwischen die ganzen Grade fallen. Letztere sind nämlich zunächst in der Absicht angestellt, um für die höheren Grade eine grössere Menge von Beobachtungen zu haben, falls es sich zeigen sollte, dass hierbei die Ausdehnung des Wassers einen eigenthümlichen Gang befolge. Weil es sich aber ergab, dass dieses nicht der Fall sey, und spätere Versuche uns belehrten, dass die Flüssigkeiten selbst über den Siedepunct den regelmässigen Gang ihrer Ausdehnung beibehalten, wovon künftig noch die Rede seyn wird, so liess ich alle zwischen die ganzen Grade fallenden Beobachtungen weg, weil die ohnehin weitläuftige Rechnung durch sie noch ungleich mehr erschwert seyn würde.

4) Dass in jeder der mitgetheilten Reihen von Beobachtungen das Gesetz der Ausdehnung des Wassers durch Wärme liege, ist wohl nicht zu bezweifeln, allein damit ist wohl nicht unmittelbar gegeben, welches der analytische Ausdruck dieses Gesetzes sey, oder auf welche Weise die Vermehrung des Volumens durch Wärme als Function der Temperatur ausgedrückt werden könne. Wäre uns das Wesen der Wärme, das absolute Maass derselben und der eigentliche Grund, worauf ihre ausdehnende Kraft beruhet, genau bekannt, so liesse sich hieraus eine Formel für das Gesetz der Ausdehnung der Körper durch dieselbe gründen; so lange wir aber hierüber im Dunkeln sind, kann nicht gut mehr geschehen, als durch Interpolation der aus den Beobachtungen erhaltenen Werthe das Gesetz der Vermehrung des Volumens als eine Function der Temperaturerhöhung zu finden. Alle Physiker sind hierin bisher dem gelehrten Thomas Young gefolgt, welcher den Satz aufstellte, dass sich die Vermehrung des Volumens der Körper als eine Function der Potenzen der Thermometergrade annehmen lasse, welches Gesetz durch die Formel

$$\Delta t = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + \ldots\ldots$$

ausgedrückt wird. Indem viele bereits angestellte und berechnete Beobachtungsreihen mit dieser Formel sehr gut übereinstimmen, und die Differenzen unserer Beobachtungen gleichfalls auf einen solchen Ausdruck des Gesetzes führen, so haben wir keinen Anstand genommen, uns dieser Formel zu bedienen.

5) Bei der wirklichen Berechnung der durch die Beobachtungen erhaltenen Grössen kommt vielleicht die Frage in Betrachtung, bis zu der wievielsten Potenz von t man gehen solle. In dieser Hinsicht wollen manche Gelehrte gefunden haben, dass es zuviel versprechen heisse, oder wohl gar auf blosse Ostentation hinauslaufe, in die angegebene Formel noch die vierte Potenz aufzunehmen, und die Vermehrung des Volumens bis zur siebenten oder achten Decimalstelle zu berechnen. Solchen Tadlern, denen ich doch wohl einige Oberflächkeit im Urtheilen vorwerfen möchte, habe ich Folgendes entgegen zu setzen. Es ist allerdings richtig, dass die Fehlergrenze solcher Beobachtungen kaum ein Zehntheil einer Abtheilung an der von uns gebrauchten Messröhre erreicht, und dass daher die Volumina hieraus unmittelbar nicht bis zur sechsten Decimalstelle bestimmbar sind. Allein wenn die Beobachtungen die gesuchten Grössen bis dahin oder nur bis zur fünften Decimalstelle mit völliger Sicherheit gäben, so bedürfte es überall keiner Rechnung, indem diese eben die unvermeidlichen Fehler der Beobachtungen ausgleichen soll. Weil aber unsere sehr genauen Abwägungen das Volumen der untersuchten Flüssigkeiten und seine Vermehrung in so kleinen Theilen gaben, so konnten wir in Uebereinstimmung hiermit nicht füglich umhin, bei der Berechnung der Beobachtungen an sich bis zur achten Decimalstelle, beim Wasser aber, wo das arithmetische Mittel aus drei Reihen von Beobachtungen zu Gebote stand, und wir wegen schon vorhandener schätzbarer Untersuchungen eine vorzügliche Genauigkeit suchten, bis zur zehnten Decimalstelle zu gehen. Unsere nachherigen sehr mühsamen Rechnungen führten aber von selbst die Ueberzeugung herbei, dass man ganz andere Werthe der zu bestimmenden Coefficienten erhält, wenn man aus Furcht vor den allerdings höchst langweiligen Rechnungen sich mit weniger Decimalstellen begnügt, und wir zogen

es daher vor, lieber einige Decimalstellen mehr als weniger mit aufzunehmen. Indem aber ferner die von uns gefundenen Werthe der Coefficienten ergeben, dass namentlich beim Wasser die vierte Potenz von t in den höheren Temperaturen noch von Einfluss ist, so muss es uns freuen sie nicht vernachlässigt zu haben, und wenn die Mühe der Rechnung einmal überwunden ist, so kann es auf keine Weise zum Vorwurfe gereichen, einige Decimalstellen mehr in den mitgetheilten Werthen aufzunehmen, indem man sich hierdurch der gesuchten Wahrheit auf allen Fall mehr nähert, und ich wenigstens werde es nie als Grundsatz billigen, bei solchen Arbeiten die Untersuchung minder weit zu treiben, als die äussersten Grenzen wahrscheinlich richtiger Resultate zulassen, weil dabei doch wenigstens nur die Scheu vor den mühsamen Rechnungen sich ein nicht gebührendes Votum anmasst.

6) Wenn man die für die Ausdehnung der verschiedenen Flüssigkeiten gefundenen Formeln mit einander und die aus ihnen folgenden Werthe mit den Beobachtungen vergleicht, so lassen sich hieraus Folgerungen über das allgemeine Gesetz dieser Ausdehnung abstrahiren, von denen aber hier vorläufig keine Rede seyn kann. Dagegen scheint mir Folgendes aus einer weiteren Betrachtung der für das Wasser und für andere Flüssigkeiten gefundenen Formeln hervorzugehen. Diejenige Curve, welche gebildet wird, wenn man die Temperaturen als Abscissen und die Zunahmen des Volumens als Ordinaten betrachtet (letztere beim Gefrierpuncte $= 0$ gesetzt, und in Theilen des ganzen Volumens als Einheit genommen ausgedrückt), wird nicht bloss durch die aufgefundenen Formeln genau bezeichnet, sondern diese analytischen Ausdrücke geben auch zugleich das Gesetz an, welches diese Ausdehnung befolgen würde, wenn es möglich wäre, die Flüssigkeiten beliebig weit über den Siedepunct zu erwärmen. In diesem Falle wäre es aber nicht genug, bloss bis zur vierten Potenz zu gehen, sondern man müsste die Reihe noch weiter fortsetzen, und würde dann hierbei den schon erhaltenen Wechsel der positiven und negativen Coefficienten wieder finden. Es ist daher gewiss nicht zwecklos, bei der Bestimmung dieser Coefficienten bis zur vierten

Potenz zu gehen, weiter aber reichen die innerhalb der beiden festen Puncte des Thermometers liegenden Beobachtungen nicht. Wenn man z. B. die Ausdehnung des Wassers bei 640° C. bestimmen wollte, bei welcher Temperatur nach triftigen Gründen *) der Punct der grössten Dichtigkeit des Dampfes und der geringsten des Wassers zusammen fallen, so giebt die Formel das Volumen dieser Flüssigkeit um ein sehr Vielfaches der Einheit an, welches offenbar unstatthaft ist, aber darin seinen Grund hat, dass die weiteren Glieder der Formel fehlen. Bei der Voraussetzung einer bis so weit fortgesetzten Ausdehnung des Wassers musste dann zugleich der ungeheure Druck mit berücksichtigt werden, welcher zur Verhinderung der Dampfbildung erforderlich wäre. Für die Theorie der Wärme wären solche Betrachtungen vielleicht nicht ganz unnütz, allein für jetzt muss ich mich damit begnügen, diesen Gegenstand so weit verfolgt zu haben, als in dieser ohnehin sehr ausführlichen Abhandlung geschehen ist.

7) Es ist jetzt wohl allgemein anerkannt, dass sich aus einer Reihe von Beobachtungen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler am vollständigsten entfernen lassen, wenn man sie nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Diese ihrer berühmten Erfinder durchaus würdige Berechnungsart führt indess bei der Summation langer und aus vielen Zahlen bestehender Beobachtungsreihen leicht zu Rechnungen mit so vielen Ziffern, dass die Elimination kaum möglich ist, und die Erfahrung belehrt uns gerade bei der Aufsuchung der unbekannten Coefficienten für die Ausdehnung des Wassers, dass ein einziger Schreib- oder Rechnungsfehler die ganze mühsame Arbeit unnütz macht. Wir suchten daher jederzeit die erhaltenen Gleichungen in den kürzesten Zahlen auszudrücken, scheueten aber durchaus die Mühe nicht, die aufgefundenen Coefficienten in alle Gleichungen zu substituiren, diese dann wieder alle zusammen zu nehmen und so die möglichst genauen Resultate zu erhalten. Um aber den Beweis zu liefern, dass wir die numerische Berechnung bis zu so vielen Decimalstellen fortgesetzt

---

*) Vergl. den Art. Dampf, spec. Wärme desselben, im neuen Gehlerschen Wörterbuche der Physik.

haben, als man nur verlangen kann, wenn jeder merkliche Einfluss der vernachlässigten wirklich verschwinden soll, setze ich die gefundenen Coefficienten ganz her, damit auch ausserdem nicht bloss unsere Beobachtungen, sondern auch deren nachherige Berechnung zu jeder beliebigen Controlle vorliegen mögen.

Ueber die Ausdehnung des Wassers standen uns im Ganzen 47 Beobachtungen zu Gebote, von denen die meisten das arithmetische Mittel aus den oben mitgetheilten drei Reihen sind. Weil aber das Volumen des Wassers vom Nullpuncte der Centesimalskale an zuerst abnimmt und dann wieder wächst, hiernach also negative Werthe neben den positiven in die Berechnung aufgenommen werden mussten, ausserdem aber die Beobachtungen in den Temperaturen nahe beim Gefrierpuncte des Wassers am schwierigsten und daher leicht minder genau sind, endlich aber auch ohne diese noch der genauen Beobachtungen genug vorhanden waren, um aus ihnen die Curve der Ausdehnung dieser Flüssigkeit mit hinlänglicher Schärfe zu bestimmen, so liessen wir die ersten 7 Beobachtungen weg und nahmen die 40 folgenden in Rechnung, weil nach den beiden genauesten Reihen unserer Beobachtungen und derjenigen, welche absichtlich zur Auffindung des Punctes der grössten Dichtigkeit angestellt wurde, bei 8° C. schon wieder ein positiver Werth der Ausdehnung des Wassers, sein Volumen bei 0° C. = 1 gesetzt, vorhanden ist. Aus diesen 40 Beobachtungen erhielten wir dann in den kleinsten Werthen folgende vier Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
0{,}0047587114 &= 125\,a + 1645\,b + 22625\,c + 322693\,d \\
0{,}0222487353 &= 225\,a + 5145\,b + 119475\,c + 2814693\,d \\
0{,}0602648159 &= 353\,a + 12949\,b + 494837\,c + 19701205\,d \\
0{,}0541853764 &= 155\,a + 12425\,b + 1026875\,c + 87166625\,d.
\end{aligned}$$

Den numerischen Calcul der Elimination der vier unbekannten Grössen dieser Gleichungen vollständig herzusetzen oder nur abgekürzt mitzutheilen, würde zweckwidrig seyn, und ich begnüge mich daher die für die unbekannten Grössen erhaltenen Werthe in derjenigen Ausdehnung herzusetzen, wie sie durch Rechnung gefunden sind. Wer sich dann die Mühe geben will, diese Rechnung zu controliren, der wird finden, dass die höheren Decimalstellen nicht der Ostentation wegen hingesetzt sind, sondern als Resultat genauer Rechnung gefunden wurden, weswegen ich auf diesen Fall die Bemerkung hinzufüge, dass zuerst a, dann b und zuletzt c eliminirt worden ist, wonach also d als bekannt gefunden und so in die früheren Gleichungen substituirt werden konnte, um demnächst c dann b und endlich a zu finden. Heisst also die beim Wasser durch Temperaturerhöhung bewirkte Vermehrung des Volumens Δv, das Volumen desselben beim Gefrierpuncte = 1 gesetzt, und wird die Temperatur nach Graden der Centesimalskale durch t ausgedrückt, so ist

$$\begin{aligned}\Delta v = &- 0{,}00005947329343868653135225055 \;\cdots\; t\\ &+ 0{,}000008210029064329789838947637 \;\cdots\; t^2\\ &- 0{,}0000000621407211056132721744 39 \;\cdots\; t^3\\ &+ 0{,}000000000289157446947445791540 \;\cdots\; t^4\end{aligned}$$

Dass bei der nachherigen Berechnung nicht alle diese Zahlen benutzt sind, versteht sich wohl von selbst. Um aber bei den höheren Temperaturen den Einfluss der weiteren Decimalstellen nicht zu verlieren, obgleich derselbe nicht sehr bedeutend ist, wurde hierzu folgende kürzere Formel angewandt:

$$\begin{aligned}\Delta v = &- 0{,}0000594732934387\, t + 0{,}0000082100290643 3\, t^2\\ &- 0{,}0000000621407211\, t^3 + 0{,}00000000028915745\, t^4\end{aligned}$$

Werden hiernach die Werthe von Δv für die verschiedenen Temperaturen nach der hunderttheiligen Skale gesucht und zu 1 addirt, so erhält man die Volumina des Wassers für alle einzelnen Grade der hunderttheiligen Thermometerskale, das bei 0° C. als Einheit angenommen. Die nachfolgende Tabelle giebt eine Vergleichung der hierdurch erhaltenen Werthe mit denen, welche durch die Beobachtungen unmittelbar gefunden sind, nebst den Unterschieden beider. Indem hiernach die nachfolgende Tabelle für sich verständlich ist, so bedarf es keiner weiteren Angabe dessen, was die einzelnen Columnen bedeuten.

t	Volumen		Differenzen.
	nach Rechnung.	nach Versuch.	
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
1	0,9999486748	0,9999553718	+ 0,0000066970
2	0,9999134010	0,9999162978	+ 0,0000028968
3	0,9998938160	0,9998930380	— 0,0000007780
4	0,9998895643	0,9998843976	— 0,0000051667
5	0,9999002974	0,9999042710	+ 0,0000039736
6	0,9999256736	0,9999259076	+ 0,0000002340
7	0,9999653584	0,9999727514	+ 0,0000073930
8	1,0000190238	1,0000116153	— 0,0000074085
9	1,0000864393	1,0000777450	— 0,0000086943
10	1,0001670208	1,0001588272	— 0,0000081936
11	1,0002607315	1,0002667343	+ 0,0000060028
12	1,0003671815	1,0003698005	+ 0,0000026190
13	1,0004860775	1,0005037967	+ 0,0000177192
14	1,0006171337	1,0006197707	+ 0,0000026370
15	1,0007600708	1,0007657311	+ 0,0000056603
16	1,0009146166	1,0009077823	— 0,0000068343
17	1,0010805058	1,0010769083	— 0,0000035975
18	1,0012574800	1,0023544039	— 0,0000030761
19	1,0014452880	1,0014486359	+ 0,0000033479
20	1,0016436852	1,0016007439	— 0,0000429413
21	1,0018524341	1,0018538527	+ 0,0000014186
22	1,0020713041	1,0020732031	+ 0,0000018990
23	1,0023000716	1,0023092925	+ 0,0000092209
24	1,0025385199	1,0025538399	+ 0,0000153200
25	1,0027864392	1,0027746269	— 0,0000118123
26	1,0030436267	1,0030594525	+ 0,0000158258
27	1,0033098866	1,0033206840	+ 0,0000107974
28	1,0035850298	1,0035986573	+ 0,0000136275
29	1,0038688744	1,0038850102	+ 0,0000161358
30	1,0041612454	1,0041563995	— 0,0000048459
31	1,0044619746	1,0044828553	+ 0,0000208807
32	1,0047709008	1,0047943504	+ 0,0000234496
33	1,0050878698	1,0051058601	+ 0,0000179903
34	1,0054127342		
35	1,0057453538	1,0056862924	— 0,0000690614
36	1,0060855951		

t	Volumen		Differenzen.
	nach Rechnung.	nach Versuch.	
37	1,0064333316		
38	1,0067884438		
39	1,0071508190		
40	1,0075203517	1,0074831356	— 0,0000372161
41	1,0078969430		
42	1,0082805013		
43	1,0086709416		
44	1,0090681860		
45	1,0094721637	1,0094445501	— 0,0000276136
46	1,0098828105		
47	1,0103000694		
48	1,0107238903		
49	1,0111542299		
50	1,0115910519	1,0116277050	+ 0,0000366531
51	1,0120343271		
52	1,0124840330		
53	1,0129401543		
54	1,0134026824		
55	1,0138716157	1,0140567243	+ 0,0001851086
56	1,0143469596		
57	1,0148287265		
58	1,0153169355		
59	1,0158116129		
60	1,0163127918	1,0165092732	+ 0,0001964814
61	1,0168205123		
62	1,0173348213		
63	1,0178557730		
64	1,0183834289		
65	1,0189178544	1,0191879164	+ 0,0002700620
66	1,0194591268		
67	1,0200073269		
68	1,0205625432		
69	1,0211248719		
70	1,0216944149	1,0216149951	— 0,0000794198
71	1,0222712819		
72	1,0228555893		
73	1,0234473605		

t	Volumen		Differenzen.
	nach Rechnung.	nach Versuch.	
74	1,0240470257		
75	1,0246544222	1,0249292450	+ 0,0002748228
76	1,0252697941		
77	1,0258932925		
78	1,0265250756		
79	1,0271653083		
80	1,0278141625	1,0280525377	+ 0,0002383752
81	1,0284718170		
82	1,0291384578		
83	1,0298142774		
84	1,0304994757		
85	1,0311942593	1,0313679912	+ 0,0001737319
86	1,0318988417		
87	1,0326134434		
88	1,0333382918		
89	1,0340736215		
90	1,0348196736	1,0347994561	— 0,0000202175
91	1,0355766965		
92	1,0363449453		
93	1,0371246822		
94	1,0379161763		
95	1,0387197037	1,0383240854	— 0,0003956183
96	1,0395355472		
97	1,0403639968		
98	1,0412152493		
99	1,0420599085		
100	1,0429279852	1,0420846576	— 0,0008433276

Die Differenzen der Beobachtungen und Rechnungen sind bald positiv bald negativ, so dass also die Formel die gesuchte Curve sehr bestimmt ausdrückt. Dass sich die Summen der entgegengesetzten Differenzen völlig aufheben sollten, ist schon deswegen nicht zu erwarten, weil die ersten sieben Beobachtungen gar nicht in Rechnung genommen sind, indess ist der Unterschied derselben nur — 0,0000951334, und da die höchsten Zahlen in den Differenzenreihen nur bei dreien in die vierte Decimalstelle fallen, so muss die Formel für sehr genau gelten. Am grössten sind die Differenzen bei 95° und bei 100°, welches übrigens leicht begreiflich ist. Ungeachtet nämlich, wie ich oben gezeigt habe, die Beobachtungen beim Siedepuncte sehr genau mit einander übereinstimmende Resultate gegeben haben, so waren doch diese aus bemerkten Gründen im Allgemeinen gerade die allerschwierigsten, und da das Wasser, in welchem das Röhrchen eingetaucht war, nur bei den beiden ersten Versuchen durch zugesetzten salzsauren Kalk den wirklichen Siedepunct erreichte, seine Hitze aber gar nicht über diese Temperatur hinausgehen kann, so lässt sich voraussetzen, dass das im Röhrchen eingeschlossene Wasser die Siedehitze selbst aus bekannten Gründen nicht erreichte, folglich auch in seiner Ausdehnung etwas zurückbleiben musste. Für diese Bestimmung ist also der durch Rechnung gefundene Werth bei weitem der richtigste.

Meistens nimmt man die Einheit des Volumens vom Wasser im Puncte seiner grössten Dichtigkeit an, und das Bestreben der Physiker, diesen mit möglichster Genauigkeit zu finden, hat eine grosse Zahl von Versuchen veranlasst, welche aber sehr von einander abweichende Resultate geliefert haben. Neuerdings scheint zwar diese Frage durch die gehaltreichen Versuche Hällströms entschieden zu seyn, allein welche Bedenklichkeiten sich gegen die frühere Beobachtungsreihe dieses berühmten Physikers erheben lassen, ist schon oben angedeutet, und wenn gleich seine neueste *) im Mittel ein mit jener völlig übereinstimmendes Resultat giebt, so weichen doch die mittleren Resultate beider neuerdings bekannt gewordener Versuchsreihen so bedeutend von einander ab, dass Hällström selbst die Methode nicht als die geeignetste für diese Bestimmung ansieht. Wäre ausserdem die berechnete Fehlergrenze beider Resultate richtig, so könnten sie nicht zu einem gemeinschaftlichen Mittel vereinigt werden, weil die Fehlergrenze kleiner gefunden ist, als die Hälfte des Unterschiedes beider von einander. Unsere sehr genauen Beobachtungen setzen insgesammt

---

*) Poggend. Ann. IX. 530.

den Punct der grössten Dichtigkeit des Wassers niedriger, als Hällström ihn gefunden hat, und sehr genau dahin, wohin er nach der einen der beiden Versuchsreihen fällt, nämlich bei 3°,5 C., welches von 3°,433 um keine merkliche Grösse abweicht. Genau genommen geht aber aus unsern Beobachtungen unmittelbar nur soviel hervor, dass der Punct der grössten Dichtigkeit nicht unter 3 ,5 liegt und 4° nicht erreicht. Die erste genaueste Reihe von Versuchen ergiebt nämlich, dass das Volumen des Wassers bei 7° C. noch nicht wieder zur Einheit zurückgekehrt ist, bei 8° aber schon darüber hinausgeht; die dritte wegen Kleinheit des Volumens von Wasser in diesem Röhrchen nach angebrachter Compensation für solche feine Bestimmungen minder genaue, lässt bei 7° C. das Volumen des Wassers wieder zur Einheit zurückkehren, giebt aber demselben einen kleineren Werth bei 4° als bei 3° und zeigt somit, dass der Punct der grössten Dichtigkeit über 3°,5 liegen müsse, die zweite Reihe zeigt durch eine Vergleichung der für 3° und 5° erhaltenen Grössen, dass dieser Punct 4° nicht erreicht, jedoch höher als 3°,5 liegen müsse, die 4te absichtlich für diesen Zweck angestellte Reihe setzt ihn zwar genau in 3°,5, allein es ist schon oben bemerkt, dass das hierbei gebrauchte Thermometer von Greiner den Gefrierpunct etwa 0,1° unter dem Null der Skale hat, und da es unmöglich war, diesen so kleinen Fehler genau durch Schätzung zu corrigiren, so folgt auch hieraus, dass der Punct der grössten Dichtigkeit höher als 3°,5 liege.

Zu diesem gemeinschaftlichen Resultate vereinigen sich demnach alle aus den Beobachtungen unmittelbar gezogenen Schlüsse, ohne dass es möglich ist, das Gesuchte aus ihnen selbst mit völliger Schärfe zu finden. Letzteres kann aber nur dann erreicht werden, wenn die aus so zahlreichen mittleren Beobachtungen erhaltene Gleichung die Curve der Ausdehnung desselben durch Wärme mit vollkommener Schärfe angiebt, und da dieses bei der ängstlichen Genauigkeit und Weitläuftigkeit, womit die Rechnung geführt wurde, mit grosser Sicherheit erwartet werden muss, so darf man mit Recht hierin das geeignete Mittel erwarten, diese seit so langer Zeit gesuchte Bestimmung endlich mit völliger Schärfe zu erhalten. Es liegt in der Natur der Sache, dass das Maximum der Dichtigkeit des Wassers gefunden werden könne, wenn man $\frac{\Delta v}{dt} = 0$ setzt, welches dann mit Weglassung einiger Decimalstellen die Gleichung giebt:

$$0 = -0{,}000059473293 + 0{,}000016420058t$$
$$- 0{,}0000001864221t^2 + 0{,}000000001156629t^3$$

Hieraus erhält man die kubische Gleichung

$$0{,}594732293 = 0{,}16420058t - 0{,}001864221t^2 + 0{,}00001156629t^3.$$

Sucht man den dieser Gleichung genügenden Werth, so giebt für $t = 3{,}78$

$$0{,}59473293 = 0{,}6206763 - 0{,}0266367 + 0{,}00062469$$

oder $$0{,}59473293 = 0{,}5946643$$

wonach also $t = 3{,}78$ zu klein ist. Setzt man dagegen $t = 3{,}781$; so giebt dieses

$$0{,}59473293 = 0{,}6208406 - 0{,}02665084 + 0{,}000625193$$

oder $$0{,}5947393 = 0{,}594814953$$

Setzt man die Näherung noch weiter fort, so giebt

3,7804 die Summe = 0,59472471

und 3,7805 „ „ „ = 0,59473966

woraus sich also ergiebt, dass 3,78046 die bis zur 6ten Decimalstelle genäherte Temperatur für den Punct der grössten Dichtigkeit des Wassers ist. Weil hiernach aber dieser Werth weiter verfolgt würde, als die Genauigkeit der Beobachtungen selbst reicht, die ersten 7 Beobachtungen ausserdem nicht mit berechnet und die der vierten Reihe überhaupt nicht mit aufgenommen sind, wonach dieser Punct vielleicht um eine Kleinigkeit tiefer herabgekommen wäre, und weil endlich die Rechnung durch die Einführung einer so grossen Zahl unendlich erschwert werden würde, so haben wir

3°,78 C.

als den Punct der grössten Dichtigkeit des Wassers angenommen. Uebrigens ergiebt sich aus allen diesen weitläuftigen Untersuchungen: erstlich, dass der Punct der grössten Dichtigkeit des Wassers weder niedriger als 3°,6, noch höher als

3°,9 liegen kann und schwerlich genauer gefunden werden wird; desgleichen insbesondere aus der Betrachtung der vierten Versuchsreihe, dass innerhalb der Grenzen von 0,5 Graden, also, die Bestimmung von 3°,78 C. als völlig genau angenommen, zwischen 3,5 und 4°,0 die Aenderung der Dichtigkeit des Wassers eine verschwindende Grösse und für die gewöhnlichen Mittel unmessbar ist.

Um die für die Einheit des Volumens bei 0° C. erhaltenen Volumina des Wassers für Grade der hunderttheiligen Skale auf solche zu reduciren, bei welchen das Volumen beim Puncte der grössten Dichtigkeit als Einheit angenommen wird, giebt es verschiedene Mittel. Am einfachsten ist es die Ordinaten der erhaltenen Curve für die Ausdehnung des Wassers, wobei die Temperaturen die Abscissen bezeichnen, um soviel höher zu rücken, als sie beim Puncte der grössten Dichtigkeit unter den Nullpunct der Ordinaten herabsinken. Wenn man nämlich die Incremente des Volumens des Wassers bei wachsenden Temperaturen als Ordinaten auf eine gerade Abscissenlinie getragen denkt und bei 0° C. die Ordinate $= 0$ setzt, das Volumen $= 1$ angenommen, so werden die Ordinaten zuerst negativ, die Curve erhält für die grösste Dichtigkeit des Wassers einen Wendepunct, die negativen Ordinaten nehmen ab, verschwinden endlich, die Curve schneidet die Abscissenlinie abermals, oder die Verminderungen des Volumens verschwinden, das Volumen wird wieder $= 1$, und die Ordinaten wachsen nach der Formel fortwährend. Wird also die genannte gerade Linie so tief herabgerückt, dass sie zu einer Tangente der gesuchten Curve wird, folglich die negativen Ordinaten positiv und im Berührungspuncte, also dem der grössten Dichtigkeit des Wassers, $= 0$ werden, so bezeichnen die Ordinaten der hiernach höher hinaufgerückten Curve die Ausdehnung des Wassers vom Puncte seiner grössten Dichtigkeit an. Nach dem oben Gesagten ist es aber genügend, den Punct der grössten Dichtigkeit bei 3°,78 C. $= t$ zu setzen. Hierfür ist, wenn die 16stelligen Coefficienten ganz berechnet werden

$$
\begin{aligned}
at &= -\ 0{,}0002248090491982 \\
bt^2 &= +\ 0{,}0001173081792827 \\
ct^3 &= -\ 0{,}0000033562297920 \\
dt^4 &= +\ 0{,}0000000590339149 \\
\hline
\Delta\ 3^\circ{,}78 &= -\ 0{,}0001107980657925
\end{aligned}
$$

Wird dieser negative Werth zu den berechneten und oben bereits mitgetheilten Voluminibus als positiv hinzuaddirt, so geben die hierdurch erhaltenen Summen die den verschiedenen Temperaturen zugehörigen Volumina, dasjenige im Puncte der grössten Dichtigkeit als Einheit angenommen.

Endlich ist es in vielen Fällen, namentlich für die Bestimmung der specifischen Gewichte, von grossem Nutzen, die Dichtigkeit des Wassers bei den verschiedenen Temperaturen zu kennen. Bekanntlich ist aber die Dichtigkeit der Körper dem Volumen derselben umgekehrt proportional, und man darf daher nur die bereits mitgetheilten Volumina in die Einheit dividiren, um die gesuchten Dichtigkeiten zu erhalten. Hierbei kann aber die Einheit des Volumens gleichfalls verschieden angenommen werden, nämlich entweder beim Frostpuncte oder beim Puncte der grössten Dichtigkeit des Wassers. Weil indess beide Dichtigkeiten nicht selten wissenswerth sind, so schien es mir der Mühe werth, beide berechnen zu lassen, eine Arbeit, welche der geübte Rechner Hofmeister übernommen hat. Die nachfolgende Tabelle enthält die Volumina für alle Grade des hunderttheiligen Thermometers zwischen den beiden festen Puncten desselben für den Werth des Volumens = 1 bei 0° C. und bei 3°, 78 nebst den Dichtigkeiten für beide Bestimmungen.

Volumen und Dichtigkeit des reinen Wassers.

t	Volumen.	Dichtigkeit.	Volumen.	Dichtigkeit.
0	1,0000000000	1,0000000000	1,0001107981	0,9998892140
1	0,9999486748	1,0000513277	1,0000594729	0,9999405307
2	0,9999134010	1,0000866065	1,0000241991	0,9999758013
3	0,9998938160	1,0001061953	1,0000046141	0,9999953859

t	Volumen.	Dichtigkeit.	Volumen.	Dichtigkeit.
4	0,9998895643	1,0001104479	1,0000003624	0,9999996376
5	0,9999002974	1,0000997125	1,0000110955	0,9999889046
6	0,9999256736	1,0000743319	1,0000364717	0,9999635296
7	0,9999653584	1,0000346428	1,0000761565	0,9999238493
8	1,0000190238	0,9999809765	1,0001298219	0,9998701949
9	1,0000864393	0,9999135682	1,0001972374	0,9998028015
10	1,0001670208	0,9998330071	1,0002778189	0,9997222583
11	1,0002607315	0,9997393364	1,0003715296	0,9996286084
12	1,0003671815	0,9996329533	1,0004779796	0,9995222488
13	1,0004860775	0,9995141585	1,0005968756	0,9994034804
14	1,0006171337	0,9993832468	1,0007279318	0,9992725977
15	1,0007600708	0,9992405065	1,0008708689	0,9991298889
16	1,0009146166	0,9990862192	1,0010254147	0,9989756377
17	1,0010805058	0,9989206604	1,0011913039	0,9988101136
18	1,0012574800	0,9987440992	1,0013682781	0,9986335916
19	1,0014452880	0,9985567082	1,0015560861	0,9984463316
20	1,0016436352	0,9983590121	1,0017544833	0,9982485895
21	1,0018524341	0,9981509911	1,0019632322	0,9980406145
22	1,0020713041	0,9979329772	1,0021821022	0,9978226490
23	1,0023000716	0,9977052066	1,0024108697	0,9975949286
24	1,0025385199	0,9974679078	1,0026493180	0,9973577821
25	1,0027864392	0,9972213034	1,0028972373	0,9971111324
26	1,0030436267	0,9969656088	1,0031544248	0,9968554943
27	1,0033098866	0,9967010326	1,0034206847	0,9965909765
28	1,0035850298	0,9964277767	1,0036958279	0,9963177809
29	1,0038688744	0,9961460360	1,0039796725	0,9960361025
30	1,0041612454	0,9958559987	1,0042720435	0,9957461292
31	1,0044619746	0,9955578462	1,0045726727	0,9954481415
32	1,0047709008	0,9952517526	1,0048816989	0,9951420163
33	1,0050878698	0,9949378856	1,0051986679	0,9948282185
34	1,0054127342	0,9946164057	1,0055235323	0,9945068095
35	1,0057453538	0,9942874667	1,0058561519	0,9941779429
36	1,0060855951	0,9939512153	1,0061963932	0,9938417656
37	1,0064333316	0,9936077016	1,0065441297	0,9934984175
38	1,0067884438	0,9932573284	1,0068992419	0,9931480315
39	1,0071508190	0,9928999521	1,0072616171	0,9927907338
40	1,0075203517	0,9925357818	1,0076311498	0,9924266436
41	1,0078969430	0,9921649300	1,0080077411	0,9920558734

t	Volumen.	Dichtigkeit.	Volumen.	Dichtigkeit.
42	1,0082805013	0,9917875023	1,0083912994	0,9916785286
43	1,0086709416	0,9914035973	1,0087817397	0,9912947079
44	1,0090681860	0,9910133060	1,0091789841	0,9909045023
45	1,0094721637	0,9906167163	1,0095829618	0,9905079996
46	1,0098828105	0,9902140026	1,0099936086	0,9901052754
47	1,0103000694	0,9898049403	1,0004108675	0,9896964019
48	1,0107238903	0,9893898913	1,0108346884	0,9892814438
49	1,0111542299	0,9889688145	1,0112650280	0,9888604593
50	1,0115910519	0,9885417611	1,0117018500	0,9884334994
51	1,0120343271	0,9881087758	1,0121451252	0,9880006089
52	1,0124840330	0,9877676757	1,0125948311	0,9875618256
53	1,0129401543	0,9872251541	1,0136509524	0,9871171807
54	1,0134026824	0,9867745738	1,0135134805	0,9866666988
55	1,0138716157	0,9863181733	1,0139824138	0,9862103981
56	1,0143469596	0,9858559643	1,0144577577	0,9857482900
57	1,0148287265	0,9853869663	1,0149395246	0,9852803795
58	1,0153169355	0,9849141337	1,0154277336	0,9848066651
59	1,0158116129	0,9844345027	1,0159224110	0,9843271388
60	1,0163127918	0,9839490441	1,0164235899	0,9838417860
61	1,0168205123	0,9834577370	1,0169313104	0,9833505860
62	1,0173348213	0,9829605544	1,0174456194	0,9828535117
63	1,0178557730	0,9824574625	1,0179665711	0,9823505293
64	1,0183834289	0,9819484209	1,0184942279	0,9818415986
65	1,0189178544	0,9814333861	1,0190286525	0,9813266757
66	1,0194591268	0,9809123031	1,0195699249	0,9808057059
67	1,0200073269	0,9803851145	1,0201181250	0,9802786319
68	1,0205625432	0,9798517559	1,0206733413	0,9797453892
69	1,0211248719	0,9793121561	1,0212356700	0,9792059065
70	1,0216944149	0,9787662391	1,0218052130	0,9786601079
71	1,0222712819	0,9782139415	1,0223820800	0,9781079105
72	1,0228555893	0,9776551161	1,0229663874	0,9775492258
73	1,0234474605	0,9770897272	1,0235582586	0,9769839592
74	1,0240470257	0,9765176548	1,0241578238	0,9764120107
75	1,0246544222	0,9759387929	1,0247652203	0,9758332740
76	1,0252697941	0,9753530297	1,0253805922	0,9752476374
77	1,0258932925	0,9747602477	1,0260040906	0,9746549835
78	1,0265250756	0,9741603237	1,0266358737	0,9740551890
79	1,0271653083	0,9735531291	1,0272761064	0,9734481254

t	Volumen.	Dichtigkeit.	Volumen.	Dichtigkeit.
80	1,0278141625	0,9729835296	1,0279249606	0,9728336565
81	1,0284718170	0,9723163857	1,0285826151	0,9722116487
82	1,0291384578	0,9716865524	1,0292492559	0,9715819509
83	1,0298142774	0,9710488793	1,0299250755	0,9709444150
84	1,0304994757	2,9704032108	1,0306102738	0,9702988854
85	1,0311992593	0,9697493862	1,0313050574	0,9696452013
86	1,0318988417	0,9690872396	1,0320096398	0,9689831969
87	1,0326134434	0,9684166000	1,0326242415	0,9684064733
88	1,0333382918	0,9677372917	1,0334490899	0,9676335388
89	1,0340736215	0,9670491339	1,0341844196	0,9669455283
90	1,0348196736	0,9663519408	1,0349304717	0,9662484847
91	1,0355766965	0,9656455220	1,0356874946	0,9655422174
92	1,0363449453	0,9649296834	1,0364557434	0,9648265316
93	1,0371246822	0,9642042245	1,0372354803	0,9641012277
94	1,0379161763	0,9634689417	1,0380269744	0,9633661019
95	1,0387197037	0,9627236264	1,0388305018	0,9626209456
96	1,0395355472	0,9619680661	1,0396463453	0,9618655464
97	1,0403639968	0,9612020438	1,2404747949	0,9610996872
98	1,0412152493	0,9604162066	1,0413260474	0,9603140174
99	1,0420599085	0,9596377250	1,0421707066	0,9595357015
100	1,0429279852	0,9588389474	1,0430387833	0,9587371208

2) *Ausdehnung des Seewassers.*

Die Gesetze der Ausdehnung des Wassers, wenn dieses Salze aufgelöset enthält, genau zu kennen, ist gewiss von grossem Interesse. Hier liegt aber ein unermessliches Feld vor, wenn man die vielen lösbaren Salze und das mannigfaltige quantitative Verhältniss ihrer Verbindung mit dem Wasser berücksichtigt. Eine einzige Reihe solcher genügender Versuche ist übrigens keine Kleinigkeit, sowohl wenn es die Mühe ihrer Anstellung, als auch demnächst ihrer Berechnung gilt, so dass wir es daher gar nicht unternehmen konnten, unsere Untersuchungen zur Erhaltung vergleichbarer Resultate auf die zahllosen salzigen Auflösungen auszudehnen; vielmehr mussten wir aus Mangel an Zeit uns bloss darauf beschränken, von den verschiedenen Arten der Flüssigkeiten nur eine einzige näher zu untersuchen. Wir wählten daher unter den salzigen Flüssigkeiten das Meerwasser, weil dieses, in so unermesslicher Menge in der Natur vorhanden, noch grösseres Interesse als sonstige Salzlösungen erregt, und nebenbei in seinem Verhalten gegen die Wärme, hinsichtlich seiner Ausdehnung durch dieselbe, als Beispiel der gesammten salzigen Lösungen dienen kann. Natürliches Seewasser wäre zu diesen Versuchen allerdings wohl geeigneter gewesen, als künstlich bereitetes, allein dass diejenigen Bestandtheile desselben, hauptsächlich die thierischen, welche die Analyse bisher nicht aufzufinden vermogte, auf das Gesetz seiner Ausdehnung durch Wärme irgend einen Einfluss haben sollten, ist auf keine Weise anzunehmen. In Ermangelung des uns nicht zu Gebote stehenden natürlichen Seewassers, nahmen wir daher künstliches, welches mein verehrter College, Leopold Gmelin, Hofrath und Professor der Chemie an der hiesigen Hochschule, express für diesen Zweck nach den Analysen von Vogel und Bouillon-La Grange zu bereiten die Güte hatte.

Zu den Versuchen mit diesem Seewasser gebrauchten wir das Röhrchen *B.*, und befolgten dabei das oben genügend beschriebene und im Allgemeinen stets gleichmässig angewendete Verfahren. Sowohl die Differenzen der durch die Beobachtung erhaltenen Werthe, als auch die spätere Berechnung derselben, gaben uns die volle Ueberzeugung, dass diese Beobachtungen unter die vorzüglich genauen gehören. Bloss bei derjenigen Beobachtung, welche in siedendem Wasser erhalten wurde, ist im Protocolle bemerkt, dass sie wegen kleiner sich zeigender Bläschen nicht als völlig genau gelten könne. Wir wagten es nämlich nicht, auch diese Flüssigkeit, wie beim reinen Wasser geschehen war, vorher stark und anhaltend sieden zu lassen, weil sonst durch die, wenn gleich geringe, Verdampfung das quantitative Mischungsverhältniss derselben leicht um eine Kleinigkeit verändert werden konnte, und da dieses Seewasser frisch bereitet war, so glaubten wir, dass dasselbe keine so beträchtliche Quantität von Luft enthalten könne, als welche die Genauigkeit unserer Versuche zu stören vermögend wäre. Wir begnügten uns daher, das mit einem Korke lose verstopfte Glas mit dem Seewasser über Kohlen zu erhitzen, und als es anfing zu sieden, sogleich zu verstopfen und dann das Röhrchen damit zu füllen. Wirklich konnten wir auch bei absichtlich wiederholten Untersuchungen durchaus keine Bläschen in demselben entdecken, ausgenommen als das Röhrchen eine Zeitlang in siedendem Wasser gestanden hatte, indem sich da einige verschwindend kleine Bläschen zu entwickeln schienen. Sie können die Beobachtung um eine unbedeutende Kleinigkeit vergrössert haben, indess schien sie uns nicht in einem solchen Grade ungenau, dass wir uns veranlasst gefunden hätten, sie ganz wegzulassen, da eine kleine mögliche Abweichung derselben bei der grossen Zahl von 20 Beobachtungen keinen merklichen Einfluss haben konnte.

Beobachtungen unter dem Gefrierpuncte haben wir mit dieser Flüssigkeit nicht angestellt, aus Besorgniss, unsern Apparat zu verlieren. Ausserdem aber können sie keine reine Resultate geben; denn bekanntlich wird schon bei wenigen Graden unter dem Gefrierpunct etwas Salz aus der Flüssigkeit ausgeschieden, und sie befolgt dann andere Gesetze der Ausdehnung, welche kennen zu lernen allerdings von grossem Interesse gewesen wäre, wir waren indess ausser Stande, mit dem gebrauchten Apparate diese Aufgabe zu lösen.

Die Berechnung geschah ganz auf die oben ausführlich angegebene Weise, und so ergiebt sich denn die Bedeutung der Werthe, welche in der unten folgenden tabellarischen Uebersicht enthalten sind, von selbst. Folgendes sind die bei der Berechnung zum Grunde liegenden Grössen. Das Quecksilber im Röhrchen B zeigt bei 0° C. vor der Abwägung desselben zur Bestimmung des Inhaltes auf 23,45 Theilstriche, das Seewasser aber zeigte bei der nämlichen Temperatur 39,8, mithin war der Werth von a;

$$a = 11955{,}9846153857 + 16{,}35 = 11972{,}3346153857.$$

Es musste im Verlauf der Versuche dreimal herausgenommen werden. Bei der ersten Herausnahme zeigte die Flüssigkeit 26,3 Theilstriche, mithin war

$$m' = -13{,}5$$

und

$$a + m' = 11958{,}8346153857,$$

folglich ist

$$\frac{a + n'}{a\,(a + m')} = \frac{1{,}0101985121458}{a + m'} = 0{,}000084472989.$$

Nach der zweiten Herausnahme stand die Flüssigkeit im Röhrchen auf 49,8 Theilstriche, folglich ist

$$m'' = 10{,}0$$

und

$$a + m'' = 11982{,}3346153857$$

$$\frac{(a + n')\,(a + n'')}{a\,(a + m')\,(a + m'')} = \frac{1{,}0195074365254}{a + m''} = 0{,}000085084206$$

Nach der dritten Herausnahme zeigte die Flüssigkeit 30,8 Theilstriche des Röhrchens, wonach also

$$m''' = -9{,}0$$

und

$$a + m''' = 11963{,}3346153857$$

$$\frac{(a + n')\,(a + n'')\,(a + n''')}{a\,(a + m)\,(a + m'')\,(a + m''')} = \frac{1{,}031163972747}{a + m'''} = 0{,}000086193691$$

Dieses sind die gesammten numerischen Werthe, welche bei der Berechnung der nachfolgenden Tabelle zum Grunde liegen, wobei ich nur noch hinzuzufügen habe, dass die Werthe von $1 + \delta t$ für die einzelnen Bestimmungen von t mit denen der oberen Tabelle identisch seyn müssen.

Tabellarische Uebersicht der Ausdehnung des Seewassers.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a} = A'$	$1 + \delta t'$	Volumen.
0	39,8	0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
5	43,4	3,6	1,00030069	1,00013272	1,00043545
10	48,8	9,0	1,00075173	1,00026544	1,00102138
15	57,8	18,0	1,00150346	1,00039816	1,00190824
20	70,0	30,2	1,00252248	1,00053089	1,00306273
25	84,6	44,8	1,00374196	1,00066361	1,00441809
30	101,0	61,2	1,00511178	1,00079633	1,00592425
35	119,2	79,4	1,00663195	1,00092905	1,00758127
40	139,8	100,0	1,00835259	1,00106178	1,00943957
45	161,9	122,1	1,01019851	1,00119450	1,01142338
t''	ϑ''	$n'' - m'$	A''	$1 + \delta t''$	Volumen.
50	50,5	24,2	1,01224276	1,00132722	1,01360053
55	77,3	51,0	1,01450663	1,00145994	1,01601008
60	105,6	79,3	1,01689722	1,00159267	1,01854121
65	136,5	110,2	1,01950743	1,00172539	1,02129300
t'''	ϑ'''	$n''' - m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumen.
70	81,2	31,4	1,02217908	1,00185811	1,02410703
75	113,6	63,8	1,02493581	1,00199083	1,02700704
80	148,3	98,5	1,02788823	1,00212356	1,03010391
85	186,8	137,0	1,03116397	1,00225628	1,03352564
t''''	ϑ''''	$n'''' - m'''$	A''''	$1 + \delta t''''$	Volumen.
90	67,5	36,7	1,03432728	1,00238900	1,03683554
95	107,6	76,8	1,03778365	1,00252172	1,04044010
100	149,6	118,8	1,04140378	1,00265445	1,04420981

Die 20 hiernach durch Beobachtung erhaltenen Werthe wurden von uns in die Rechnung aufgenommen, und wenn gleich die vorläufig aufgesuchten Differenzen die Ueberzeugung gaben, dass die vierte Potenz der Temperatur in den niederen und mittleren Temperaturen von keinem messbaren Einflusse seyn würde, so liessen wir uns durch die allerdings hierdurch erschwerte Berechnung nicht abhalten, auch diese mit aufzunehmen, da sich immerhin nicht im Voraus angeben lässt, wozu eine schärſere Bestimmung künftig einmal von Nutzen seyn kann. Wir erhielten hiernach folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0{,}0108459 &= 75\,a + 1375\,b + 28125\,c + 611875\,d\\
0{,}04796880 &= 200\,a + 8250\,b + 350000\,c + 15221250\,d\\
0{,}10695836 &= 325\,a + 21375\,b + 1421875\,c + 95611875\,d\\
0{,}18511500 &= 450\,a + 40750\,b + 3712500\,c + 340221250\,d.
\end{aligned}$$

Die Elimination gab für die unbekannten Coefficienten folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}00005769938250000\\
b &= 0{,}000005096386600 9\\
c &= -0{,}0000000187330426\\
d &= 0{,}00000000000617807.
\end{aligned}$$

Die hier mitgetheilten Werthe wurden ganz beibehalten und vermittelst derselben die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Volumina mit Weglassung der höheren Decimalstellen gefunden. Was die in den einzelnen Columnen der tabellariachen Uebersicht aufgezeichneten Grössen bedeuten ist an sich klar, und es bedarf darüber bei der Uebereinstimmung mit der früher mitgetheilten Tabelle keiner weiteren Erläuterung.

t	Volumina		Differenzen.
	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	
0	1,0000000000	1,00000000	0,00000000
1	1,0000627767		
2	1,0001356346		
3	1,0002184637		
4	1,0003111550		
5	1,0004136016	1,00043545	+ 0,0000218584
6	1,0005256976		
7	1,0006473388		
8	1,0007784224		
9	1,0009188473		
10	1,0010685134	1,00102138	— 0,0000471334

t	Volumina		Differenzen.
	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	
11	1,0012273226		
12	1,0013951780		
13	1,0015719844		
14	1,0017576476		
15	1,0019520755	1,00190824	— 0,0000438355
16	1,0021551772		
17	1,0023668632		
18	1,0025871455		
19	1,0028156379		
20	1,0030525552	1,00306273	+ 0,0000101748
21	1,0032977138		
22	1,0035510321		
23	1,0038124293		
24	1,0040818264		
25	1,0043591459	1,00441809	+ 0,0000589441
26	1,0046443116		
27	1,0049372491		
28	1,0052378851		
29	1,0055461483		
30	1,0058619681	1,00592425	+ 0,0000622819
31	1,0061852762		
32	1,0065160052		
33	1,0068540897		
34	1,0071994651		
35	1,0075520707	1,00758127	+ 0,0000291993
40	1,0094214223	1,00943937	+ 0,0000179477
45	1,0114629287	1,01142338	— 0,0000395487
50	1,0136704155	1,01360053	— 0,0000698855
55	1,0160386365	1,01601008	— 0,0000285565
60	1,0185632223	1,01854121	— 0,0000220123
65	1,0212409307	1,02129300	+ 0,0000520693
70	1,0240691454	1,02410703	+ 0,0000378846
75	1,0270463773	1,02700704	— 0,0000393374
80	1,0301720139	1,03010391	— 0,0000681039
85	1,0334463697	1,03352564	+ 0,0000792703
90	1,0368706852	1,03683554	— 0,0000351452
95	1,0404471284	1,04044010	— 0,0000070284
100	1,0441787935	1,04420981	+ 0,0000310165

Es wechseln hierbei nicht bloss die positiven und negativen Differenzen, sondern von beiden sind gerade zehn vorhanden, deren Summen sich fast vollständig aufheben, indem beide zu einander addirt nur einen Rest von —0,0000009389 lassen, so dass also weder gegen die Versuche noch gegen die Berechnung hieraus die geringste Einwendung statt finden kann. Es folgt hiernach als Resultat dieser Untersuchungen, dass Wasser, welches Salze aufgelöset enthält, keinen Punct der grössten Dichtigkeit zwischen 0° und 100° der Centesimalskale hat, vielmehr gleichmässig zunehmend durch Wärme ausgedehnt wird, wobei die absolute Ausdehnung desselben der des reinen Wassers bis auf eine nicht sehr bedeutende Grösse gleich ist. Das Volumen des reinen Wassers ist nämlich bei 100° C. = 1,0430387833, des Seewassers = 1,0441787935. Hierbei ist aber zu berücksichtigen, dass die Einheit von jenem bei 3°,78 von diesem aber bei 0° C. liegt, so dass also der Siedepunct des Seewassers um 3°,78 tiefer herabgerückt werden müsste, wenn seine Ausdehnung der des reinen Wassers gleich seyn soll. Nimmt man mit einer hierfür hinlänglichen Genauigkeit die Differenz der Vermehrung des Volumens bei Seewasser für 95° und für 100° C. multiplicirt diese mit $\frac{3,78}{5}$ und zieht die erhaltene Grösse von der Vermehrung des Volumens bei 100° ab, so erhält man die absolute Ausdehnung für 100° — 3°,78 oder für 96,22 = 0,0413576547, welche der Volumens-Vermehrung des reinen Wassers bei 100° C. gleich seyn müsste, wenn beide sich ganz gleichmässig ausdehnten. Es ist aber die letztere Grösse um 0,0016811284 zu klein, so dass also hiernach die absolute Ausdehnung des reinen Wassers durch einen Zusatz von Salzen vermindert wird, was mir mit theoretischen Gründen vollkommen im Einklange zu stehen scheint.

Die Dichtigkeit des Seewassers bei verschiedenen Temperaturen leicht übersehen zu können, ist zwar ungleich weniger wichtig, als die des reinen Wassers. Um aber auch in diesem Stücke der vorliegenden Abhandlung eher einen zu hohen Grad der Vollständigkeit zu ertheilen, als sie dem Vorwurfe der Mangelhaftigkeit auszusetzen, füge ich eine tabellarische Uebersicht der Dichtigkeiten des Seewassers für die berechneten Temperaturen bei:

t	Volumen des Seewassers.	Dichtigkeit.	t	Volumen des Seewassers.	Dichtigkeit.
0	1,0000000000	1,0000000000	25	1,0043591459	0,9956597738
1	1,0000627767	0,9999372271	26	1,0046443116	0,9953771682
2	1,0001356346	0,9998643837	27	1,0049372491	0,9950888982
3	1,0002184637	0,9997815840	28	1,0052378851	0,9947794614
4	1,0003111550	0,9996884198	29	1,0055461483	0,9944844418
5	1,0004136016	0,9995865694	30	1,0058619681	0,9941721943
6	1,0005256976	0,9994744241	31	1,0061852762	0,9938522746
7	1,0006473388	0,9993530700	32	1,0065160052	0,9935251851
8	1,0007784224	0,9992221832	33	1,0068540897	0,9931826710
9	1,0009188473	0,9990819962	34	1,0071994651	0,9928520960
10	1,0010685134	0,9989326271	35	1,0075520707	0,9925045355
11	1,0012273226	0,9988282117	40	1,0094214223	0,9906665035
12	1,0013951780	0,9986708842	45	1,0114629287	0,9886669809
13	1,0015719844	0,9984304828	50	1,0136704155	0,9864251583
14	1,0017576467	0,9982454889	55	1,0160386365	0,9842145407
15	1,0019520755	0,9980517276	60	1,0185632223	0,9817750907
16	1,0021551772	0,9978640344	65	1,0212409307	0,9792008623
17	1,0023668632	0,9976487362	70	1,0240691454	0,9764965623
18	1,0025871455	0,9974182751	75	1,0270463773	0,9736658657
19	1,0028156379	0,9972021399	80	1,0301720139	0,9707116739
20	1,0030525552	0,9969567345	85	1,0334463697	0,9676360858
21	1,0032977138	0,9967132250	90	1,0368706852	0,9644404208
22	1,0035510321	0,9964615331	95	1,0404471284	0,9611252438
23	1,0038124293	0,9962031461	100	1,0441787935	0,9576903939.
24	1,0040818264	0,9959349645			

Eine von denjenigen Fragen, welche man meistens mit den Untersuchungen über die Ausdehnung der Flüssigkeiten durch Wärme zu verbinden pflegt, betrifft den Punct ihrer grössten Dichtigkeit. Wenn man die Formeln für jene Bestimmung bis zur vierten Potenz aufsucht, so führt die Beantwortung dieser Frage auf mühsame Rechnungen, und ausserdem wird vorausgesetzt, dass durch die Formel das Verhalten der fraglichen Flüssigkeit auch unter dem Nullpuncte des hunderttheiligen Thermometers und bis zu ihrem eigenen Gefrierpuncte genau ausgedrückt werde. Dass beim Wasser dieser Punct sehr genau gefunden werden könne, unterliegt keinem Zweifel, denn er fällt innerhalb der Grenze der Beobachtungen, durch welche die Curve seiner Ausdehnung durch Wärme bestimmt wird; allein bei den übrigen Flüssigkeiten verhält sich die Sache ganz anders, in so fern überhaupt das Verhalten derselben nahe vor ihrem Festwerden durch Kälte noch gar nicht genau bekannt ist. Wenn inzwischen die aufgefundene Formel den Gang der Ausdehnung der Flüssigkeiten durch Wärme genau ausdrückt, und dieser analytische Ausdruck nicht durch noch fehlende Glieder für höhere Potenzen von t für sehr hohe und weit unter 0° C. liegende Temperaturen mangelhaft ist, so muss allerdings der Punct ihrer grössten Dichtigkeit durch dieselbe zu finden seyn, ohne dass hieraus zugleich bestimmt wird, ob sie bei oder unter diesem Puncte gefrieren oder sich auf sonstige Weise verändern. Es scheint mir daher nicht bloss interessant, sondern auch zur Vollständigkeit der vorliegenden Untersuchungen erforderlich, auch diese Bestimmung für die einzelnen Flüssigkeiten in genäherten Werthen beizufügen.

Für Seewasser ist nach der oben mitgetheilten Formel in hinlänglich genäherten Werthen

$$\Delta V = 0{,}00005769938\, t + 0{,}0000050963866\, t^2 - 0{,}0000000187 3304\, t^3 \\ + 0{,}00000000000617807\, t^4.$$

Setzt man in dieser Formel $\frac{\Delta V}{dt} = 0$, so erhält man für den Punct der grössten Dichtigkeit

$$0 = 0{,}5769938 + 0{,}101927732\, t - 0{,}0005619912\, t^2 + 0{,}000002471228\, t^3$$

und hieraus

$$0{,}5769938 = -\, 0{,}101927732\, t + 0{,}0005619912\, t^2 - 0{,}000002471228\, t^3.$$

Derjenige Werth für $-t$, welcher dieser Gleichung am nächsten genügt, ist —5°,25, indem 5°,5 schon zu gross ist. Diese Bestimmung steht vollkommen im Einklange mit denjenigen gehaltreichen Untersuchungen, welche Herr

Staatsrath Parrot schon früher über das Gefrieren der Salzlösungen angestellt *) und späterhin durch die Beobachtungen über das Gefrieren des Seewassers bestätigt gefunden hat **), wonach die Krystallisation des Seewassers bei 4° R. anfängt. Ein unvollkommener Versuch, welchen ich früher einmal angestellt habe, kann gleichfalls diese Angabe als richtig bestätigen. Ich füllte nämlich eine etwa 1,5 Z. im Durchmesser haltende Kugel an einer graduirten Röhre, deren Grade Tausendstel des Inhalts der Kugel bezeichneten, mit künstlichem Seewasser, und hing sie im Freien neben ein Thermometer auf, um die Zusammenziehung dieser Flüssigkeit durch Kälte zu messen. Um Mittag beim Anfange des Versuches stand das Thermometer auf — 1° R., und als das Seewasser gleichfalls diese Temperatur angenommen haben mochte und die Kälte zunahm, hatte ich das Vergnügen zu beobachten, dass sich das Volumen desselben verminderte. Dieses dauerte fort, bis das Thermometer auf — 3,5 R. herabgegangen war, als ich auf etwa zwei Stunden abgerufen wurde, und bei meiner Zurückkunft die Kugel zersprungen, das Seewasser derselben jedoch nicht als Eis, sondern ohne Zweifel durch Herabfallen in den Garten aus der Höhe des zweiten Stockes (Parterre ungerechnet) verschüttet, in der Röhre aber einen bedeutend über den früheren, bei meinem Weggange beobachteten, Stand hinaufgetriebenen Eiscylinder vorfand. Sonach bürgt also die genaue Uebereinstimmung des durch Beobachtung und Berechnung nach der mitgetheilten Formel gefundenen Punctes der grössten Dichtigkeit des Seewassers gleichfalls für die Zuverlässigkeit der Rechnung.

3) *Ausdehnung des Alkohol's.*

Eine Untersuchung der Ausdehnung des Alkohols durfte von uns wohl auf keine Weise übergangen werden, indess konnten wir selbst dennoch mit dieser gerade am wenigsten zufrieden seyn, wovon ich die Gründe nachher näher angeben werde, wenn ich zuvor erst einige Bemerkungen über die Bestimmung des specifischen Gewichts bei dieser und den übrigen von mir gewogenen Flüssigkeiten werde vorausgeschickt haben.

---

*) Gilb. Ann. der Phys. Bd. 57. p. 144 flgd.

**) Physikalische Beobachtungen des Capitain-Lieutenants Baron v. Wrangel u. s. w. Berl. 1827. p. 32.

Es ist schon aus den älteren Untersuchungen von de Luc, Tralles und anderen hinlänglich bekannt, dass die Ausdehnung des Weingeistes durch Wärme sehr verschieden ist, je nachdem derselbe mehr oder weniger Wasser enthält. Der von uns gebrauchte Alkohol war von meinem schon genannten Collegen L. Gmelin nach Richter's Methode bereitet und gewiss sehr rein; auch wurde von uns die gehörige Vorsicht angewandt, damit er beim Füllen des Röhrchens kein Wasser aus der Luft anzöge oder auf sonstige Weise dadurch verunreinigt werden mögte, ausser was beim Eingiessen aus dem ihn enthaltenden Glase in ein anderes von uns zur Füllung des Röhrchens eingerichtetes und beim nachherigen Wiegen geschehen seyn dürfte, was aber als unbedeutend sicher vernachlässigt werden kann. Die nachherige Untersuchung zeigte das specifische Gewicht desselben = 808 bei 12°,5 C. Hiernach wäre derselbe also nicht absolut rein gewesen, denn wenn dieses Gewicht nach unsern Versuchen auf 20° C. reducirt wird, bei welcher Temperatur Richter und Meissner das spec. Gewicht desselben = 792 und 791 bestimmt haben, so beträgt es 801 und weicht also noch um 0,010 von jener Bestimmung ab. Ob nun diese Letztere absolut richtig sey, kann ich nicht ausmitteln, bin jedoch überzeugt, dass Meissners Pykrometer so scharfe Bestimmungen nicht gewährt, als das von mir gebrauchte Werkzeug, aus Gründen, welche ich bereits im neuen Wörterbuche der Physik Th. I. pag. 393 angegeben habe, und welche sich hauptsächlich darauf beziehen, dass sich die Temperatur eines kleinen Gläschens zusammt der enthaltenen Flüssigkeit nothwendig ändern muss, wenn man dasselbe mit den warmen Fingern manipulirt. Dagegen kann ich die absolute Richtigkeit dieser und der folgenden von mir mitzutheilenden Bestimmungen des specifischen Gewichtes auf das strengste verbürgen. Ich bediente mich nämlich dazu eines Hombergschen Aräometers, wie dieses im genannten Wörterbuche Th. I. p. 391 beschrieben ist. Bei dem kleinen zur Aufnahme und zum Wägen der Flüssigkeiten bestimmten Gläschen besteht sowohl der Hals des Eingiesse-Trichterchens, als auch die seitwärts zum Entweichen der Luft angebrachte Röhre aus einem Haarröhrchen, das Gläschen selbst ist aus Glas sehr dünn geblasen, und fasst bis an die beiden Knöpfchen am Halse und am seitwärts angebrachten Röhrchen genau 1000 Gewichttheile reines Wasser bei 12°,5 C. Temperatur. Diese Gewichttheilchen betragen etwas mehr als halbe Grane kölnisch, und da die Waage bei dem geringen Totalgewichte noch Zehntheile der gebrauchten Gewichttheilchen anzeigt, so lässt sich das specifische Gewicht der Flüssigkeiten damit bis auf 0,0001 genau bestimmen, das Gewicht des Wassers = 1 genommen. Um aber diese Bestimmung völlig scharf zu erhalten, setzte ich die Waage und die Flüssigkeit in ein Zimmer, dessen Temperatur ich durch Oeffnen der Thüre eines daran stossenden geheizten Zimmers nach einem auf dem Arbeitstische liegenden Thermometer genau auf die genannte Temperatur brachte, füllte dann das vorher tarirte und schon auf der Waage stehende Gläschen bis an die beiden Knöpfchen mit der zu wägenden Flüssigkeit, liess alles so einige Minuten stehen, um die durch Berührung mit der Hand etwa veränderte Temperatur wieder herzustellen, nahm dann den absichtlich gelassenen geringen Ueberschuss der Flüssigkeit, welcher über den Normalstand an der Grenze der Knöpfchen hervorragte, vermittelst eines Stückchens in eine feine Spitze zusammen gedrehten Druckpapiers weg und bestimmte durch Auflegen der Gewichtheilchen auf die andere Waagschale das specifische Gewicht. Der hiermit näher angegebene, von mir bei allen nachfolgenden Wägungen gebrauchte Apparat, lässt hinsichtlich der möglichen Genauigkeit der Bestimmungen nichts zu wünschen übrig; allein er erfordert eine höchst zarte Behandlung hauptsächlich in Rücksicht auf die nach jedem Experimente erforderliche Reinigung des Gläschens, welche etwas schwierig ist, weil die feinen Röhrchen das Ausgiessen der Flüssigkeiten ungemein erschweren. Wer indess mit einer feinen und sicheren Hand zu experimentiren sich gewöhnt hat, wird denselben wegen seiner unübertrefflichen Genauigkeit gern gebrauchen.

Wir liessen die Versuche mit Weingeist sogleich auf die mit reinem Wasser angestellten folgen, und wählten dazu das Röhrchen *A*. Es darf dabei wohl kaum bemerkt werden, dass dieses vor dem Einbringen des Alkohols nicht bloss durch Erhitzung von dem Reste des an den Wandungen hängenden Wassers sorgfältig befreiet, sondern auch zu wiederholtenmalen mit Alkohol gefüllt und wieder ausgeleert wurde, um die letzten Antheile der vorher gebrauchten Flüssigkeit heraus zu schaffen. Es bedarf hierzu nur der erforderlichen Sorgfalt und anhaltenden Geduld, um bei den wiederholten Operationen nicht zu ermüden, die uns indess weit weniger schwierig erscheinen, als eine für jede Flüssigkeit aufs neue anzustellende mühsame und grossen Zeitaufwand erfordernde Abwägung. Uebrigens kann das noch jetzt vorhandene, so anhaltend gebrauchte Röhrchen *B*, welches zur Verhütung des eindringenden Staubes gegenwärtig mit Weingeist gefüllt und vollkommen klar ist, zum Beweise dienen, dass sich auch so feine Apparate durch die geeigneten Mittel hinlänglich reinigen lassen.

Die äussern Bedingungen der Versuche mit Alkohol unterliegen also bis so weit durchaus keinen Einwendungen, um so mehr aber ist zu bedauern, dass der eine Theil der Versuche, nämlich die unter dem Gefrierpuncte liegenden Beobachtungen uns selbst keinesweges genügen können. Eine blosse Vergleichung der Differenzen zwischen den erhaltenen Grössen bietet so viele Unregelmässigkeit und eine so auffallende Abweichung von jedem festen Gesetze dar, dass es am gerathensten ist, sie für die Berechnung gar nicht zu benutzen. Schon bei den Beobachtungen überzeugten wir uns hiervon, und erhielten daher durch öftere Versuche zwischen — 28° C. und 0° nicht weniger als 23 Beobachtungen, verwandten hierauf einen ganzen Tag, und müssen dennoch jetzt selbst die als genauer bezeichneten durchaus verwerfen, weil auch diese sich mit Sicherheit zu keinem übereinstimmenden Gesetze vereinigen lassen, obgleich verschiedene derselben sehr richtig seyn mögen. Es waren nämlich diese Versuche die ersten, welche wir mit Hülfe kaltmachender Mischungen anstellten, indem wir eine solche zuerst in einer grossen Schüssel bereiteten, und in diese wieder ein anderes, gleichfalls mit einer solchen Mischung gefülltes, Gefäss setzten, welches zur Aufnahme des Röhrchens nebst dem Thermometer diente. Allein das starke Schwanken des Steigens und Fallens theils des Quecksilbers im Thermometer, theils der Flüssigkeit im Röhrchen, brachte uns fast zur Verzweiflung; jedoch hofften wir bei späterer Prüfung die zuverlässigsten Beobachtungen aus der grossen Menge sicher aufzufinden und benutzen zu können, finden es jedoch gegenwärtig gerathener, lieber alle wegzulassen, um das vorhandene Gute und Sichere nicht durch das Ungewisse zu trüben. Wir haben zwar später eine ähnliche Methode für die Beobachtungen unter dem Gefrierpuncte befolgt, änderten sie jedoch in so fern ab, dass wir beide kaltmachende Mischungen auf eine, längere Zeit dauernde, Temperatur brachten, und dann nur für diese die Grösse des Volumens der Flüssigkeit im Röhrchen bestimmten. Hierdurch erhielten wir zwar eine geringere Menge, aber ungleich zuverlässigere Beobachtungen.

Nach meiner festen Ueberzeugung erwächst indess aus der Mangelhaftigkeit dieser Versuche in niederen Temperaturen durchaus kein wesentlicher Nachtheil. Es folgt nämlich schon aus früheren Versuchen, namentlich mit Alkohol, und geht aus den unsrigen mit dem höchsten Grade der Gewissheit hervor, dass mit Ausnahme des reinen Wassers jede Flüssigkeit, so lange sie ihren Aggregatzustand nicht ändert, das ihr eigenthümliche Gesetz der Ausdehnung durch Wärme, ohne Abweichung befolgt, und da unsere Versuche über die Vermehrung des Volumens beim Alkohol in den Temperaturen über dem Gefrierpuncte unter die allergenauesten gehören, so kann ich es durchaus nicht für zweifelhaft halten, dass sich das Gesetz der Ausdehnung desselben aus ihnen mit vollkommener Schärfe finden und auch auf die Temperaturen unter dem Gefrierpuncte ausdehnen lasse, um so mehr als es bei der Unzuverlässigkeit der bekannten Angabe Huttons und einigen von mir in Verbindung mit meinem Collegen L. Gmelin vermittelst der flüssigen schwefligen Säure nach Bussy angestellten Versuchen sehr zweifelhaft ist, ob sich durch die bis jetzt bekannten Mittel ein Grad der künstlichen Kälte erreichen lasse, wodurch der absolute Alkohol seinen Aggregatzustand ändert. Eben deswegen, und mit besonderer Rücksicht auf die von uns in den Temperaturen unter dem Gefrierpuncte des Wassers angestellten Beobachtungen, wodurch im Allgemeinen sehr sichtbar wurde, dass sich das Volumen des Alkohols stets der Wärmeabnahme proportional verminderte, ohne dass jedoch die erhaltenen Grössen uns zur Begründung eines Gesetzes genügend schienen, trage ich nicht das mindeste Bedenken, das aus unsern Versuchen über dem Gefrierpuncte des Wassers erhaltene Gesetz der Ausdehnung dieser Flüssigkeit auch auf die Temperaturen unter dem Gefrierpuncte anzuwenden.

Die Versuche mit Weingeist sind auf gleiche Weise, als die mit Wasser, dazu geeignet, um die Genauigkeit der Methode des Experimentirens durch Vergleichung der verschiedenen Beobachtungen bei den nämlichen Temperaturen zu prüfen. Indem sie nämlich unter die frühesten gehören, welche wir anstellten, als wir durch wiederholte Prüfungen uns noch nicht factisch überzeugt hatten, dass die gewählte Methode des Herausnehmens eines Theils der Flüssigkeit zur Erhaltung eines neuen Anfangspunctes sehr sichere Resultate gäbe, wiederholten wir nach jeder Herausnahme mindestens drei der vorhergehenden Beobachtungen, um durch die Uebereinstimmung der Theilstrichmengen am Röhrchen, um welche sich die Flüssigkeit bei gleichen Temperaturdifferenzen vor und nach der Herausnahme ausdehnte, eine vorläufige ohngefähre Ueberzeugung von der Zuverlässigkeit unsers Verfahrens zu erhalten, und um zugleich in dem arithmetischen Mittel aus mehreren Beobachtungen eine sichere Grundlage zu haben, auf welcher die nachfolgende Reihe mit grösserer Zuverlässigkeit gebauet werden konnte. Späterhin fanden wir dieses überflüssig und konnten es auch bei der starken Ausdehnung mancher Flüssigkeiten nicht bewerkstelligen. Der Weingeist dagegen bietet folgende vergleichbare Resultate dar:

a) Für $t = 30^\circ$ ist $v = 1{,}0315265968$
b) - - - - $1{,}0316053854$
$\Delta = -\ 0{,}0000787886$

a) Für $t = 50^\circ$ ist $v = 1{,}0542761344$
b) - - - - $1{,}0541104412$
$\Delta = +\ 0{,}0001656932$

a) Für $t = 55^\circ$ ist $v = 1{,}0605894273$
b) - - - - $1{,}0605514591$
$\Delta = +\ 0{,}0000379682.$

Die Differenzen der zweiten gegen die ersten Beobachtungen sind also theils negativ, theils positiv, und reichen nur einmal mit der Einheit in die vierte Decimalstelle. Hier liegen also bei einer einzigen Flüssigkeit schon drei Prüfungen vor, woraus sichtbar hervorgeht, dass unsere Beobachtungen, einzeln genommen, bis zur vierten Decimalstelle völlig genau sind, eine Fehlergrenze, welche wir selbst so enge nicht erwarten durften.

Als wir mit unsern Beobachtungen dem Siedepuncte des Alkohols nahe gekommen waren, hätten wir einen Theil der Flüssigkeit aus dem Röhrchen nehmen und eine neue Reihe anknüpfen müssen. In der Voraussetzung aber, dass in dieser Gegend die Ausdehnungen aller Flüssigkeiten anfingen unregelmässig zu werden, brachen wir die Reihe ab, und gingen somit nur bis 72°,5 C. Sehr interessante Erfahrungen, welche wir späterhin rücksichtlich jenes obigen, sehr allgemein angenommen, Satzes machten, und von denen später ausführlicher die Rede seyn wird, belehrten uns zwar hierüber eines Besseren; allein wir müssen uns gegenwärtig wohl mit den erhaltenen Resultaten begnügen, welche übrigens zur Auffindung derjenigen Gleichung, wodurch das Gesetz der Ausdehnung des Alkohols ausgedrückt wird, hinreichend sind. Die zur Berechnung der gemachten Beobachtungen erforderlichen Grössen sind folgende. Für das Röhrchen *A*, den Nullpunct bei 8,2 Theilstrichen angenommen, ist

$$a = 5625{,}1696617336.$$

Weil aber dieser Punct für Weingeist bei 20,4 Theilstrichen lag, so ist

$$a = 5625{,}1696617336 + 12{,}2 = 5637{,}3696617336$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}0001773876931981.$$

Auf gleiche Weise ist

$$a + m' = 5638{,}7696617336$$

$$\frac{a\,(a+n')}{a\,(a+m')} = 0{,}000181845200104$$

$$a + m'' = 5625{,}8696617336$$

$$\frac{a\,(a+n')\,(a+n'')}{a\,(a+m')\,(a+m'')} = 0{,}000186157188617.$$

Die nach diesen Formeln berechneten Beobachtungen sind, mit Weglassung der bei den folgenden Berechnungen allerdings mit benutzten höheren Decimalstellen, in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

Weingeist.

t'	ϑ'	n'	$1 + \delta\frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
0	20,4	0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
5	48,3	27,9	1,0049491166	1,0001327225	1,0050824960
10	76,3	55,9	1,0099159720	1,0002654450	1,0101840492
15	104,8	84,4	1,0049715213	1,0003981675	1,0153856500
20	134,0	113,6	1,0201512419	1,0005308900	1,0206928300
25	163,6	143,2	1,0254019176	1,0006636125	1,0260823872
30	193,5	173,1	1,0307058097	1,0007963350	1,0315265986
t''	ϑ''	$n''-m'$	$A' + \frac{a+n'}{a(a+m')} + (n''-m')$	$1 + \delta t''$	Volumen.
30	51,4	29,6	1,0307845356	1,0007963350	1,0316053854
35	81,2	59,4	1,0362035225	1,0009290576	1,0371662152
40	112,7	90,9	1,0419316463	1,0010617800	1,0430379485
45	142,2	120,4	1,0472960797	1,0011945025	1,0485470775
50	172,9	151,1	1,0528787274	1,0013272250	1,0542761344
55	206,8	185,0	1,0590432797	1,0014599475	1,0605894273
t'''	ϑ'''	$n'''-m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumen.
50	48,0	29,1	1,0527132539	1,0013272250	1,0541104412
55	81,8	62,9	1,0590053669	1,0014599475	1,0605514591
60	114,4	95,5	1,0650740913	1,0015926700	1,0667704028
65	147,8	128,9	1,0712917414	1,0017253925	1,0731401401
70	181,8	162,9	1,0776210857	1,0018581150	1,0786234327
71,25	190,3	171,4	1,0792034218	1,0018912956	1,0812515146
72,5	199,7	180,8	1,0809532994	1,0019244762	1,0820335683

Die aus den Beobachtungen gebildeten Bedingungsgleichungen sind folgende:

$$\begin{aligned}
0{,}00513450252 &= 5a + 75b + 1250c + 22125d\\
0{,}01385254200 &= 13a + 435b + 14950c + 526125d\\
0{,}01633108025 &= 15a + 755b + 38250c + 1950125d\\
0{,}2185339756 &= 195a + 12725b + 833625c + 54820625d.
\end{aligned}$$

Die Elimination der unbekannten Coefficienten war bei diesen Gleichungen nicht schwer, jedoch will ich hier ein für allemal bemerken, dass bei dem gewählten Verfahren der Werth von *d* bis zu einer grossen Menge von Decimalstellen, mindestens bis 25, gesucht werden muss, damit der Einfluss der vernachlässigten Stellen auf die Bestimmung der folgenden Coefficienten völlig verschwinde. Indem dieses in gewisser Hinsicht von *c* und *b* gleichfalls gilt, so wurden auch diese, wenn gleich minder nothwendig, bis zu einer gleichen Zahl von Decimalstellen gesucht, und weil demnächst *a* sehr leicht zu finden ist, so wird man schón hiedurch von selbst geneigt, den Werth auch von diesem Coefficienten bis zu einer gleichen Zahl von Decimalstellen auszudehnen. Es ist also eigentlich nicht blosse Ostentation, wenn ich nunmehro auch die erhaltenen Grössen ganz hinsetze. Die auf solche Weise gefundenen Werthe sind demnach folgende:

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}000989666078712718093386\\
b &= 0{,}000003034892828083861736\\
c &= -0{,}00000039592400419004315\\
d &= 0{,}000000000363645868921277.
\end{aligned}$$

Um die Uebereinstimmung der nach dieser Formel berechneten und der durch die Beobachtung unmittelbar erhaltenen Werthe zu übersehen, möge die nachfolgende tabellarische Zusammenstellung beider und ihrer Unterschiede dienen:

Volumen des Weingeistes

t	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Unterschiede.
5	1,0050194808	1,0050824960	+ 0,0000630152
10	1,0101641939	1,0101840492	+ 0,0000198553
15	1,0154126271	1,0153856500	— 0,0000269771
20	1,0207487227	1,0206928300	— 0,0000558927
25	1,0261618778	1,0260823872	— 0,0000794906
30	1,0316469441	1,0315659911	— 0,0000809530
35	1,0372042283	1,0371662152	— 0,0000380131
40	1,0428394914	1,0430379485	+ 0,0001984571
45	1,0485639493	1,0485470775	— 0,0000168718
50	1,0543942725	1,0541932878	— 0,0002009847
55	1,0603525864	1,0605704432	+ 0,0002178568
60	1,0664664768	1,0667704028	+ 0,0003039260
65	1,0727689603	1,0731401401	+ 0,0003711798
70	1,0792985444	1,0786234327	— 0,0006751117

Die Summen der positiven und negativen Differenzen heben sich auf eine bewundernswürdige Weise auf, obgleich die einzelnen grösser sind, als die beim Wasser und Seewasser erhaltenen, wovon der Grund nicht weit zu suchen ist. Beim Wasser sind nämlich, die angewandte ausserordentliche Sorgfalt ungerechnet, drei Reihen von Beobachtungen vereinigt, und hierdurch schon die Beobachtungsfehler gegenseitig ausgeglichen, die Versuche mit Seewasser aber sind mit dem Röhrchen *B* angestellt, welches eine grössere Skale hat, womit also eine engere Fehlergrenze der einzelnen Beobachtungen verbunden ist. Die Summe der acht negativen Differenzen beträgt 0,0011742947 und die der sechs positiven 0,0011742902, so dass also, wenn beide addirt werden, nur — 0,0000000045 als unmessbar kleine Grösse übrig bleibt. Inzwischen geht hieraus hervor, dass die Formel das Gesetz der Ausdehnung des Alkohols durch Wärme hinlänglich genau ausdrückt, und daher zur Berechnung des Volumens dieser Flüssigkeit bei verschiedenen Temperaturen füglich gebraucht werden kann. Weil es aber bei vielen Gelegenheiten von Wichtigkeit ist, nicht bloss das Volumen, sondern auch die Dichtigkeit des Alkohols zu kennen, namentlich für Abwägungen solcher Körper in demselben, welche im Wasser löslich sind, so habe ich beides für die Normalgrösse = 1 bei 0° C. durch den schon genannten, im numerischen Calcule eben so geübten als zuverlässigen Fr. Hofmeister berechnen lassen, um meiner Abhandlung den möglichsten Grad der Vollständigkeit zu geben. Die nachfolgende Tabelle enthält beides.

Weingeist.

t	Volumen.	Dichtigkeit.	t	Volumen.	Dichtigkeit.
—50	0,9653257647	1,0359197252	—25	0,9779158364	1,0225828878
—49	0,9655474921	1,0356818338	—24	0,9786640867	1,0218010588
—48	0,9657974075	1,0354138375	—23	0,9794266222	1,0210055325
—47	0,9660748501	1,0351164708	—22	0,9802030004	1,0201040186
—46	0,9663791677	1,0347905184	—21	0,9809927875	1,0193754864
—45	0,9667097171	1,0344366900	—20	0,9817955581	1,0185410718
—44	0,9670658637	1,0340557324	—19	0,9826108977	1,0176968344
—43	0,9674469812	1,0336483750	—18	0,9834383926	1,0168405134
—42	0,9678524536	1,0332153380	—17	0,9842776501	1,0159734907
—41	0,9682816697	1,0327573384	—16	0,9851282775	1,0150962294
—40	0,9687340324	1,0322741501	—15	0,9859898935	1,0142091786
—39	0,9692089496	1,0317692593	—14	0,9868621251	1,0133127765
—38	0,9697058394	1,0312405673	—13	0,9877446083	1,0124074498
—37	0,9702241280	1,0306896841	—12	0,9886369877	1,0114936140
—36	0,9707632507	1,0301172807	—11	0,9895389167	1,0105716745
—35	0,9713226511	1,0295240195	—10	0,9904500573	1,0096420235
—34	0,9719017822	1,0289105528	— 9	0,9913700802	1,0087050436
—33	0,9725001049	1,0282775240	— 8	0,9922986652	1,0077611057
—32	0,9731170897	1,0276255659	— 7	0,9932355004	1,0068105697
—31	0,9737522153	1,0269553016	— 6	0,9941802828	1,0058537846
—30	0,9744049691	1,0262673444	— 5	0,9951327182	1,0048910881
—29	0,9750748482	1,0255623959	— 4	0,9960925208	1,0039228075
—28	0,9757613561	1,0248407499	— 3	0,9970594141	1,0029492585
—27	0,9764640072	1,0241032876	— 2	0,9980331299	1,0019707463
—26	0,9771823230	1,0235504807	— 1	0,9890134086	1,0009875657

t	Volumen.	Dichtigkeit.	t	Volumen.	Dichtigkeit.
0	1,000000000	1,000000000	36	1,0383247623	0,9630898119
1	1,0009926616	0,9990083228	37	1,0394484702	0,9620486533
2	1,0019911607	0,9980127962	38	1,0405754330	0,9610067356
3	1,0029952727	0,9970136721	39	1,0417061906	0,9599635761
4	1,0040047816	0,9960111927	40	1,0428394914	0,9589203403
5	1,0050194808	0,9960055895	41	1,0439767925	0,9578756995
6	1,0060391718	0,9939970888	42	1,0451177608	0,9568299741
7	1,0070636652	0,9929858802	43	1,0462635180	0,9557821550
8	1,0080927798	0,9919721875	44	1,0474112005	0,9547348731
9	1,0091263440	0,9909561929	45	1,0485639493	0,9536852766
10	1,0101641939	0,9899380774	46	1,0497209153	0,9526341577
11	1,0112062738	0,9889179150	47	1,0508822579	0,9515813903
12	1,0122521423	0,9878961557	48	1,0520481455	0,9505268407
13	1,0133019573	0,9868726620	49	1,0532187551	0,9494703690
14	1,0143554923	0,9858476713	50	1,0543942725	0,9484118286
15	1,0154126271	0,9848213163	51	1,0555748860	0,9473510721
16	1,0164732511	0,9837937190	52	1,0567608179	0,9462879236
17	1,0175372619	0,9827649929	53	1,0579522591	0,9452222360
18	1,0186045658	0,9817352721	54	1,0591494390	0,9441538306
19	1,0196750781	0,9807045611	55	1,0603525864	0,9430825301
20	1,0207487227	0,9796730358	56	1,0615619392	0,9420085147
21	1,0218254323	0,9786407427	57	1,0627777438	0,9409305058
22	1,0229051482	0,9776077495	58	1,0640002565	0,9398493974
23	1,0239878204	0,9765741155	59	1,0652297411	0,9387646265
24	1,0250734077	0,9755398906	60	1,0664664768	0,9376759811
25	1,0261618778	0,9745051163	61	1,0677107282	0,9365832651
26	1,0272532070	0,9734698253	62	1,0689628007	0,9354862483
27	1,0283473810	0,9724340417	63	1,0702229907	0,9343847111
28	1,0294443919	0,9713977830	64	1,0714916050	0,9332784273
29	1,0305442410	0,9703610581	65	1,0727689603	0,9321671646
30	1,0316469441	0,9693238619	66	1,0740553818	0,9310506860
31	1,0327525177	0,9682861885	67	1,0753512039	0,9299287492
32	1,0338609913	0,9672480231	68	1,0766567691	0,9288011079
33	1,0349724019	0,9662093396	69	1,0779724302	0,9276767865
34	1,0360867960	0,9651701034	70	1,0792985444	0,9265277019
35	1,0372042283	0,9641302770			

Weingeist wird bekanntlich auch zu Thermometern angewandt, und es frägt sich, ob und in wieweit er hierzu nach den Resultaten der eben mitgetheilten Untersuchungen tauglich ist. Zuvörderst ist zu bemerken, wie schon aus den bekannten Versuchen von de Lüc folgt, dass mit Wasser vermischter Weingeist eine ganz unregelmässige Ausdehnung hat, und die gewöhnlichen verkäuflichen Weingeistthermometer herumziehender Händler sind daher überhaupt verwerflich, indem man versichert seyn muss, dass diese Apparate, sobald sie zu physikalischen Versuchen gebraucht werden sollen, mit absolutem oder diesem mindestens sehr nahe kommendem Alkohol gefüllt sind. Es wird sich ferner aus den nachfolgenden Untersuchungen ergeben, dass die Ausdehnung der Flüssigkeiten auch über ihren Siedepunkt hinaus das ihnen zukommende regelmässige Gesetz befolgt, und man könnte diesemnach die Weingeistthermometer immerhin bis 100° C. graduiren, wenn dieses nicht aus anderen, sogleich zu erörternden Gründen zu Unrichtigkeiten führen oder mindestens sehr schwierig seyn würde; indess werden erfahrene Künstler die für wissenschaftliche Zwecke bestimmten Werkzeuge dieser Art nicht über 70°, bis höchstens 80° C. graduiren, da ihr Gebrauch in der Regel nur für die Grade unter dem Gefrierpuncte des Wassers und meistens nur für sehr niedrige Temperaturen bestimmt ist. Solche Künstler bestimmen dann die festen Puncte dieser Thermometer nicht durch Eintauchen in siedendes Wasser und schmelzenden Schnee, sondern sie bezeichnen auf der Skale durch Vergleichung mit einem sorgfältig geprüften Richtthermometer das Intervall zwischen etwa 10° und 40° oder 50° C. und tragen hiernach dann die Skale auf, welches Verfahren ungleich sicherer ist. Endlich behauptet Tralles,*) die Ausdehnung des absoluten Alkohols sey nach seinen, mit grösster Sorgfalt angestellten, Versuchen zwischen — 26°,11 und 37°,22 ganz gleichmässig, und betrage für 1° C. 0,000846 seines Volumens.

Dass diese Behauptung indess mit der Wahrheit nicht übereinstimmen könne, geht nicht bloss aus der Uebersicht der hier mitgetheilten Versuche hervor, sondern folgt auch schon an sich aus der Natur der Sache, indem es unmöglich ist, dass die Ausdehnung einer Flüssigkeit in einem solchen Umfange der Temperaturdifferenzen ganz gleichmässig seyn, und dann in einem solchen Grade zu- oder abnehmen sollte, als nicht bloss aus unseren, sondern auch aus allen anderen Versuchen hervorgehen würde, wenn noch obendrein die ganze unverkennbare Unregelmässigkeit der Ausdehnung hiernach auf die, über jener Temperatur liegenden, Grade vertheilt werden müsste. Es lässt sich indess zugleich auch leicht zeigen, dass die Abweichung des absoluten Alkohols von einer gleichmässigen Ausdehnung, namentlich in der Gegend des Gefrierpunctes des Wassers, geringer ist, als dass sie in den durch Tralles angestellten Versuchen wahrnehmbar seyn könnte. Ausserdem ist aber auch die durch Tralles angegebene absolute Grösse der Volumensvermehrung zu geringe, und verdienen unsere Versuche in dieser Hinsicht weit mehr Zutrauen, indem bei ihnen an einen constanten Fehler gar nicht zu denken ist, da der von uns gebrauchte Apparat nicht bloss zu Versuchen mit anderen Flüssigkeiten benutzt, sondern namentlich beim Wasser auch mit dem zweiten von uns angewandten verglichen wurde, bei welcher Vergleichung ein etwa vorhandener constanter Fehler des Röhrchens *A* oder der Beobachtungsmethode nothwendig zum Vorschein kommen musste, was aber im mindesten der Fall nicht ist.

---

*) Gilb. Ann. Bd. XXXVIII, S. 364.

Der alte ehrwürdige Réaumur hat bekanntlich bei seinen zur endlichen Fixirung der Thermometerskalen angestellten Versuchen gefunden, dass sich der Weingeist zwischen den seit jener Zeit angenommenen festen Puncten der Thermometerskalen um 0,08 seines Volumens ausdehne, und die Uebersicht unserer Versuche ergiebt, dass dieses der Wahrheit so nahe kommt, als eine richtige Messung mit den von jenem sorgsamen Experimentator gebrauchten Apparaten nur immer möglich war. Nach dieser Bestimmung würde nämlich auf 1° R. 0,001 der Volumensvermehrung kommen, und dieses ist sehr nahe der Fall, wenn man auf die von Réaumur unbeachtete Ausdehnung des Glases keine Rücksicht nimmt.

Ausserdem geht aber aus der mitgetheilten Tabelle in Beziehung auf die Weingeistthermometer noch Folgendes hervor. Wenn das Volumen des Alkohols bei 0° C. = 1 gesetzt wird, so ist es mit Weglassung der höheren Stellen bei 1° = 1,00099, welches von 1,001 um eine unmessbare Grösse abweicht; bei 2° ist dasselbe = 1,00199, und es wächst also hier genau um 0,001 und eben so bei 3°, indem es = 1,00299 ist. Setzt man also ohne Rücksicht auf die verschwindenden Differenzen der höheren Decimalstellen 0,00099 = 0,001; 0,00199 = 0,002 und 0,00299 = 0,003, so wächst das Volumen für 1° C. um 0,001 der Einheit, und dieses geht in Beziehung auf nicht mehr als drei Decimalstellen regelmässig fort bis 24°, wo das Volumen um 0,025 vermehrt ist. Wird dieser Unterschied bei einem empirisch graduirten Thermometer auf alle durchlaufene Grade vertheilt, so beträgt er für jeden einzelnen Grad $\frac{1}{22}$stel oder ohngefähr 0,05 eines Grades, eine auf gewöhnliche Weise nicht wahrnehmbare Grösse. Hieraus ergiebt sich also, dass ein Weingeistthermometer bis mindestens 25° C. mit einem Quecksilberthermometer völlig zu harmoniren scheinen kann. Wird also die Vermehrung des Volumens für 1° C. = 0,001 angenommen, so wachsen die Werthe der höheren Decimalstellen bei folgenden Graden gleichfalls zu 0,001 an, nämlich

1 — 24 — 34 — 42 — 48 — 54 — 58 — 63 — 66 — 70.

Diese Zahlen bilden keine mit gleichmässigen Differenzen fortschreitende Reihe und können dieses auch nicht, weil auf die höheren Stellen keine Rücksicht genommen ist; indess folgt daraus, dass bei 70° sich schon ein Unterschied von mehr als 9 Graden (genauer = 9,3) zeigen müsste, wenn man bei einem Weingeistthermometer die unteren Grade genau bestimmt, und hiernach die ganze Skale getheilt hätte. Gewöhnliche Thermometermacher können mit Sicherheit darauf rechnen, dass ihre empirisch verfertigten Weingeistthermometer nicht höher hinauf, als bis zu etwa 50 Graden der hunderttheiligen Skale geprüft worden, und nicht einmal bis zu diesem Punkte, wenn sie zur Messung der Zimmerwärme, der äusseren Temperatur, der Hitze des Badewassers u. s. w.

bestimmt sind. Bis dahin beträgt die aus den höheren Decimalstellen folgende Zunahme der anfänglichen Volumensvermehrung 0,005, oder ein von 0° C. an nach der anfänglichen Volumensvermehrung des Weingeistes getheiltes Thermometer würde statt 50 Graden vielmehr 55 (genauer 55,5) zeigen. Werden diese 5 Grade auf die 50 Skalentheile gleichmässig vertheilt, so beträgt es auf jeden Grad ein Zehntheil, und sonach eine bei gewöhnlichen Beobachtungen noch immer verschwindende Grösse.

Für die Grade unter dem Gefrierpuncte des Wassers muss eine ähnliche Abweichung statt finden, und hier ist sie ungleich wichtiger, weil die Weingeistthermometer ganz eigentlich zur Bestimmung hoher Kältegrade benutzt werden. Wird also für — 1° C. die Volumensverminderung = 0,001 angenommen, so muss das Volumen, dieses bei 0° C. = 1 gesetzt, = 1 — 0,001 = 0,9990 werden, welches vollkommen mit dem berechneten Werthe übereinstimmt, jedoch ist die Verminderung etwas geringer, indem das Volumen nach Rechnung = 0,999034086 ist. Wird dieser Unterschied vernachlässigt, also unter der Voraussetzung, dass die Theilung der Skale nach den Graden nahe über dem Gefrierpuncte des Wassers gemacht wäre, wo sie sehr nahe genau 0,001 des Volumens für 1° C. betragen würde, so müsste unter Voraussetzung einer gleichmässigen Zusammenziehung des Weingeistes dieses Volumen bei — 50° C. genau 1 — 0,05, also 0,95 betragen. Statt dessen aber ergiebt die Berechnung, mit Weglassung der höheren Decimalstellen, 0,965, und da die Grade der Skale der Volumensverminderung parallel laufen, so folgt, dass die Temperatur 51°,5 betragen muss, wenn das Thermometer 50° zeigt. Wäre aber ein solches Weingeistthermometer auf die Weise graduirt, dass man den Stand des Weingeistes bei 0° C. und bei 50° C. beobachtet, und die hiernach bestimmte Länge der Skale für 50 Grade auf den unter 0° C. liegenden Theil derselben aufgetragen hätte, wie es gewöhnlich geschieht, so kämen zu jenen 1°,5 noch 5°, und die Temperatur würde also in genähertem Werthe = 56°,5 (genauer = 57°) seyn, wenn die Skale 50° zeigte. Hieraus ergiebt sich von selbst, dass Weingeistthermometer, welche auf die hier angegebene gewöhnliche Weise graduirt sind, weder in den höheren noch in den niederen Graden richtig seyn können.

Es giebt allerdings Mittel zu einer richtigen Theilung der Skalen für Weingeistthermometer, deren praktische Ausführbarkeit aber grossen Schwierigkeiten unterworfen ist. So könnte man die Zehntel und allenfalls Hundertstel der Skalentheile auf einem Maassstabe vermittelst der Transversallinien oder eines Nonius auftragen, und nach der vorstehenden Tabelle die Grade mit Rücksicht auf die stets wachsenden Incremente des Volumens bestimmen. Ungleich schwieriger würde es seyn, die der Gleichung für die Ausdehnung des Weingeistes zugehörige Curve der dritten Ordnung für ein zu theilendes Thermometer zu zeichnen, und hiernach die Theilung aufzutragen, eine für Skalen von verschiedener Länge brauchbare allgemeine Construction wüsste ich aber für jetzt nicht anzugeben. Es bleibt daher am einfachsten und leichtesten, die genau calibrirten, hauptsächlich für die Bestimmung der Temperaturen unter 0° C. geeigneten Weingeistthermometer auf folgende Weise empirisch zu theilen. Man bestimme genau den Nullpunkt des zu graduirenden Thermometers, und dann den Stand des Weingeistes nach einem geprüften Quecksilber-Normalthermometer von 20 zu 20 Graden, oder grösserer Genauigkeit wegen von 10 zu 10 Graden, und theile die Zwischenräume in gleiche Theile, so wird die Abweichung der Skale von einer absolut richtigen unmerklich seyn. Da aber dieses Verfahren für die Grade unter dem Gefrierpuncte des Wassers nicht wohl anwendbar ist, so würde es am gerathensten seyn, den Stand des Weingeistes bei — 20° genau zu erhalten, die zwischen diesem und dem Gefrierpuncte des Wassers befindliche Länge bis — 40° und dann bis — 60° aufzutragen und in gleiche Theile zu theilen, denn in diesem Falle würde die Abweichung von der absolut richtigen Skale beim Gefrierpuncte des Weingeistes (nach der sogleich folgenden Bestimmung, nicht mehr als etwa 1° C. betragen.

Ist der Künstler im Besitze einer genauen und hinlänglich feinen Theilmaschine, so lässt sich die Skale mit aller erforderlichen Schärfe auf folgende Weise auftragen. Es sey der Stand des Weingeistes bei 0° und bei 10° C. vollkommen genau bestimmt. Giebt die Maschine, welche mit einer Mikrometerschraube versehen seyn möge, für diese Länge der Skale m Umdrehungen, so gehören zu 1 Grade $\frac{m}{10}$ Umdrehungen. Es zeigt aber der Anblick der Tabelle, dass der zehnte Grad um 0,16 der einfachen Volumensvermehrung durch Summirung der Incremente jedes einzelnen der 10 Theile zugenommen hat, wenn die höheren Decimalstellen für die einzelnen Grade vernachlässigt werden. Hiernach geben $\frac{m}{10}$ (1 — 0,016) $=$ 0,984 $\frac{m}{10}$ $= n$ Umdrehungen die gesuchte Einheit, womit sich die Theilung für Grade über und unter dem Gefrierpuncte auf folgende Art bewerkstelligen lässt:

Für Grade über 0° C.

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° 9° 10°
n (0,99; 2; 3; 4; 5,01; 6,03; 7,06; 8,09; 9,12; 10,15.) ....

Für Grade unter 0° C.

— 1° — 2° — 3° — 4° — 5° — 6° .....
n (1 — 0,01; 2 — 0,03; 3 — 0,05; 4 — 0,09; 5 — 0,13; 6 — 0,18 ...)

und auf gleiche Weise nach der Anleitung der berechneten Tabelle, welche auch namentlich für verneinte Grade leicht noch weiter fortgesetzt werden könnte, wenn man es für diesen Zweck nöthig fände. Es versteht sich von selbst, dass man hierbei allezeit vom Anfangspunkte an rechnen muss, so dass also für 10 Grade über 0 im Ganzen 10,16 n, und für 6 Grade unter 0 überhaupt n (6 — 0,18) Umdrehungen gemacht sind. Die Ausdehnung und Zusammenziehung des Glases macht hierbei keine Schwierigkeiten; denn da dieselbe entweder überhaupt oder mindestens innerhalb der hierbei erforderlichen

Grenzen ganz gleichmässig ist,*) so wird hiernach die Säule des Weingeistes im Rohre des Thermometers bis zu den gemessenen 10 Graden um eben so viel kürzer, als die nächstfolgende von 10^c bis zu 20^c C. und so fort, so dass also diese Correction schon in der ursprünglichen Messung enthalten ist. Noch vollständiger aber lässt sich diese Correction dadurch erhalten, wenn der Künstler die festen Punkte bei 0^c und 50^c C. bestimmt, und die oben angegebene Methode der Skalen-Theilung befolgt.

Die Frage über den Punct der grössten Dichtigkeit, welche sowohl beim Wasser, als insbesondere auch beim Seewasser zu höchst interessanten, und mit der Erfahrung sehr genau übereinstimmenden, Resultaten geführt hat, ist beim Weingeist noch ungleich wichtiger. Es lässt sich nämlich nichts anders erwarten, als dass auch diese Flüssigkeit nahe vor oder im Gefrierpuncte ihre grösste Dichtigkeit erhält. Bis jetzt behauptet indess bloss Hutton, dass er Alkohol von 0,798 spec. Gewicht bei — 110° F. = — 79^c C. zum Gefrieren gebracht habe.**) Es ist indess seitdem niemandem gelungen, nach dem von ihm nicht deutlich beschriebenen Verfahren dieses Resultat gleichfalls zu erhalten, Parry dagegen berichtet, dass auf dem Verdecke seines Schiffes bei der Melville-Insel in einer Temperatur, welche — 45° C. und auf kurze Zeit — 48°,5 C. als Maximum erreichte, der stärkste Conjac zu einer syrupartigen Masse gestand, wonach man schliessen sollte, dass der Gefrierpunct, oder mindestens der Punct der grössten Dichtigkeit des Weingeistes nicht so sehr tief unter dieser Temperatur liegen könne. Um so richtiger ist es daher, den Punct der grössten Dichtigkeit auch für Weingeist nach der Formel zu suchen und mit diesen wenigen Angaben zu vergleichen. Wird also die Gleichung für die Ausdehnung des Alkohols durch die Wärme differentiirt, so ist $\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}00098966607871 + 0{,}000006069785656\,t$

---

*) Man nahm bisher sehr allgemein an, dass die Ausdehnung der festen Körper den Zunahmen der Wärme direct proportional, oder dass $\Delta v = xt$ sey, und hierfür entscheiden auch die meisten Versuche. Hällström, Kämtz und einige andere sind entgegengesetzter Meinung, und glauben, dass $\Delta v = xt + yt^2 + zt^3 + \ldots\ldots$ sey. Aus theoretischen Gründen pflichte ich den letzteren jetzt bei; allein da y; z; .... sehr kleine Grössen sind, so wachsen sie zwischen 0° und 100° C. noch nicht so, dass sie einen messbaren Einfluss äussern könnten, und man darf daher insbesondere für das Glas unbedenklich $\Delta v = xt$ für das Intervall von 0° bis 50° C. annehmen.

**) Ann. of Phil. 1. 221.

$$- 0{,}000000118777201257\,t^2 + 0{,}0000000014545834756\,t^3.$$

Das Differential $= 0$ gesetzt, giebt

$$0{,}98966607871 = - 0{,}006069785656\,t + 0{,}000118777201257\,t^2$$
$$- 0{,}0000014545834756\,t^3.$$

Die Rechnung ergiebt, dass $t = - 56{,}6$ der Gleichung fast vollständig genügt, indem diese Grösse für den zur rechten Hand liegenden Theil den Werth $= 0{,}9878526 \cdots$ giebt; setzt man aber $t = - 57$, so erhält man $1{,}0013105 \cdots$ und da $t = - 56{,}5$ den Werth $0{,}9845066 \cdots$ giebt, so folgt, dass für $t = - 56{,}7$ der gesuchte Werth schon zu gross seyn würde. Nun scheint es zwar, als ob nach den Angaben von Hutton eine Kälte von — 56°,6 C. sehr wohl zu erhalten sey; allein wenn man berücksichtigt, dass sie fast 20 Grade unter dem Gefrierpuncte des Quecksilbers liegt, so muss man doch gestehen, dass ihre Erreichung immerhin noch problematisch bleibt. Ausserdem aber gefriert der Weingeist bei dieser Kälte einmal gewiss nicht, wie tief aber der Gefrierpunct desselben unter dieser Temperatur liege, darüber lassen sich aus theoretischen Betrachtungen nicht einmal Vermuthungen auffinden. Die mitgetheilten Versuche und deren Berechnung scheinen inzwischen über diese so lange und so vielfach untersuchte Frage endlich wenigstens einige Auskunft zu geben. Welches Vertrauen dieselben übrigens verdienen, wird sich aus den folgenden Betrachtungen näher ergeben.

---

4) *Ausdehnung des Schwefeläthers.*

Der rectificirte Schwefeläther, dessen wir uns zu den Versuchen bedienten, hatte ein specifisches Gewicht von 733 bei 12°,5 C. Diese Bestimmung wurde vermittelst des bereits beschriebenen Hombergschen Aräometers erhalten und kann also für absolut richtig gelten. Auch diese Flüssigkeit erhielten wir von meinem Collegen L. Gmelin, und wir wählten zum Messen der Ausdehnungen das Röhrchen *B*, um für eine bei so niederer Wärme siedende Flüssigkeit einen grösseren Maassstab zu haben. Es gelang uns auch für die Temperatur unter dem Gefrierpuncte des Wassers einige genaue Beobachtungen zu erhalten, welche wir daher nicht anstanden mit in Rechnung zu nehmen, obgleich sich später aus der Zusammenstellung der durch Berechnung erhaltenen Werthe mit denen durch die Beobachtung gefundenen ergeben wird, dass sie denen über dem Gefrierpuncte des Wassers liegenden an Genauigkeit dennoch mindestens etwas nachstehen. Uebrigens boten die Versuche nichts bemerkenswerthes dar, ausser einige auf die Bestimmung des Siedepunctes sich beziehende Erscheinungen, welche sich später bei noch einigen Flüssigkeiten wiederholten und eine nähere Erwähnung verdienen,

Der Siedepunct des Aethers unter einem Luftdrucke von 28 par. Z. Quecksilberhöhe wird bei 33° bis höchstens 36° C. gesetzt, und das angegebene specifische Gewicht des von uns gebrauchten beweiset, dass er sehr rein und frei von Alkohol war, wie auch ohnehin von der Uebung des Chemikers, welcher ihn bereitet hatte, nicht wohl anders vorausgesetzt werden kann. Wir erwarteten daher eine Entwickelung der Dämpfe und dadurch herbeigeführte Beendigung unserer Versuche höchstens bei 35° C. Weil wir aber schon beim Alkohol gefunden hatten, dass das Sieden dieser Flüssigkeit im Röhrchen einer höheren Temperatur bedurfte, als bei welcher derselbe in offenen Gefässen zu sieden pflegt (wobei wir jedoch die höher liegenden Beobachtungen wegliessen, in der Voraussetzung, dass die Ausdehnungen der Flüssigkeiten allgemein in der Nähe des Siedepunctes unregelmässig seyen), und weil es sich zufällig so traf, dass sich der Aether nach der Herausnahme eines Theiles desselben aus der Messröhre und dem Wiederanfange der Beobachtungen bis über seinen Siedepunct ausdehnen konnte, ohne aus dem Röhrchen zu steigen, so verstärkten wir die Wärme vom 30sten Grade des Centesimalthermometers an langsam, hielten das Messröhrchen behutsam still, und hatten das Vergnügen, die Zunahme des Volumens mit völliger Sicherheit bis über den Siedepunct hinaus messen zu können. Zuerst nämlich gelangten wir bis zu 35° C., und da die Ausdehnungen des Aethers nach vorläufiger ohngefährer Schätzung noch allezeit regelmässig fortschritten, wir aber nicht hofften völlig bis 40° C. zu gelangen, so nahmen wir einige, zwischen diesen von 5° zu 5° C. fortschreitenden, liegende Beobachtungen. Auf gleiche Weise fuhren wir fort, nachdem wir den Standpunct der Flüssigkeit im Röhrchen bei 40° C. mit völliger Genauigkeit notirt hatten, und da wir mit einem nach Réaumur graduirten Thermometer beobachteten, wollten wir nach einzelnen solchen Graden fortschreiten, erhielten auch wirklich für 41°,25 C. noch eine genaue Beobachtung, und waren im Begriff die folgende bei 42°,5 sicher zu haben, als plötzlich etwa ein Dritttheil des Aethers in einem ununterbrochenen Strahle aus dem Röhrchen geschleudert wurde und der Rest in der Kugel heftig siedete. Wir liessen dann die Temperatur des Wassers in dem Topfe, worin der Messapparat erwärmt wurde, herabsinken, und fanden, dass das Sieden aufhörte, so bald jene unter 35° C. herabging. Demnächst liessen wir das Wasser im Topfe bis 30° C. erkalten, hielten das Messröhrchen in demselben ganz ruhig, steigerten die Wärme wie früher allmählig, um zu versuchen, ob das Sieden des Aethers im nicht ganz vollen Messröhrchen bei eben so hoher Temperatur als vorher eintreten würde, allein es erfolgte allezeit schon bei 35° C. ganz vollständig. Weil uns indess dieses auffallende Phänomen interessirte und wir zufällig noch einige Zeit darauf zu verwenden übrig hatten, so füllten wir das Röhrchen wieder mit Aether, erhöhten die Wärme des Wassers im Topfe, und hatten einmal das Vergnügen, diese bis 50° C. zu steigern, ehe das Sieden anfing, welches aber sich dadurch äusserte, dass der gesammte Aether in einem anhaltenden Strome aus dem Röhrchen geschleudert wurde.

Aus diesen und einigen sowohl bereits mitgetheilten, als auch demnächst noch zu erwähnenden Beobachtungen, folgen daher zwei Sätze mit völliger Gewissheit, nämlich erstlich, dass Flüssigkeiten in Gefässen mit engen röhrenförmigen Mündungen eingeschlossen weit über ihren Siedepunct erhitzt werden können, ohne dass bei ihnen die freie Dampfentwickelung eintritt, und zweitens, dass die regelmässige Ausdehnung der Flüssigkeiten auch über den Siedepunct derselben hinaus fortdauert, wenn das eigentliche Sieden auf irgend eine Weise gehindert wird.

Wenn nun diese beiden Sätze als ausgemacht anzusehen sind, so ist der zweite an sich zwar bedeutend, allein vor der Hand sehe ich noch nicht ein, in wie fern derselbe eine weitere Untersuchung veranlassen könnte, rücksichtlich des ersten aber dringt sich von selbst die Frage auf, was für eine Ursache dabei zum Grunde liegen mag, da keineswegs so leicht aufzufinden ist, warum eine in einer gläsernen Röhre eingeschlossene Flüssigkeit nicht eben so leicht und bei der nämlichen Temperatur Dämpfe entwickeln und in die Höhe steigen sollte, als wenn sie sich in einem offenen Gefässe befindet. Man könnte sich zwar auf den ersten Blick geneigt fühlen, die Ursache des höher liegenden Siedepunctes von dem Drucke der in der Röhre enthaltenen Säule der Flüssigkeit abzuleiten, allein da diese in dem beschriebenen Versuche nur etwa eine Länge von 6 bis höchstens 10 par. Zoll hatte, folglich kaum einer Quecksilbersäule von 0,5 Z. gleich zu setzen war, so muss es als unmöglich erscheinen, dieser geringen Vermehrung des Druckes das Hinaufrücken des Siedepunctes, namentlich beim Aether, um 5 Cent. Grade beizumessen.

Gerne gestehe ich, dass ich mir noch nicht anmasse, die hierbei wirkende Ursache mit genügender Gewissheit angeben zu können, indess möge folgende, mit einer ähnlichen Erscheinung übereinstimmende, Erklärung einstweilen als Hypothese aufgestellt werden. Mein Freund, der bekannte gelehrte Physiker G. G. Schmidt in Giessen, schrieb mir nämlich, er habe auf einer Reise in die Schweizeralpen bemerkt, dass auf hohen Bergen das Wasser bei niedrigern Temperaturen siede, als nach der Elasticität der Dämpfe bei verschiedenen Thermometergraden zu erwarten sey. Dieses heisst im Allgemeinen so viel, dass die

Dämpfe des Wassers in offenen Gefässen den Luftdruck vorzugsweise leicht überwinden, welches mit der in Frage stehenden Erscheinung genau übereinstimmt. Ich glaube diesemnach annehmen zu dürfen, dass alle Flüssigkeiten in offenen Gefässen leichter und bei niedrigern Temperaturen sieden, als in solchen, welche mit einer engen Röhre verbunden sind, wenn anders die letztere gleichfalls angefüllt ist. Man könnte annehmen, die Temperatur des in dem Röhrchen befindlichen Antheils der Flüssigkeit sey niedriger gewesen, als des in der Kugel eingeschlossenen, und hiernach seyen die aus der letzteren aufsteigende Dämpfe von der ersteren wieder absorbirt; allein diese Erklärung ist durchaus unhaltbar. Bei unseren Versuchen mit Aether nämlich war der grösste Theil der Röhre in das erwärmende Wasser eingesenkt, und konnte bei so niedrig liegendem Siedepuncte auf keine Weise bedeutend hinter der Temperatur der eingesenkten Kugel zurückbleiben, da die wärmere Flüssigkeit selbst in den feinsten Röhren in die Höhe steigt, und die Wärme der Hand, womit das Röhrchen bald über, bald unter dem Niveau der Flüssigkeit in derselben gehalten wurde, eben wie die stets aus dem umgerührten Wasser aufsteigenden Dämpfe die Temperatur desselben nicht merklich herabsinken liessen: auf allen Fall aber konnte der Unterschied der Temperaturen, welche die Flüssigkeit in der Kugel und im Röhrchen annahm, keine 5° C. betragen, um so weniger, als nur eine kurze Säule des Aethers in demselben über den Spiegel des Wassers im Topfe hervorragte.

Die Ursache der fraglichen Erscheinung scheint mir daher folgende zu seyn, obgleich auch diese Erklärung noch leicht angefochten werden könnte. Wenn die Oberfläche einer erwärmten Flüssigkeit mit der atmosphärischen Luft in unmittelbarer Berührung ist, so steigen schon vor der Erwärmung bis zum Siedepuncte derselben Dämpfe in die Höhe, und gehen insbesondere von der Oberfläche und den zunächst unter derselben liegenden Schichten leicht und ungehindert in die Luft über, um so mehr als sie sich hier sogleich in die Luft zerstreuen und von dieser aufgenommen, gleichsam absorbirt, werden. Diesen folgen andere von den tieferen Schichten, und auf diese Weise wird die Bewegung und das Aufsteigen der Dämpfe eingeleitet, welche beide mit der Erhöhung der Temperatur zunehmen, und beim Eintritte des Siedepunctes diejenige Geschwindigkeit erreichen, welche das Aufwallen der Flüssigkeit oder das Sieden erzeugt. Können dagegen die Dämpfe der oberen Schichten nicht mit Leichtigkeit in die atmosphärische Luft übergehen, wie namentlich dann der Fall ist, wenn der obere Theil eines Röhrchens mit Dämpfen erfüllt ist, deren Adhäsion an den Wandungen des Röhrchens ein freies Aufsteigen hindert, und wenn obendrein die oberste Schichte der Flüssigkeit von etwas niedrigerer Temperatur ist, als die Masse der tiefer liegenden, so müssten die entstandenen Dämpfe den Zusammenhang der Flüssigkeit überwinden, wozu eine höhere Elasticität derselben, als die dem Siedepuncte zugehörige, erforderlich ist. Es wird dann, mit der gemachten Erfahrung übereinstimmend, keineswegs ein allmälig zunehmendes Sieden oder Aufwallen eintreten, sondern der Anfang des Siedens besteht darin, dass sogleich ein Theil der Flüssigkeit herausgeschleudert wird, sobald die Elasticität der Dämpfe stark genug ist, die Adhäsion (sonst auch Cohäsion genannt) der Theile der Flüssigkeit zu überwinden, und demnächst tritt dann in dem, eine freie Oberfläche bildenden, Ueberreste derselben das eigentliche Sieden ein.

Ob diese meine Ansicht den Beifall der Physiker finde, muss ich dahin gestellt seyn lassen, inzwischen ist die Erscheinung wichtig genug, um Aufmerksamkeit zu erregen und zur Erklärung aufzufordern. *)

Die Reihe der Beobachtungen enthält abermals zwei correspondirende bei 22°,5, welche nur eine Differenz von 0,00013 haben, und daher die Genauigkeit der Versuche genugsam beurkunden, indem gerade beim Herausnehmen eines Theiles der Flüssigkeit und dem abermaligen Wiederanfangen der Messungen die grössten Abweichungen und Beobachtungsfehler entstehen mussten. Die zur

---

*) Dieses war schon geschrieben, als ich die Beobachtungen von Clement las, wonach eine Platte auf einer Mündung, aus welcher Dampf strömt, anstatt abgestossen zu werden, vielmehr festgedrückt wird. S. Quarterly Journ. of Sc. and Arts; N. Ser. 11. p. 472. Ob diese Erscheinung mit der eben erwähnten zusammenhängt, verdient wohl eine genauere Untersuchung.

Berechnung auf die einmal angegebene Weise dienenden Grössen sind folgende. Für das Röhrchen A ist

$$a = 5625{,}1696617336.$$

Weil aber für dieses Röhrchen der Nullpunct des Quecksilbers bei 8,2 Theilstrichen bestimmt war, der Nullpunct des Aethers aber bei 191,8 Theilstrichen gefunden wurde, so kommen zu jener Grösse noch 191,8 — 8,2 = 183,6 hinzu, und es ist also

$$a = 5808{,}7696617336$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}0001721534951863.$$

Hiernach sind ferner

$$\frac{a+n'}{a\,(a+m')} = 0{,}0001763168686790$$

$$\frac{(a+n')\,(a+n'')}{a(a+m')\,(a+m'')} = 0{,}0001831189130016.$$

Die hiernach berechneten Werthe sind in der nachfolgenden Uebersicht zusammen gestellt.

A e t h e r.

t'	ϑ'	n'	$1+\frac{n}{a}$	$1+\delta t'$	Volumen.
—21	28,6	—173,2	0,9701830146	0,9994425655	0,969642201128
—15	67,6	—124,2	0,9786185359	0,9996018325	0,977700402743
—10	117,2	— 74,6	0,9871573493	0,9997345550	0,986895312726
— 5	146,8	— 45,0	0,9922530927	0,9998672775	0,992121398402
0	191,8	0,0	1,0000000000	1,0000000000	1,000000000000
t''	ϑ''	$n''-m'$	$A'+\frac{a+n'}{a(a+m')}(n''-m')$		Volumen.
5	55,3	42,6	1,0075697407	1,0001327225	1,007703467833
10	94,0	83,3	1,0147897638	1,0002654450	1,015059134615
15	135,8	125,1	1,0222294498	1,0003981675	1,022636467278
20	178,2	167,5	1,0297636517	1,0005388920	1,030310342978
22,5	200,0	189,3	1,0336362882	1,0005972512	1,034253609318
t'''	ϑ'''	$n'''-m''$	A'''		Volumen.
22,5	28,4	21,9	1,0337739559	1,0005972512	1,034391388662
25	48,1	41,6	1,0373813985	1,0006636125	1,038069817797
30	94,3	87,8	1,0458414923	1,0007963350	1,046674332499
35	139,2	132,7	1,0540635315	1,0009290576	1,055042817243
37,5	161,7	155,2	1,0581837071	1,0009954188	1,059237043006
38,75	172,2	165,7	1,0601064556	1,0010285995	1,061196880607
40,0	184,7	178,2	1,0623954421	1,0010617800	1,063523472283
41,25	197,9	19 ,4	1,0648126117	1,0010949606	1,065978539558

Aus den hier mitgetheilten Beobachtungen, mit Ausnahme der ersten für $-21°$, welche wir als unsicher wegliessen, wurden folgende vier Bedingungs-Gleichungen formirt:

$$\begin{aligned}
-0{,}008656577 2254 &= -6a + 70b - 900c + 12250d \\
0{,}0090798139452 &= 6a + 70b + 900c + 12250d \\
0{,}0328648511248 &= 216a + 4900b + 112050c + 2582125d \\
0{,}0330481244050 &= 21a + 745b + 26775c + 974125d
\end{aligned}$$

und aus diesen durch Elimination die unbekannten Coefficienten gefunden, nämlich

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}0015026844700045669 36036 \\
b &= 0{,}0000022552140376473 80034 \\
c &= -0{,}0000000157830811845739989 \\
d &= 0{,}000000000414664587821 3055
\end{aligned}$$

nach welchem die folgende Tabelle berechnet ist. Sie enthält, wie die früheren, die durch Rechnung gefundenen Werthe mit den durch Beobachtung erhaltenen zusammengestellt, und die Differenzen beider.

Volumen des Schwefeläthers.

t'	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Unterschiede.
—21	0,9717062904	0,9696422011	+ 0,0020640893
—15	0,9787097589	0,9777004027	+ 0,0010093562
—10	0,9853979739	0,9868953127	— 0,0014973388
— 5	0,9925652784	0,9921213984	+ 0,0004438800
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
5	1,0075526655	1,0077034678	+ 0,0001508023
10	1,0151360017	1,0150591346	— 0,0000768671
15	0,0227249351	1,0226364672	— 0,0000884679
20	0,0303565919	1,0303103429	— 0,0000462490
25	0,0381302975	1,0380698177	— 0,0000704798
30	0,0462075779	1,0466743325	+ 0,0004667546
35	0,0548121589	1,0550428172	+ 0,0002306583
40	0,0642299627	1,0635234723	— 0,0007064904

Die Differenzen sind hauptsächlich bei den Beobachtungen unter 0° C. stärker als bei den oben berechneten Flüssigkeiten, und am stärksten ist die Differenz bei derjenigen, welche ihrer Unsicherheit wegen nicht mit in Rechnung genommen wurde. Werden die Summen der positiven und negativen Unterschiede mit Ausnahme der zu — 21 gehörigen addirt, so bleibt — 0,0001844416, welches eine Folge der sehr grossen negativen Differenz bei — 10° und bei + 40° ist, auch sind zur Abkürzung der Rechnung nur die Werthe für die Temperaturen von 5 zu 5 Graden gesucht und mit den Beobachtungen verglichen. Im Ganzen zeigt die Vergleichung, dass die aufgefundene Formel den Gang der Ausdehnung dieser Flüssigkeit sehr gut darstellt.

Um den Punct der grössten Dichtigkeit zu finden, dient die Differential-Gleichung

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}0015026844 7 + 0{,}0000045104 28\,t$$
$$- 0{,}000000473492435\,t^2 + 0{,}00000000165865835\,t^3.$$

Wird dieses Differential $= 0$ gesetzt, so erhält man die cubische Gleichung:

$$0{,}150268447 = -0{,}00045104 28\,t + 0{,}0000473924 35\,t^2 - 0{,}000001658658 35\,t^3.$$

Für einen negativen Werth von t werden alle drei Glieder der Gleichung rechts positiv, und es ergiebt sich, dass der Werth von $t = -36$ derselben nahe vollständig Genüge leistet. Für $t = -35$ substituirt, erhält man nämlich $0{,}150268 = 0{,}144908$ für $t = -36$, dagegen noch weiter gerechnet $0{,}15026845 = 0{,}15499114$. Man kann daher, wenn ganze Grade als genügend angesehen werden, — 36° C. als den Punct der grössten Dichtigkeit des Aethers ansehen. Indem nun der Aether nach Fourcroy und Veauquelin schon bei 31° C. glänzende Blättchen absetzt, bei — 44° C. aber zu einer weissen krystallinischen Masse gesteht, so ist es hiermit sehr übereinstimmend, dass nach der Formel der Punct der grössten Dichtigkeit genau zwischen diesen beiden Temperaturen in die Mitte fällt, denn $\frac{31+44}{2} = 37{,}5$, so dass man hiernach annehmen müsste, der nicht krystallisirte Theil der Flüssigkeit ziehe sich durch Verringerung der Wärme ohngefähr um eben so viel, jedoch um eine Kleinigkeit weniger, zusammen, als der krystallisirte sich ausdehnt, so dass also der Punct der grössten Dichtigkeit bei — 36° C. fallen muss, wenn noch nicht die volle Hälfte krystallisirt ist. Ob übrigens die Angabe der beiden genannten berühmten Chemiker richtig sey, welcher nicht alle, namentlich Thénard *) nicht, beistimmen, und ob vielleicht der von jenen und der von uns gebrauchte Aether seiner Zusammensetzung nach gleich waren, lässt sich hier weder untersuchen, noch entscheiden.

5) *Ausdehnung des Petroleum rectificatum.*

Es lag von Anfang an in unserem Plane, die Gesetze der Ausdehnung durch Wärme auch bei den ätherischen Oelen zu erforschen, und wir wollten hierzu den Terpenthinspiritus und das rectificirte Steinöl benutzen. Um inzwischen noch für andere Flüssigkeiten die erforderliche Zeit übrig zu behalten, beendigten wir zuerst die Untersuchungen mit dem Steinöle, konnten aber nachher die früher beschlossenen Versuche mit Terpentinspiritus nicht mehr anstellen, indem ich es nicht verhehlen will, dass die mehrere Monate hindurch fortgesetzten Beobachtungen zuletzt eine grosse Ermüdung herbeiführten, und wir uns freueten, die nothwendigsten Versuche endlich vollendet zu haben.

Ueber die Versuche mit rectificirtem Petroleum habe ich nichts weiter hinzuzufügen. Die unlängst beschriebene Methode wurde auch bei dieser Flüssigkeit befolgt, und bot nichts bemerkenswerthes dar. Auch das Petroleum erhielten wir von meinem Collegen, dem Hofrathe und Professor L. Gmelin, und ich fand, vermittelst des beschriebenen Hombergschen Aräometers, das specifische Gewicht desselben bei 12°,5 C. = 781,25, das des destillirten Wassers bei gleicher Wärme = 1000 angenommen.

Zu den Versuchen diente das Röhrchen *B*, welches zwar im Allgemeinen wegen des grösseren Inhalts der Kugel ein grösseres Mass der Ausdehnung gab, bei dem so ausnehmend sich ausdehnenden Petroleum aber die Unbequemlichkeit des öfteren Herausnehmens herbeiführte. Inzwischen habe ich schon aus mehreren Beispielen dargethan, und es folgt auch noch ausserdem aus einigen hier mitgetheilten, dass hierdurch der Genauigkeit der Messungen kein Abbruch geschieht, und so leidet es denn wohl keinen Zweifel, dass aus den erhaltenen Grössen das Gesetz der Ausdehnung dieser Flüssigkeit mit genügender Schärfe aufgefunden werden könne. Die in der nachfolgenden Tabelle aufgenommenen Beobachtungen gehen von 0° C. bis 95° C. Wir haben nämlich an die letzte Beobachtung bei 95° C. zwar noch eine zweite Herausnahme eines Theiles der Flüssigkeit bei der nämlichen Temperatur angeknüpft, und auf diese noch eine dritte bei 100° C. folgen lassen. Weil sich dabei aber eine Ungewissheit von 10 Theilstrichen des Röhrchens zeigte, wenn das erhaltene Resultat mit den früheren correspondiren sollte, uns diese Abweichung aber erst später bemerkbar wurde, so dass es unmöglich war, die Ursache hievon aufzusuchen, welche wohl ohne Zweifel in einem Fehlen beim Ablesen lag, so haben wir diese letzten beiden Beobachtungen weggelassen, um für die nachfolgende Rechnung eine hinlänglich sichere Grundlage zu erhalten. Auch bei dieser Flüssigkeit lag also der Siedepunct höher, als er für dieselbe von andern bestimmt ist (85°,5), wenn sie der Luft eine freie Oberfläche darbietet, und obgleich erst nach etwas anhaltendem Sieden des Wassers das Petroleum aus dem Röhrchen geschleudert wurde, so konnte doch auch dieses Umstandes wegen die Beobachtung bei 100° C. nicht als zuverlässig gelten. Uebrigens kann der Siedepunct des von uns gebrauchten Petroleums aus unsern Beobachtungen nicht bestimmt werden, aus Gründen, welche schon früher erörtert sind. Hiernach bleiben also 22 Beobachtungen, welche auf die gewohnte Weise berechnet sich in der nachfolgenden tabellarischen Uebersicht zusammengestellt finden. Die bei der Berechnung zum Grunde liegenden Werthe sind folgende:

---

*) S. Leop. Gmelin Handbuch der theoretischen Chemie. Heidelb. 1819. T. II. p. 1156.

Bei dem Röhrchen B ist

$$a = 11955{,}9846153857 \ldots$$

für den Gefrierpunct des Wassers bei 23,45 Theilstrichen des Röhrchens. Weil aber dieser Punct für Petroleum bei 22,9 Theilstrichen lag, so ist

$$a = 11955{,}4346153857$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}000083643968803 4 \cdots$$

Auf gleiche Weise ist

$$a + m = 11972{,}0346153857$$

$$\frac{a+n'}{a} \times \frac{1}{a+m'} = 0{,}0000845529271125$$

$$a + m'' = 11968{,}5346153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \frac{(a+n'')}{(a+m'')} = 0{,}0000856444080381$$

$$a + m''' = 11968{,}5346153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \frac{(a+n'')}{(a+m'')} \frac{(a+n''')}{(a+m''')} = 0{,}0000866373858502$$

$$a + m^{IV} = 11980{,}1346153 8$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \frac{(a+n'')}{(a+m'')} \frac{(a+n''')}{(a+m''')} \frac{(a+n^{IV})}{(a+m^{IV})} = 0{,}0000878892482592$$

$$a + m^{V} = 11958{,}9346153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{(a+n^{V})}{(a+m^{V})} = 0{,}0000890271195068$$

$$a + m^{VI} = 11969{,}436153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{(a+n^{VI})}{(a+m^{VI})} = 0{,}0000901346070245$$

$$a + m^{VII} = 11957{,}836153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{(a+n^{VII})}{(a+m^{VII})} = 0{,}0000911883777820.$$

Hiernach sind also die in nachfolgender Tabelle berechneten Grössen gefunden, wobei sich von selbst versteht, dass der Werth von 1 + $\delta t'$ für das Röhrchen B stets unverändert bleibt, und hier, wie früher, nur zur Bequemlichkeit der Uebersicht mit beigefügt ist.

Tabellarische Uebersicht der Ausdehnung des Petroleum.

t'	ϑ'	n'	$1 + \delta\frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumina.
0	22,9	0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
5	80,9	58,0	1,0048513502	1,0001347230	1,0049867268
10	139,2	116,3	1,0097277936	1,0002694460	1,0099998607
12,5	169,6	146,7	1,0122705702	1,0003368075	1,0126115105
t''	ϑ''	$n'' - m'$	A''	$1 + \delta t''$	Volumina.
15	69,8	30,3	1,0148156133	1,0004041690	1,0152257703
20	129,9	90,4	1,0199648866	1,0005388920	1,0205145375
25	190,5	151,0	1,0250380622	1,0006736150	1,0257285432
t'''	ϑ'''	$n''' - m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumina.
30	97,2	61,2	1,0302794999	1,0008083380	1,0311123140
35	156,3	120,3	1,0353410845	1,0009430610	1,0363174743
37,5	186,5	150,5	1,0379275456	1,0010104225	1,0389762909
t^{IV}	ϑ^{IV}	$n^{IV} - m'''$	A^{IV}	$1 + \delta t^{IV}$	Volumina.
40	66,1	30,1	1,0405370953	1,0010777840	1,0416585695
45	127,0	91,0	1,0458168818	1,0012125070	1,0470849422
50	187,6	151,6	1,0510706596	1,0013472300	1,0524866935
t^{V}	ϑ^{V}	$n^{V} - m^{IV}$	A^{V}	$1 + \delta t^{V}$	Volumina.
55	97,8	63,3	1,0566242511	1,0014819530	1,0581901185
60	159,5	125,0	1,0620374673	1,0016166760	1,0637544378
62,5	189,5	155,0	1,0646695012	1,0016840375	1,0664624445
t^{VI}	ϑ^{VI}	$n^{VI} - m^{V}$	A^{VI}	$1 + \delta t^{VI}$	Volumina.
65	57	30,6	1,0673937310	1,0017513990	1,0692631633
70	121,5	95,1	1,0731359802	1,0018861220	1,0751600456
75	185,8	159,4	1,0788604240	1,0020208450	1,0810406337
t^{VII}	ϑ^{VII}	$n^{VII} - m^{VI}$	A^{VII}	$1 + \delta t^{VII}$	Volumina.
80	101,2	64,3	1,0846560792	1,0021555680	1,0869941292
85	165,1	128,2	1,0904156806	1,0022902910	1,0929130498
t^{VIII}	ϑ^{VIII}	$n^{VIII} - m^{VII}$	A^{VIII}	$1 + \delta t^{VIII}$	Volumina.
90	95,3	70,0	1,0967988671	1,0024250140	1,0994586197
95	165,3	140,0	1,1031830535	1,0025597370	1,1060059094

Aus den hiernach erhaltenen Grössen formirten wir folgende bequem auf kleinere Zahlen zu reducirende Gleichungen:

$$0{,}0507268953133 = 50\,a + 750\,b + 12500\,c + 221250\,d$$
$$0{,}1819018432991 = 175\,a + 6375\,b + 240625\,c + 9361875\,d$$
$$0{,}3188544588873 = 300\,a + 18250\,b + 1125000\,c + 70221250\,d$$
$$0{,}4664123419419 = 425\,a + 36375\,b + 3134375\,c + 271861875\,d.$$

Die durch Elimination aus diesen Bedingungsgleichungen erhaltenen bekannten Werthe der unbekannten Grössen sind:

$$a = 0{,}00098855882435488571 6911$$
$$b = 0{,}0000021204603302620850 14$$
$$c = -\,0{,}000000026763991197942853$$
$$d = 0{,}0000000001950677416200 50.$$

Es möge hier vorläufig die Bemerkung erlaubt seyn, dass die Gleichungen für die Ausdehnung des Seewassers, Weingeistes, Aethers und Steinöles die nämliche Gestalt haben. Vielfach können zwar die Formen dieser Gleichungen nicht seyn, insbesondere aber zeigt sich in jeder Hinsicht eine auffallende Uebereinstimmung der letzten drei Gleichungen, welche die Gesetze der Ausdehnung von drei sogenannten geistigen Flüssigkeiten ausdrücken. Uebrigens giebt die Berechnung des Volumens von Steinöl in verschiedenen Temperaturen folgende Werthe, welche in der nachfolgenden tabellarischen Uebersicht mit den durch Beobachtung erhaltenen zusammengestellt und verglichen sind.

Ausdehnung des Steinöls.

t'	Berechnet.	Beobachtet.	Unterschiede.
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
5	1,0049925820	1,0049867268	— 0,0000058552
10	1,0100728269	1,0099998607	— 0,0000729662
15	1,0152250327	1,0152257703	+ 0,0000007376
20	1,0204364595	1,0205145375	+ 0,0000780780
25	1,0256472692	1,0257285432	+ 0,0000812740
30	1,0310005561	1,0311123140	+ 0,0001117579
35	1,0363423401	1,0363174743	— 0,0000248658

t'	Berechnet.	Beobachtet.	Unterschiede.
40	1,0417215674	1,0416585695	— 0,0000629979
45	1,0471401102	1,0470849422	— 0,0000551680
50	1,0526527665	1,0524866935	— 0,0001660730
55	1,0581172605	1,0581901185	+ 0,0000728580
60	1,0636942424	1,0637544378	+ 0,0000601954
65	1,0693472884	1,0692631633	— 0,0000841251
70	1,0750929007	1,0751600456	+ 0,0000672449
75	1,0809505076	1,0810406337	+ 0,0000901261
80	1,0869424632	1,0869941292	+ 0,0000516660
85	1,0930940478	1,0929130498	— 0,0001809980
90	1,0994334677	1,0994586197	+ 0,0000251520
95	1,1059918552	1,1060059094	+ 0,0000140542

Es wechseln bei dieser Zusammenstellung die positiven und negativen Differenzen so willkührlich, dass man hiernach auf eine sehr grosse Genauigkeit der Versuche sowohl, als auch der aus ihnen abgeleiteten Formel schliessen muss. Ferner fallen nur dreimal, und zwar zuerst eine bejahende und dann zwei verneinende Differenzen mit der Einheit in die vierte Decimalstelle, welches bei dem so oft erforderlichen Herausnehmen eines Theiles der Flüssigkeit aus dem Röhrchen wohl mehr ist, als von so sehr zusammengesetzten Versuchen zu erwarten war. Werden die Differenzen addirt, so bleibt der unbedeutende Rest $= + 0{,}0000000949$, dessen erste Ziffer in die achte Decimalstelle fällt, und also kein Zehnmilliontheilchen beträgt. Es ist wegen der folgenden Betrachtungen von grosser Wichtigkeit, die Genauigkeit der Versuche sowohl als auch der daraus abgeleiteten Formeln ausser Zweifel zu stellen.

Den Punct der grössten Dichtigkeit zu bestimmen ist in wissenschaftlicher Hinsicht, und hauptsächlich als Prüfungsmittel der Uebereinstimmung zwischen den gefundenen Formeln und den Erfahrungen über ihr Gefrieren, von grosser Wichtigkeit. Für rectificirtes Steinöl ist die hierzu erforderliche Differential-Gleichung

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}00098855882435 + 0{,}00000424092066\,t - 0{,}00000008029197359\,t^2 + 0{,}00000000078027096648\,t^3.$$

Setzt man hierin das Differential $= 0$, so ist

$$0{,}98855882435 = - 0{,}00424092066\,t + 0{,}00008029197359\,t^2 - 0{,}00000078027096648\,t^3.$$

Auch hierbei werden für $-t$ alle drei Theile der Gleichung zur rechten Hand bejahend, und wenn man $t = -71$ setzt, so geschieht der Gleichung am vollständigsten Genüge, indem dann

$$0{,}9885588 = 0{,}9851362$$

gefunden wird. Nimmt man dagegen $t = -71{,}5$, so wird

$$0{,}9885588 = 0{,}9989084,$$

wonach also dieser Werth schon zu gross ist. Hiernach also gefriert das Steinöl, allein der Punct des Gefrierens liegt unter — 71° C. und somit tiefer als beim Weingeiste, auch dehnt es sich beim Gestehen aus, und muss also beim Festwerden ein krystallinisches Gefüge erhalten. Dass es nicht leicht gefriere und diese Eigenschaft mit denjenigen Substanzen gemein habe, welche vielen Kohlenstoff enthalten, wusste man längstens: indess ist mir kein Versuch bekannt, diese Flüssigkeit zum Gefrieren zu bringen. Uebrigens würde das Steinöl sich hiernach sehr gut zu Thermometern eignen, wenn es einmal gelingen sollte, noch grössere Grade der künstlichen Kälte hervorzubringen, als bisher möglich war. Interessant würde es seyn, auch die Ausdehnung des Schwefelkohlenstoffs zu untersuchen, um aus der auf diese Weise erhaltenen Formel den Gefrierpunct desselben zu bestimmen, und sobald mir einige Musse hierzu vergönnt ist, werde ich diese Arbeit gleichfalls vornehmen.

---

6) *Ausdehnung des liquiden Ammoniaks.*

Diese Flüssigkeit mit in den Kreis unserer Versuche aufzunehmen, rieth uns mein College L. Gmelin, insofern sie in einiger Hinsicht mit den liquiden

Säuren in Parallele steht, und eine Vergleichung beider daher aus mehreren Rücksichten interessant seyn kann. Von eben diesem erhielten wir denn auch das zu den Beobachtungen gebrauchte Ammoniak, dessen specifisches Gewicht, nach genauer Wägung vermittelst des Hombergschen Aräometers, = 946,5 bei 12°,5 C. gefunden wurde. Nach Dalton *) mussten hiernach 11,7 Grane Ammonium mit 100 Granen Wasser verbunden seyn, wenn jener Gelehrte anders das specifische Gewicht der von ihm untersuchten Flüssigkeiten gleichfalls bei derjenigen Temperatur bestimmt hat, bei welcher dieses von mir geschehen ist, worüber sich keine Angabe bei ihm findet. Vermuthlich gehört aber jene Bestimmung von ihm einer höheren Temperatur an, weil sonst die von uns beiden gefundenen Siedepuncte zu wenig harmoniren würden. Nach Dalton siedet nämlich das Ammonium von der aus dem specifischen Gewichte folgenden Concentration bei 60° C., allein in unsern Versuchen fing schon bei 45° C. die Entwickelung von Gasblasen an, und obgleich es uns gelang die ersten aufsteigenden Bläschen wieder fortzuschaffen, um auf diese Weise für die genannte Temperatur noch eine Beobachtung von genügender Genauigkeit zu erhalten, so war doch bei 47°,5 die Gasentwickelung so stark, dass wir die Versuche abbrechen mussten, indem das schnelle Aufsteigen der Gasblasen einem beginnenden Sieden glich, wodurch die Flüssigkeit aus dem Röhrchen gestossen wurde. Es ist offenbar nicht meine Absicht, die Genauigkeit der Daltonschen Bestimmungen hier zu prüfen, indess kann ich versichern, dass die von mir angegebenen vollkommen genau sind. Dabei will ich jedoch nicht mit Bestimmtheit behaupten, dass die starke Entbindung der Gasblasen ein wirkliches Sieden gewesen sey; aber soviel ist gewiss, dass durch einen so bedeutenden Verlust an Gas die eigentliche Beschaffenheit der Flüssigkeit nothwendig verändert werden muss, und sonach beide Bestimmungen des berühmten englischen Physikers unmöglich neben einander bestehen können.

---

*) Ein neues System des chemischen Theiles der Naturwissenschaft. A. d. Engl. üb. von F. Wolf. Berlin 1813. T. II. p. 213.

Uebrigens zeigt sich hier, namentlich in Beziehung auf dasjenige, was oben bei der Erzählung der Versuche mit Schwefeläther erörtert ist, die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, dass bei solchen Flüssigkeiten, welche aus einer gasförmigen, an Wasser gebundenen, Substanz bestehen, der Siedepunct, oder mindestens der Punct, bei welchem die ungestörte Erhaltung derselben in einem tropfbar flüssigen Aggregatzustande aufhört, dann früher eintritt, wenn sie in einem mit einer engen Röhre versehenen Gefässe eingeschlossen sind, als wenn sie der atmosphärischen Luft eine freie Oberfläche darbieten, also demjenigen gerade entgegengesetzt, was bei den selbstständigen Flüssigkeiten (wenn ich mich dieses Ausdrucks bedienen darf) von uns beobachtet wurde. Die Ursache dieser Abweichung von der oben von mir aufgestellten Behauptung lässt sich leicht erklären. Schon bei niedriger Temperatur nämlich kündigt sich bei allen solchen nicht selbstständigen Flüssigkeiten, als liquides Ammoniak, Salzsäure u. s. w., das Entweichen eines Theiles des an das Wasser gebundenen Gases durch den Geruch an. Wird die Temperatur erhöhet, so wächst die Menge desselben; allein weil die Trennung allmälig erfolgt, so fällt sie weniger auf, wenn die Flüssigkeit in einem offenen Gefässe enthalten ist, letztere wird zunehmend ärmer durch den Verlust des gebundenen Gases, und der Siedepunct rückt höher hinauf. Befindet sich eine solche Flüssigkeit aber in einer Kugel mit einem engen Röhrchen, so sammeln sich in diesem die entweichenden Bläschen, werfen die Flüssigkeit heraus und das noch vollständig gesättigte Wasser scheint wegen plötzlicher Entweichung des Gases früher zu sieden. Hieraus ergiebt sich dann von selbst der Mangel an Uebereinstimmung zwischen den Daltonschen und unsern Beobachtungen.

Zu den Versuchen über die Ausdehnung des Ammoniaks gebrauchten wir gleichfalls das Röhrchen *B*. Bei diesem war für Quecksilber der Nullpunct bei 23,45 Theilstrichen, und da das Ammoniak bei gleicher Temperatur auf 102 Theilstriche stand, so ist hiernach

$$a = 11955{,}9846153857 + 78{,}55 = 12034{,}5346153857$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}000083094197.$$

Auf gleiche Weise war $m' = -79{,}5$, also

$$a + m' = 11955{,}0346153857$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} = 0{,}000084198641447.$$

Mit diesen Werthen ist die folgende Tabelle berechnet.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$.	Volumen.
—15	60,0	—42,0	0,996510043692	0,9996018334	0,99610728484
—10	72,5	—29,5	0,997548721165	0,9997345550	0,99727992562
— 5	86,8	—15,2	0,998736968194	0,9998672774	0,99860241529
0	102,0	0	1,000000000000	1,0000000000	0,00000000000
5	118,1	16,1	1,001337816584	1,0001347230	1,00147271958
10	136,9	34,9	1,002899987503	1,0002694460	1,00317021440
15	158,0	56,0	1,004653275077	1,0004041690	1,00505932438
20	181,4	79,4	1,006597679305	1,0005388920	1,00714012640
t''	ϑ''	$n'' - m'$	$\frac{(1+n')}{a(a+m')}\frac{(1+n'')}{(a+m')}$	$1 + \delta t''$	Volumen.
25	47,4	24,9	1,008694225477	1,0006736150	1,00937369700
30	73,8	51,3	1,010917069612	1,0008083380	1,01173423200
35	102,0	79,5	1,013291471300	1,0009430610	1,01424706660
40	132,6	110,1	1,015867949729	1,0010777840	1,01696283540
45	165,0	142,5	1,018595985712	1,0012125070	1,01983104130

Es war leicht, aus diesen sämmtlichen Beobachtungen die erforderlichen vier Bedingungsgleichungen zu erhalten, und daraus die unbekannten Coefficienten der Temperaturen und ihrer Potenzen der gewählten Formel gemäss zu berechnen. Die ersteren sind

$$\begin{aligned}
-0{,}001602074844 &= -6a + 70b - 900c + 12250d \\
0{,}009702258380 &= 30a + 350b + 4500c + 61250d \\
0{,}028248055400 &= 75a + 1925b + 50625c + 1360625d \\
0{,}05104094330 &= 120a + 4850b + 198000c + 8161250d.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der unbekannten *a*, *b*, *c* und *d* gaben diese die Vermehrung des Volumens für liquides Ammoniak

$$\begin{aligned}\Delta v = {} & 0{,}0002855860363365079 3\, t \\ & + 0{,}00000260019957256817\, t^2 \\ & + 0{,}0000000641633799788 4\, t^3 \\ & - 0{,}00000000104698400651 2\, t^4,\end{aligned}$$

wonach die folgende tabellarische Uebersicht des Volumens berechnet, und mit den aus den Beobachtungen erhaltenen Werthen verglichen ist, um die Unterschiede beider als das Prüfungsmittel ihrer Uebereinstimmung zu erhalten.

Volumen.

t	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Differenz.
—15	0,9960316994	0,99610728484	— 0,00007558544
—14	0,9962951494		
—13	0,9965559455		
—12	0,9968148118		
—11	0,9970724476		
—10	0,9973295265	1,99727992562	+ 0,00004960088
— 9	0,9975866975		
— 8	0,9978445845		
— 7	0,9981037857		
— 6	0,9983648749		
— 5	0,9986284001	0,99860241529	+ 0,00002598481
— 4	0,9988948846		
— 3	0,9991648264		
— 2	0,9994386987		
— 1	0,9997169490		
0	1,0000000000	1,00000000000	0,00000000000
1	1,0002882492		
2	1,0005820693		
3	1,0008818074		
4	1,0011877856		
5	1,0015003011	1,00147271958	— 0,00002758152
6	1,0018196257		

t	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Differenz.
7	1,0021460061		
8	1,0024796641		
9	1,0028207963		
10	1,0031698737	1,00317021440	+ 0,00000034070
11	1,0035261430		
12	1,0038906252		
13	1,0042631161		
14	1,0046436870		
15	1,0050323832	1,00505932438	+ 0,00002694118
16	1,0054292256		
17	1,0058342097		
18	1,0062473059		
19	1,0066684592		
20	1,0070975901	1,00714012640	+ 0,00004253630
21	1,0075345932		
22	1,0079793386		
23	1,0084316711		
24	1,0088914101		
25	1,0093583502	1,00937369700	+ 0,00001534680
26	1,0098322607		
27	1,0103128859		
28	1,0107999450		
29	1,0112931315		
30	1,0117921147	1,01173423200	— 0,00005788270
31	1,0122965383		
32	1,0128060207		
33	1,0133201553		
34	1,0138385108		
35	1,0143606301	1,01424706660	— 0,00011356350
36	1,0148860268		
37	1,0154142075		
38	1,0159446262		
39	1,0164767306		
40	1,0170099379	1,01696283540	— 0,00004710250
41	1,0175436405		
42	1,0180772059		
43	1,0186099762		
44	1,0191412685		
45	1,0[illegible]96703748	1,01983104130	+ 0,00016066650

Die Vergleichung giebt 5 negative und 7 positive Differenzen, deren Summen den nicht bedeutenden Rest $= -0{,}00000029849$ lassen. Hiernach kann die aufgefundene Formel immerhin als genügend zur Berechnung des Volumens dieser Flüssigkeit angesehen werden, und es lässt sich erwarten, dass sie auch den Punct der grössten Dichtigkeit genau geben werde. Allein diese Untersuchung führt zu einem auffallenden und von den bisher erhaltenen ganz abweichenden Resultate. Die hierfür erforderliche Differentialgleichung ist nämlich

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}000285586036 + 0{,}00000520039914\, t + 0{,}0000001924901399\, t^2 - 0{,}00000000418793602\, t^3.$$

Wird dieses Differential $= 0$ gesetzt, so erhält man

$$0{,}285586036 = -0{,}00520039914\, t - 0{,}0001924901399\, t^2 + 0{,}00000418793602\, t^3.$$

Für alle verneinende Werthe von t wird bloss das erste Glied der Gleichung rechter Hand bejahend, die beiden andern aber werden verneinend. Man übersieht aber bald, dass t nicht kleiner als $= -50$ werden darf, wenn das Product dieser Grösse mit dem ersten Gliede der Gleichung rechter Hand der positiven Grösse zur linken nahe kommen soll, und in diesem Falle ist das zweite, hiernach verneinende Glied, wenn es mit -50^2 multiplicirt wird, schon grösser als das erste. Es ergiebt sich also, dass kein negativer Werth von t der Gleichung Genüge leistet, und die Flüssigkeit somit keinen Punct der grössten Dichtigkeit hat. Bei allen bisher auf gleiche Weise untersuchten Flüssigkeiten hat sich die strengste Uebereinstimmung der theoretisch gefundenen Resultate mit denjenigen gezeigt, welche die Erfahrung darbietet. Nach Fourcroy und Veauquelin soll das liquide Ammoniak bei etwa 40° C. in feinen glänzenden Nadeln anschiessen und bei etwa 50° C. zu einer gallertartigen Masse gestehen, wobei dasselbe ganz geruchlos wird. Dieser letztere Umstand beweiset dass, was auch sonst schon bekannt ist, das Ammoniakgas sich um so weniger mit dem Wasser verbindet, je geringer die Wärme ist, und es lässt sich leicht erklären, dass dieses Gas, welches durch einen nicht starken mechanischen

Druck (von 6,5 Atmosphären) liquide wird, an Wasser gebunden, ohne Vermehrung des Volumens in den Zustand der Festigkeit übergehen kann. Wir haben ausserdem oben beim Seewasser gesehen, dass das Wasser in dieser seiner Verbindung mit Salzen seine Eigenschaft der Ausdehnung vor dem Gefrieren nicht beibehält, indem diese sich erst dann äussert, wenn das aufgelösete Salz ausgeschieden wird. Das Resultat der Rechnung könnte also sehr wohl mit der Erfahrung bestehen, und wäre unter dieser Voraussetzung für die Theorie der Wärme nicht unwichtig, weswegen nunmehro die Entscheidung hierüber vermittelst des Experiments ertheilt und untersucht werden muss, ob das liquide Ammoniak beim Gestehen sich wieder ausdehnt oder nicht.

Es darf aber zugleich nicht übersehen werden, dass der obigen Differentialgleichung ein positiver Werth von t genügt, und man muss schliessen, dass in diesem Falle der gefundene Werth von t nicht das Minimum, sondern vielmehr das Maximum der Ausdehnung bezeichnet. Die Rechnung ergiebt, dass $t = 74{,}8$ der Gleichung am vollständigsten Genüge leistet, denn dieser in dieselbe substituirt giebt

$$0{,}285586 = 0{,}2867029$$

mit einem geringen Unterschiede, welcher nur durch die Einführung höherer Decimalstellen in die für t angenommene Grösse weggeschafft werden könnte, da $t = 74{,}7$ substituirt

$$0{,}285586 = 0{,}283084$$

giebt, so dass also $t = 74{,}75$ der Gleichung am vollständigsten genügen würde. Irre ich nicht, so heisst dieses soviel: das liquide Ammoniak erreicht bei 74°,8 C. seine grösste Ausdehnung; denn wenn dasselbe stärker erhitzt wird, so entweicht alles Gas, und die Flüssigkeit bleibt nicht mehr das, was sie seyn soll. Dalton fand, wie oben erwähnt ist, den Siedepunct des liquiden Ammoniaks von dem gegebenen specifischen Gewichte bei 60° C. Da aber die Entweichung des Gases nach unsern Versuchen schon bei 47°,5 so bedeutend war, so lässt sich wohl erwarten, dass bei 74°,8 alles Gas sich vom Wasser trennt, und somit das Resultat der Rechnung mit der Erfahrung völlig übereinstimmt.

7) *Ausdehnung der Salzsäure.*

An die Untersuchung des liquiden Ammoniaks schliesst sich unmittelbar diejenige der Salzsäure, weil auch diese aus Wasser mit einem an dasselbe gebundenen Gase besteht, und ich lasse daher unsere Versuche damit hier sogleich folgen. Uebrigens bieten sie nichts einer besonderen Bemerkung werthes dar, so dass ich mich auf die blosse Erzählung derselben beschränken kann.

Die vom Hofrathe und Professor Dr. L. Gmelin erhaltene concentrirte Salzsäure zeigte bei der Wägung vermittelst des Hombergschen Aräometers bei 12°,5 C. ein specifisches Gewicht = 1197,8, das des Wassers = 1000 angenommen. Eine Entwickelung von Gas wurde nicht beobachtet, bis die Wärme des Apparates auf fast 45° C. gesteigert war, und wir mussten mit einiger Vorsicht zu Werke gehen, auch die beiden ersten, winzig kleinen, Bläschen, welche bei einiger Abkühlung des Messröhrchens nicht wieder absorbirt wurden, entweichen lassen (was inzwischen ungeachtet der Engigkeit des Röhrchens wegen ihrer Kleinheit ungehindert erfolgte), um die Beobachtung bei 45° C. mit möglichster Sicherheit zu erhalten. Inzwischen nahm die Gasentwicklung bei fortgehender Erwärmung bedeutend zu, und bei 50° C. oder noch wohl etwas weniges darunter, war ein anscheinend vollständiges Sieden vorhanden. Dieses stimmt sehr genau mit Daltons *) Angabe überein, wonach die Salzsäure vom specifischen Gewichte = 1199 bei 120° F. oder nahe 49° C. sieden soll.

Die Versuche wurden mit dem Röhrchen *A* gemacht, und bei der niedrigen Lage des Siedepunctes dieser Flüssigkeit hielten wir es für nöthig, die Ausdehnungen derselben auch unter 0° C. in die Versuchsreihe zu ziehen, da wir ohnehin für diese Art von Beobachtungen uns bereits eine grössere Fertigkeit und genauere Kenntniss der dabei zu berücksichtigenden Bedingungen erworben hatten. Der Normal-Nullpunct des Röhrchens *A* war bekanntlich bei 8,2 Theilstrichen bestimmt, und dann ist

---

*) Ein neues System u. s. w. Bd. II. p. 87.

$$a = 5625{,}1696617336$$

weil aber der Nullpunct für die Salzsäure bei 88 Theilstrichen lag, so ist

$$a = 5704{,}9696617336$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}000175285770002 87.$$

Auf gleiche Weise ist

$$a + m' = 5683{,}9696617336$$

$$\frac{(a+n')}{a(a+m')} = 0{,}0001787520306835.$$

Vermittelst dieser Grössen wurden die Versuche berechnet und gaben folgende Werthe.

Ausdehnung der Salzsäure.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
— 21,25	20,8	—67,2	0,9882207962	0,9994359294	0,9876633699
— 20	24,9	—63,1	0,9889394679	0,9994691099	0,9884144497
— 15	38,9	—49,1	0,9913934686	0,9996018325	0,9909987280
— 10	55,5	—32,5	0,9943032124	0,9997345550	0,9940392796
— 5	71,9	—16,1	0,9971778991	0,9998672775	0,9970455511
0	88,0	0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
5	103,0	15,0	1,0026292865	1,0001327225	1,0028623581
10	118,4	30,4	1,0053286874	1,0002654450	1,0055955468
15	133,5	45,5	1,0079755025	1,0003981675	1,0083768456
20	149,3	61,3	1,0107450177	1,0005308900	1,0112816121
25	164,0	76,0	1,0133217185	1,0006636125	1,0139941715
30	179,4	91,4	1,0160211193	1,0007963350	1,0168302125
35	194,5	106,5	1,0186679345	1,0009290576	1,0196143357

t''	ϑ''	$n'-m'$	A''	$1+\delta l''$	Volumen.
35	81,7	14,7	1,0186487742	1,0009290576	1,0195951576
37,5	89,0	22,0	1,0199536640	1,0009954188	1,0209689451
40	96,9	29,9	1,0213658050	1,0010617800	1,0224502708
42,5	104,4	37,4	1,0227064453	1,0011281413	1,0238602026
43,25	108,4	41,4	1,0234214534	1,0011480496	1,0245963921
44,375	110,9	43,9	1,0238683335	1,0011779122	1,0250743605
45,0	112,4	45,4	1,0241364615	1,0011945025	1,0253597951
46,25	116,2	49,2	1,0248157192	1,0012276808	1,0260738659
47,5	120,0	53,0	1,0254949770	1,0012608615	1,0267879841

Auch in dieser Reihe findet sich eine Beobachtung doppelt, nämlich vor und nach der Herausnahme eines Theiles der Flüssigkeit. Der Unterschied zwischen beiden erhaltenen Grössen beträgt 0,0000191781, und fällt also mit nicht völlig zwei Einheiten in die fünfte Decimalstelle; eine Uebereinstimmung, welche ich nicht der Ostentation wegen auch diesesmal hervorhebe, sondern weil man nothwendig die wahrscheinliche Fehlergrenze derjenigen Versuche kennen muss, auf welche Naturgesetze gegründet werden sollen.

Es war nicht schwer, aus diesen sämmtlichen Beobachtungen mit Inbegriff der negativen und Weglassung der ersten und der beiden letzten die erforderlichen vier Bedingungsgleichungen zu finden. Sie sind folgende:

$$\begin{aligned}
-0{,}0029501991411121 &= -5a + 75b - 1250c + 22125d \\
0{,}0168347506 1680 &= 36a + 350b + 4500c + 61250d \\
0{,}0421059961 5320 &= 75a + 1925b + 50625c + 1360625d \\
0{,}0674148126 6780 &= 120a + 4850b + 198000c + 8161250d.
\end{aligned}$$

Durch eine diesesmal nicht schwierige Elimination wurden für die unbekannten Grössen folgende Werthe erhalten:

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}00056623700374385457 6322 \\
b &= -0{,}000000829489561282579058 \\
c &= 0{,}000000037084759019800973 \\
d &= -0{,}000000000472156329074913.
\end{aligned}$$

Vermittelst dieser Coefficienten wurden die Volumina der Salzsäure bei verschiedenen Temperaturen von 5 zu 5 Graden C. berechnet und mit den durch Beobachtungen gefundenen Werthen verglichen, wie die nachfolgende Tabelle zeigt.

Ausdehnung der Salzsäure.

t'	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Unterschiede.
—20	0,9879712412	0,9884144497	— 0,0004432085
—15	0,9911707460	0,9909987280	+ 0,0001720180
—10	0,9942171242	0,9940392796	+ 0,0001778446
— 5	0,9971431469	0,9970455511	+ 0,0000975958
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
5	1,0028197879	1,0028623581	+ 0,0000425702
10	1,0056160336	1,0055955468	— 0,0000205868
15	1,0084081779	1,0083768456	— 0,0000313323
20	1,0112140772	1,0112816121	+ 0,0000675349
25	1,0140325073	1,0139941715	— 0,0000383358
30	1,0168594111	1,0168302125	— 0,0000291986
35	1,0196836497	1,0196047466	— 0,0000789031
40	1,0224870011	1,0224502708	— 0,0000367303
45	1,0252441612	1,0253597951	+ 0,0001156339

Auch hierbei wechseln die positiven und negativen Differenzen, und ihre Summe lässt einen Rest von + 0,0000050980, so dass hiernach also nicht bloss die Rechnung für genau gelten, sondern auch die Formel als der richtige Ausdruck für das Gesetz der Ausdehnung der liquiden Salzsäure angesehen werden kann.

Die Frage über den Punct der grössten Dichtigkeit muss bei der Salzsäure um so interessanter seyn, als sie entweder zu einer Bestätigung oder zu einer Widerlegung desjenigen führt, was so eben über das Verhalten des liquiden Ammoniaks in dieser Hinsicht gesagt ist, und ich gestehe, dass ich selbst nicht ohne einen hohen Grad von Neugierde die Beantwortung unternahm, zugleich aber auch die Freude hatte, eine vollständige Bestätigung der dort aufgestellten

Schlüsse zu finden. Auch die liquide Salzsäure besteht nämlich, eben wie das flüssige Ammoniak aus einer Gasart, welche eben so innig oder noch inniger, als bei dem letzteren an das Wasser gebunden ist; sie kann also der Analogie nach keinen Punct der grössten Dichtigkeit haben, wohl aber ein Maximum des Volumens, wenn die grösste Quantität des Gases vom Wasser getrennt ist, und dieser Punct muss einer höheren Temperatur angehören, als beim Ammoniak der Fall ist. In wie fern diese Schlüsse aus der für die Ausdehnung dieser Flüssigkeit gefundenen Formel folgen, muss sich sofort zeigen. Die Differentialgleichung zur Auffindung des Punctes der grössten Dichtigkeit heisst:

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}00056623700037 - 0{,}00000165897912256\, t + 0{,}000000111254277\, t^2 - 0{,}0000000001888625316\, t^3.$$

Wird dieses Differential $= 0$ gesetzt, so erhält man

$$0{,}56623700037 = 0{,}00165987912256\, t - 0{,}000111254277\, t^2 + 0{,}000001888625316\, t^3.$$

Für jeden negativen Werth von t werden alle drei Glieder der Gleichung verneinend, und es ist also unmöglich, dass irgend ein solcher der Gleichung Genüge leisten könne, deren eine Hälfte bejahend ist. Sucht man dagegen einen positiven Werth, welcher für t substituirt der Gleichung Genüge leistet, so findet sich, dass dieser zwischen 87,5 und 88 liegt. Ersteres giebt nämlich

$$0{,}5662370 = 0{,}5586026$$

letzteres dagegen

$$0{,}5662370 = 0{,}5714818$$

substituirt man aber 87,8, so wird

$$0{,}5662370 = 0{,}5663065$$

bis auf eine verschwindende Grösse einander gleich. Was hierbei den Punct der grössten Dichtigkeit betrifft, so gefriert die Salzsäure nicht zu einem eigentlichen Eise, einem krystallinischen festen Körper, sondern wird unter dem Gefrierpuncte des Quecksilbers in eine butterähnliche Masse verwandelt, welches Verhalten also mit dem Resultate der Rechnung sehr gut übereinstimmt. Weniger scheint dieses der Fall zu seyn in Beziehung auf die Veränderung der Salzsäure durch höhere Wärmegrade. Nach Dalton soll nämlich die liquide Salzsäure, welche bei 87° C. siedet, 20 pCt. eigentliche Säure enthalten, und der Siedepunct bis 111° C. hinaufrücken, wenn noch 12,1 pCt. Säure mit dem Wasser verbunden sind. Inzwischen steht dieses nicht geradezu mit dem Resultate der Rechnung im Widerspruche, auch nicht der Umstand, dass eine schwächere Säure durch Sieden concentrirter wird. Die Formel zeigt bloss das Verhalten der Säure von derjenigen Concentration, wie sie zu den Versuchen genommen wurde. Sollte aber die Berechnung mit der Erfahrung vollständig übereinstimmen, so müsste diese Säure durch Erhitzen einen Antheil Gas abgeben bis sie noch etwas weniger als 20 pCt. davon enthielte, und dann bei 88° C. sowohl Gas als Wasserdampf durch die Wärme in demjenigen Verhältnisse expandirt werden, dass der Siedepunct hiernach constant bliebe. Ob dieses der Fall ist, müsste durch einen Versuch ausgemittelt werden.

8) *Ausdehnung der Salpetersäure.*

Die von uns zu den Versuchen verwandte Salpetersäure erhielten wir gleichfalls von meinem verehrten Collegen, dem Hofrathe L. Gmelin. Ihr specifisches Gewicht wurde von mir mit dem beschriebenen Apparate und nach der angegebenen Methode = 1440,5 gefunden, und ein plötzliches vollständiges Sieden im Röhrchen mit gewaltsamem Herausschleudern der Flüssigkeit aus demselben trat bei 135° C. des Quecksilberthermometers ein. Die von uns gemessenen Ausdehnungen liegen also zwar noch nicht so weit über dem Siedepuncte des Wassers, dass eine Reduction der Skale des Quecksilberthermometers auf das Luftthermometer nöthig zu seyn scheint, allein bei der im Allgemeinen von uns beobachteten Sorgfalt glaubten wir auch den hieraus möglichen Fehlern begegnen zu müssen. Um daher hier sogleich einen Gegenstand in Untersuchung zu nehmen, welcher sowohl bei dieser als insbesondere auch bei den beiden nachfolgenden Versuchsreihen nicht umgangen werden darf, werfe ich schon jetzt die Frage auf, wie das allgemein angewandte Quecksilberthermometer bequem und genau auf das einzig richtige Luftthermometer reducirt werden könne. Es ist mir zwar erinnerlich irgendwo eine Formel für diese Reduction gelesen zu haben, allein in diesem Augenblicke bin ich ausser Stande, die Nachweisung hierüber aus meinen weitläuftigen Collectaneen aufzufinden, und ausserdem schien mir diese Formel schon damals, als sie mir bekannt wurde, für den gewünschten Zweck nicht hinlänglich geeignet, weswegen wir uns entschliessen mussten, selbst eine solche zu suchen, welche, wie sich zeigen wird, eben so bequem als sicher ist.

Die zu der erforderlichen Reduction dienenden Bestimmungen müssen aus den mehrerwähnten Versuchen von Dulong und Petit entnommen werden, denn es ist mir nicht bekannt, dass sonst schon jemand eine hinlänglich genaue Vergleichung des Ganges eines Luftthermometers mit einem Quecksilberthermometer angestellt habe. Nach den genannten Gelehrten aber ist bei gleichen Temperaturen der Gang beider Thermometer von 50° zu 50° der hunderttheiligen Skale folgender *):

Quecksilberthermometer	100;	150;	200;	250;	300;	360.
Luftthermometer . .	100;	148,70;	197,05;	245,05;	292,70;	350.

Wenn man davon absieht, aus diesen gefundenen Grössen den Gang der Ausdehnung des Quecksilbers durch Wärme im Allgemeinen genau zu bestimmen, und sich damit begnügt, eine bequeme Formel zu finden, um die Grade des Quecksilberthermometers auf die des Luftthermometers zu reduciren, so zeigt sich sogleich, dass man von jenen Graden eine gewisse Grösse abziehen müsse, welche mit den Temperaturen über dem Siedepuncte anfangend der Vermehrung der Wärme proportional wächst. Untersucht man die Differenzen beider Skalen näher, so ergiebt sich folgendes Gesetz des Fortganges derselben:

---

*) S. Ann. de Chimie et de Physique. VII. 118 flgd.

Quecksilber.	Luft.	1^{ste} Δ	2^{te} Δ	3^{te} Δ
100	100	0		
150	148,70	1,3		
			1,65	
200	197,05	2,95		0,35
			2,00	
250	245,05	4,95		0,35
			2,35	
300	292,70	7,30		0,35.
			2,70	
360	350,00	10,00		

Man erblickt in dieser Zusammenstellung sogleich ein regelmässiges Gesetz des Ueberschusses, welchen die Grade des Quecksilberthermometers über die des Luftthermometers zeigen, und da die dritten Differenzen jener Unterschiede constant werden, so kann es nicht schwierig seyn, die letzteren selbst durch eine zweigliedrige Reihe auszudrücken. Allein es zeigt sich dabei eine Schwierigkeit ganz eigener Art. Die Reihe ist nämlich eine von 50° zu 50° C. fortschreitende, bis auf das letzte Glied, wo die Differenz 60° C. beträgt. Wären aber die hier gegebenen Grössen absolut richtig, so würde daraus das, allen andern bisher aufgefundenen Thatsachen wiederstreitende, Gesetz hervorgehen, dass die regelmässig wachsende Ausdehnung des Quecksilbers nahe vor dem Siedepuncte plötzlich eine Verminderung erlitte, was mit jeder Theorie und aller Erfahrung im Widerspruche steht, indem vielmehr eine Vermehrung derselben zu erwarten ist. Weil es aber nach den verschiedenen darüber vorhandenen Bestimmungen noch fraglich ist, ob auch der Siedepunct des Quecksilbers nur bis 360° C. reicht, so vermuthe ich, dass sich in die Protocolle der Herren Dulong und Petit ein Schreibfehler, oder dass sich beim Abdruck ein Druckfehler eingeschlichen hat, und dass statt der correspondirenden Grade 360 und 350 es vielmehr heissen muss: 350 und 340. Es ist klar, dass beides leicht möglich seyn konnte, denn sobald nur eine der beiden Ziffern, entweder die 4 oder die 5, falsch geschrieben war, so lag es sehr nahe, die andern danach abzuändern. Gesetzt aber auch, diese sehr wahrscheinliche Vermuthung sey unstatthaft, so würde doch die Reihe innerhalb der Grenzen unserer Beobachtungen richtig seyn; und auf allen Fall weicht diese Substitution nur unmerklich von einer andern Bestimmung jener Gelehrten ab, wonach der Siedepunct des Quecksilbers bei 350° des Luftthermometers und 356° des Quecksilberthermometers liegen soll.

Wenn also die Summe von 50° C. als Einheit angenommen und durch s bezeichnet wird, da die letzte Differenz $= 0{,}35$ nach der Reihe der natürlichen Zahlen summirt werden muss, deren Summe $= \frac{n(n+1)}{2}$ ist, wenn man ferner berücksichtigt, dass diese letzte Differenz erst beim dritten Gliede hinzukommt, und wenn endlich die von den Graden des Quecksilberthermometers für die erforderliche Reduction auf Grade des Luftthermometers abzuziehende Grösse durch y bezeichnet wird, so ist allgemein vermöge der Summirung der Differenzen

$$-y = 1{,}3 + 1{,}65 \cdot s + \frac{s(s-1)}{2} \times 0{,}35.$$

Hieraus wird

$$-y = 1{,}30 + 1{,}475 \quad s + 0{,}175 \cdot s^2$$

und indem die beiden letzten Glieder für $s = 1$ verschwinden müssen, so ist

$$-y = 1{,}3 + 1{,}475\,(s-1) + 0{,}175\,(s-1)^2$$

welches aufgelöset

$$-y = 1{,}125 \cdot s + 0{,}175 \cdot s^2$$

giebt. Wenn dann t die Thermometergrade der Centesimalskale bezeichnet, t' aber $= t - 100$ und $t' = \frac{s}{50}$ gesetzt wird, so ist

$$-y = 0{,}0225\,t' + 0{,}00007\,t'^2$$

die zur Reduction erforderliche Formel, indem der gefundene Werth von y von den Graden des Quecksilberthermometers abgezogen, die correspondirenden Grade des Luftthermometers giebt.

Um aber an einem Beispiele zu zeigen, wie bei den Beobachtungen die gewöhnlichen Grade des Quecksilberthermometers bequem auf solche des Luftthermometers reducirt werden können, vorausgesetzt, dass die angegebenen Versuche und die hierauf gegründete Formel für diesen Zweck genügen, welches nach dem jetzigen Bestande der Wissenschaft und bei der hiernach allgemein herrschenden Voraussetzung, dass beide Thermometer bei 100° C. keine messbare Abweichung von einander zeigen, gleichfalls anzunehmen ist, so ist für 130° C. des Quecksilberthermometers $t' = 30$ und $-y = 0{,}738$, also erhält man $130 - 0{,}738 = 129°{,}262$ des Luftthermometers. Hat man aber auf diese Weise die zu den Beobachtungen erforderlichen Grade im Voraus berechnet, so darf man mit hinlänglicher Genauigkeit zu den 130 Graden des Quecksilberthermometers nur die noch fehlenden 0,738 Grade hinzuzählen, also die Temperatur bis 130°738 dieses Thermometers steigen lassen und dann die beobachtete Grösse für 130° des Luftthermometers aufzeichnen. Diejenigen Beobachtungen also, welche hier bei der Salpetersäure, desgleichen bei den beiden folgenden Flüssigkeiten der Schwefelsäure und dem Mandelöle über 100° sich aufgezeichnet finden, sind solche reducirte Grade des Luftthermometers.

Die Versuche mit Salpetersäure boten nichts Ausgezeichnetes dar, waren aber sowohl an sich, als auch insbesondere rücksichtlich der nachher erforderlichen Berechnung etwas schwierig, weil sie in einem weiten Umfange der Temperatur angestellt wurden, und daher bei der starken Ausdehnung dieser Flüssigkeit nicht weniger als ein sechsmaliges Herausnehmen erforderten. Indem nun das Röhrchen *A* zu denselben gebraucht wurde, so sind die zur Berechnung erforderlichen Grössen folgende. Für das Röhrchen *A* ist, den Nullpunct bei 8,2 Theilstrichen angenommen,

$$a = 5625{,}16966617336.$$

Weil aber der Nullpunct für diese Säure bei 138,5 Theilstrichen bestimmt wurde, so ist

$$a = 5755{,}46966617336$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}00017374776693$$

Eben so ist

$$a + m' = 5643{,}36966617336$$

$$\frac{a + n'}{a\,(a + m')} = 0{,}000178122733978$$

$$a + m'' = 5649,46966173336$$

$$\frac{(a+n')\,(a+n'')}{a(a+m')\,(a+m'')} = 0,00018246429 2025$$

$$a + m''' = 5628,26966173336$$

$$\frac{(a+n')\cdots(a+n''')}{a(a+m')\cdots(a+m''')} = 0,0001869349 06864$$

$$a + m^{IV} = 5641,86966173336$$

$$\frac{(a+n')\cdots(a+n^{IV})}{a(a+m')\cdots(a+m^{IV})} = 0,000190559712122$$

$$a + m^{V} = 5648,76966173336$$

$$\frac{(a+n')\cdots(a+n^{V})}{a(a+m')\cdots(a+m^{V})} = 0,000195808835914$$

$$a + m^{VI} = 5651,26966173336$$

$$\frac{(a+n')\cdots(a+n^{VI})}{a(a+m')\cdots(a+m^{VI})} = 0,000200313159751.$$

Die folgende Tabelle giebt eine Uebersicht der hiernach erhaltenen Werthe, mit Weglassung derjenigen, welche zur sechsten Herausnahme gehören, indem die Berechnung derselben mit grösserer Schwierigkeit verbunden ist, als sie selbst Werth haben. Es genügt vielmehr die allgemeine Bemerkung, dass die Ausdehnungen bis zu Ende regelmässig fortschritten, so weit sich dieses aus dem Beobachtungsprotocolle ohne weitere Berechnung schliessen lässt. Ausserdem will ich nicht verhehlen, dass wir den Siedepunct der Salpetersäure so hoch nicht erwartet hatten, und daher die über 115° C. liegenden Beobachtungen erst nachher hätten auf das Luftthermometer reduciren müssen, weil wir bei den Versuchen selbst zu sehr beschäftigt waren, um diese Rechnung noch während der Dauer derselben vorzunehmen.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
—21,25	21,7	—116,8	0,9797062608	0,9994359294	0,979153637327
—20	28,7	—109,8	0,9809224952	0,9994691099	0,980401733176
—15	52,6	— 85,9	0,9850750668	0,9996018325	0,984682841964
—10	81,4	— 57,1	0,9900790025	0,9997345550	0,989816191001
— 5	111,3	— 27,2	0,9952740607	0,9998671775	0,995141965484
0	138,5	0	1,0000000000	1,0000000000	0,000000000000
5	168,5	30,0	1,0052124330	1,0001327225	1,005345847308
10	197,6	59,1	1,0102684930	1,0002654450	1,0[illegible]0536663731
t''	ϑ''	$n'' - m'$	A''	$1 + \delta t''$	Volumen.
10	54,9	28,5	1,0102889309	1,0002654450	1,010557162628
15	82,8	56,4	1,0152585552	1,0003981675	1,015662798167
20	112,0	85,6	1,0204597390	1,0005308900	1,021001490899
25	140,8	114,4	1,0255896737	1,0006636125	1,026270267895
30	170,2	143,8	1,0308264821	1,0007963350	1,031647365353
35	198,0	171,6	1,0357782941	1,0009290576	1,036740591847
t'''	ϑ'''	$n''' - m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumen.
35	60,5	28,0	1,0359354823	1,0009290576	1,036897926056
40	89,9	57,4	1,0412999325	1,0010617800	1,042405563969
45	119,5	87,0	1,0467008755	1,0011945025	1,047951162365
50	149,2	116,7	1,0521200650	1,0013272250	1,053516460793
55	179,5	147,0	1,0576487331	1,0014599475	1,059192844697
t^{IV}	ϑ^{IV}	$n^{IV} - m'''$	A^{IV}	$1 + \delta t^{IV}$	Volumen.
55	41,5	3[illegible],2	1,0577654992	1,0014599475	1,059309781309
60	72,6	61,3	1,0635791748	1,0015926700	1,065273105461
65	103,0	91,7	1,0692619959	1,0017253925	1,071106892614
70	134,3	123,0	1,0751130586	1,0018581150	1,077110742271
75	164,4	153,1	1,0807397992	1,0019908375	1,082891376586
t^{V}	ϑ^{V}	$n^{V} - m^{IV}$	A^{V}	$1 + \delta t^{V}$	Volumen.
75	57,3	32,4	1,0812871932	1,0019908375	1,083439860335
80	89,5	64,6	1,0874232159	1,0021235600	1,089732424417
85	121,6	96,7	1,0935401827	1,0022562825	1,096007518309
90	154,3	129,4	1,0997714853	1,0023890050	1,102398844896
95	187,4	162,5	1,1060790118	1,0025217275	1,108868241651
t^{VI}	ϑ^{VI}	$n^{VI} - m^{V}$	A^{VI}	$1 + \delta t^{VI}$	Volumen.
100	61,7	29,9	1,1119336959	1,0026544500	1,114885268383
105	96,5	64,7	1,1187478435	1,0027871725	1,121865986679
110	135,4	103,6	1,1263648072	1,0029198950	1,128643674133
115	164,3	132,5	1,1320236825	1,0030526175	1,135479317841

*

Unter diesen Beobachtungen sind vier correspondirende, auf deren Vergleichung sich ein Urtheil über die Genauigkeit der Versuche gründen lässt. Es ist nämlich:

Für 10° das Volumen $a = 1{,}010536663731$
$b = 1{,}010557162628$
$\Delta = 0{,}000020498897.$

Für 35° — — $a = 1{,}036740591847$
$b = {,}036897926056$
$\Delta = 0{,}000157334209.$

Für 55° — — $a = 1{,}059192844697$
$b = 1{,}059309781309$
$\Delta = 0{,}000116936612.$

Für 75° — — $a = 1{,}082891376586$
$b = 1{,}083439860335$
$\Delta = 0{,}000548483749.$

Hierbei trifft es sich zum erstenmale, dass alle Differenzen auf eine Seite fallen, indem jedesmal die folgenden Werthe die grössten sind. Nach der Berechnungsart ist dieser Fall der wahrscheinlichste, weil allemal die vorhergehenden Grössen mit zur Bestimmung der folgenden dienen. Gesetzt aber auch, alle diese Differenzen wären als wirkliche Fehler zu betrachten, was auf keine Weise zu erwarten ist, so betrüge ihre Summe nur 0,00084322, also am Ende noch nicht einmal 0,001.

Bei der grossen Menge der vorhandenen Beobachtungen schien es uns zur Erleichterung der Rechnung am besten, die unter 0° C. und über 100° C. liegenden wegzulassen und aus den obigen die Formel zu entwickeln. Ohnehin gehörten diese Versuche unter die ersten, welche wir anstellten, und wir waren damals noch zu wenig geübt in der Beseitigung der Hindernisse, welche die

Beobachtungen unter 0° C. erschwerten, als dass wir die Sicherheit derselben mit genügendem Grunde erwarten könnten.

Die über 100° C. liegenden Beobachtungen liessen wir auch deswegen weg, weil uns daran lag, die Uebereinstimmung dieser mit der aus den übrigen erhaltenen Formeln kennen zu lernen. Aus den Betrachtungen über das Gesetz der Ausdehnung der Schwefelsäure, wo diese Frage in einem weiteren Umfange zur Untersuchung kommen wird, ergeben sich noch weiter die Gründe dieses Verfahrens. Aus den Beobachtungen zwischen 0° und 100° C. erhielten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
0{,}07883751115310 &= 75\,a + 1375\,b + 28125\,c + 611875\,d \\
0{,}21233981114363 &= 200\,a + 8250\,b + 350000\,c + 15221250\,d \\
0{,}35618191368552 &= 325\,a + 21375\,b + 1421875\,c + 95611875\,d \\
0{,}51189229765569 &= 450\,a + 40750\,b + 3712500\,c + 340221250\,d.
\end{aligned}$$

Die Werthe der unbekannten Coefficienten, welche aus diesen Gleichungen gefunden wurden, sind folgende:

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}001066128534228787333333\cdots \\
b &= -\,0{,}000001646108616134442222\cdots \\
c &= 0{,}000000044891360213893333\cdots \\
d &= -\,0{,}000000000198240972404444\cdots
\end{aligned}$$

Diese Werthe in die Formel für die Vermehrung des Volumens:

$$\Delta t = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$$

substituirt, gaben folgende mit den Resultaten der Beobachtungen verglichene Werthe, welche nebst den Unterschieden zur leichteren Uebersicht zusammengestellt sind.

Volumen der Salpetersäure

t′	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Unterschiede.
—20	0,9776281364	0,9804017331	— 0,0027735967
—15	0,9834761532	0,9846828419	— 0,0012066887
—10	0,9891272300	0,9898161910	— 0,0006889610
— 5	0,9946224692	0,9951419654	— 0,0005194962
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
5	1,0052949774	1,0053458473	+ 0,0000508699
10	1,0105395834	1,0105469131	+ 0,0000073297
15	1,0157630259	1,0156677981	— 0,0001002278
20	1,0209915395	1,0210014908	+ 0,0000099013
25	1,0262483850	1,0262702678	+ 0,0000220828
30	1,0315538498	1,0316473653	+ 0,0000935155
35	1,0369252473	1,0368192589	— 0,0001059884
40	1,0423769177	1,0424055639	+ 0,0000286462
45	1,0479202274	1,0479511623	+ 0,0000309349
50	1,0535635691	1,0535164607	— 0,0000471084
55	1,0593123620	1,0592513130	— 0,0000610490
60	1,0651690518	1,0652731054	+ 0,0001040536
65	1,0711331103	1,0711068926	— 0,0000262177
70	1,0772010359	1,0771107422	— 0,0000902937
75	1,0833663534	1,0831656184	— 0,0000007350
80	1,0896196137	1,0897324244	+ 0,0001128107
85	1,0959483945	1,0960075183	+ 0,0000591238
90	1,1023372996	1,1023988448	+ 0,0000615452
95	1,1087679493	1,1088682416	+ 0,0001002923
100	1,1152790302	1,1148852683	— 0,0003937619
105	1,1216661953	1,1218659866	+ 0,0001997913
110	1,1280821641	1,1286436741	+ 0,0005615100
115	1,1344366724	1,1354793178	+ 0,0010426454

Eigentlich können hierbei nur die zwischen 0° und 100° C. liegenden Beobachtungen in Betrachtung kommen, weil diese allein für die Auffindung der Formel benutzt sind. Dabei versteht sich von selbst, dass die unter 0° C. liegenden Beobachtungen mit den durch die Berechnung erhaltenen Werthen genau zusammentreffen müssten, wenn sie an sich einen hinlänglichen Grad von Zuverlässigkeit besässen. Es ist indess schon oben bemerkt, dass ihnen diejenige Genauigkeit nicht zukommt, welche wir bei den späteren Versuchen zu erreichen vermogten, und hierin liegt der Grund, warum sie sämmtlich verneinende und obendrein grosse Differenzen geben. Für die über 100° C. hinausliegenden Beobachtungen reicht indess die Formel nicht mehr vollständig aus, wie später nachgewiesen werden soll. Werden demnach bloss die zwischen 0° und 100° C. begriffenen Werthe in Betrachtung gezogen, so wechseln hierbei solche positive und negative Differenzen, dass die Formel allerdings als der richtige analytische Ausdruck des Gesetzes der Ausdehnung dieser Flüssigkeit gelten kann; allein daneben sind die Differenzen grösser, als bei den bisher untersuchten Flüssigkeiten, und die Beobachtungen müssen allerdings für weniger genau gelten, welches theils eine Folge des öfteren Herausnehmens, theils der Schwierigkeit bei der Manipulation einer so stark ätzenden Flüssigkeit ist. Die Differenzen heben sich daher auch weniger auf, als bisher der Fall war, denn es bleibt bei ihnen ein Rest = — 0,0001442760, also mehr als bei irgend einer der bisherigen Berechnungen. Uebrigens liegt dieser Fehler offenbar in der zu grossen negativen Differenz beim Siedepuncte, wo die Beobachtung sehr schwer mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten ist. Die Formel kann also demnach füglich als genügend betrachtet werden.

Sucht man vermittelst der gefundenen Formel den Punct der grössten Dichtigkeit für diese Säure, so ergiebt sich Folgendes. Die Differentialformel zur Bestimmung dieser Grösse ist

$$\frac{\Delta t}{dt} = 0{,}001066128534 - 0{,}0000032922172 32\, t + 0{,}0000001346740 8063\, t^2$$
$$- 0{,}0000000007929638896\, t^3$$

Dieses Differential = 0 gesetzt, giebt

$$0{,}1066128534 = 0{,}0003292217232\, t - 0{,}00001346740 8063\, t^2$$
$$+ 0{,}00000007929638896\, t^3.$$

Es ergiebt sich auf den ersten Blick, dass auch bei dieser Gleichung für jeden negativen Werth von t alle drei Glieder verneinend werden, und daher kein Minimum der Ausdehnung oder kein Punct der grössten Dichtigkeit statt findet, und es ist merkwürdig, dass auch bei dieser Säure, welche gleichfalls aus einer an Wasser gebundenen, wahrscheinlich gasförmigen, Substanz besteht, nach dem Resultate der Berechnung ihres Ausdehnungsgesetzes ein solcher Punct nicht existirt. Eben wie bei den nächstvorhergehenden Flüssigkeiten ist man daher auch berechtigt, auch bei ihr das Gegentheil des Punctes der grössten Dichtigkeit, also den Punct des Maximums ihrer Ausdehnung zu suchen, und soll das nämliche Naturgesetz bei dieser, wie bei jenen beiden herrschend seyn, so muss dieser sehr hoch liegen. Beim Ammoniak nämlich trennt sich das Gas sehr leicht vom Wasser, und der Siedepunct dieser Flüssigkeit liegt sehr niedrig, weswegen auch das Minimum ihrer Dichtigkeit bedeutend unter dem Siedepuncte des Wassers liegt: bei der Salzsäure erfolgt die Trennung des Gases vom bindenden Wasser weniger leicht, der Siedepunct liegt höher, und eben so der Punct der geringsten Dichtigkeit. Indem aber bei der Salpetersäure eine solche Trennung überhaupt nicht erfolgt, und der Siedepunct weit über dem des Wassers liegt, so muss man der Analogie nach auch jenen in sehr hoher Temperatur erwarten. Die Rechnung bestätigt diese Schlüsse vollkommen. Wird nämlich ein positiver Werth von t in die Gleichung substituirt, so ergiebt sich, dass $+$ 186,3 derselben am besten Genüge leistet. Für 186 ist nämlich

$$0{,}10661285 = 0{,}10557552$$

und für 187 ist

$$0{,}10661285 = 0{,}10915946$$

so dass der eigentliche Werth für t zwischen diesen beiden liegen, und bis auf einen verschwindenden Unterschied = 186,3 seyn muss. Könnte man also die Salpetersäure bis zu dieser Temperatur erhitzen, so würde wahrscheinlich eine Zersetzung derselben, vielleicht eine Trennung ihrer Basis erfolgen, oder das ihren Flüssigkeitszustand bedingende Wasser sich von ihr trennen. In wie fern diese Vermuthung auf dem Wege der Erfahrung geprüft werden könnte, darüber wusste ich vor der Hand noch nichts zu bestimmen.

9) *Ausdehnung der Schwefelsäure.*

Das Verhalten der Schwefelsäure rücksichtlich ihrer Ausdehnung durch Wärme untersuchten wir in dem weiten Umfange von — 30° C. bis 230° C. des Luftthermometers nach derjenigen Reduction, welche oben bei der Salpetersäure näher angegeben ist. Hier liegt also eine sehr ausgedehnte Reihe von Beobachtungen vor, und es schien uns daher der Mühe werth, an dieser hauptsächlich die gewählte Art der Berechnung unserer sämmtlichen Versuche zu prüfen. Diese allerdings sehr mühsame Arbeit führte zu einigen nicht unwichtigen Resultaten, welche ich indess erst am Ende der ganzen Untersuchung mittheilen werde; indem es mir am zweckmässigsten scheint, hier vorläufig die bei allen bisher untersuchten Flüssigkeiten gewählte Art der Berechnung vorauszuschicken.

Die von meinem Collegen L. Gmelin erhaltene concentrirte Schwefelsäure war vorher anhaltend und stark in einem Platintiegel erhitzt, und noch möglichst heiss in ein wohlverstopftes Glas gebracht. Sie bildete eine sehr dickflüssige, weisse, etwas ins gelbliche spielende, oder vielmehr zum Opalisiren hinneigende Masse, welche sich ungleich leichter in das Röhrchen bringen und überhaupt manipuliren liess, als wir voraussetzen durften, denn eben wegen ihrer Dickflüssigkeit war sie den Händen weit weniger gefährlich, und liess sich überhaupt mit leinenen Läppchen ungleich leichter vom Röhrchen abwischen, auch konnten die aus demselben zur Fortsetzung und Wiederanknüpfung der Versuche ausgetriebenen Quantitäten mit weit geringeren Schwierigkeiten weggeschafft werden, als wir erwartet hatten. Nicht ohne Grund fürchteten wir nämlich, dass eine so sehr concentrirte Säure nicht sowohl die Haut der Finger bei etwaniger Berührung sogleich zerfressen, als vielmehr hauptsächlich den zum Abwischen des Röhrchens gebrauchten Stoff zerstören, und somit durch hieraus aufgenommene kohlige Substanzen verunreinigt werden würde. Hiervon fand sich aber gerade das Gegentheil. Um einen Antheil Säure herauszunehmen, bedienten wir uns meistens des Mittels, das Röhrchen etwas erkalten zu lassen, wodurch sich die Säure in demselben zurückzog und zugleich ein Luftbläschen eindrang, welches dann einen angemessenen Theil der Säure beim Wiedererhitzen vor sich hintrieb. Letzterer konnte demnächst an der Mündung des Röhrchens mit leinenen Läppchen so vollständig weggenommen werden, dass nicht die mindeste Spur von Verunreinigung zurückblieb, weil es eine vollkommen hinreichende Zeit dauerte, bis die angewandte, stets neue, Leinwand angefressen wurde, und eben so liess sich die etwa auf die Haut gekommene Säure ohne Nachtheil so weit wegnehmen, dass man den Rest durch Wasser ohne Beschädigung abwaschen konnte. Das specifische Gewicht der Säure bestimmte ich erst einige Tage nach den Versuchen. Hierbei fand sich an dem genau schliessenden Glasstöpsel und dem gleich anfangs möglichst rein abgewischten Rande des Gläschens ein nur unbedeutender feuchter Niederschlag, welchen ich vor der Bestimmung sorgfältig wegnahm, so dass ich also keine merkliche, auf allen Fall aber eine unbestimmbare Verunreinigung der Säure durch Wasser aus der atmosphärischen Luft voraussetzen darf. Vermittelst des bei allen vorhergehenden Flüssigkeiten angewandten Apparates und der dabei befolgten Methode fand ich das specifische Gewicht der Säure = 1836 bei 12°,5 C.

Unsere Absicht war, die Ausdehnung der Schwefelsäure durch Wärme so zu verfolgen, wie immer möglich, und die Grenze lag sehr weit hinaus, da das zur Bestimmung der Temperatur gebrauchte Thermometer ohne Gefahr den Siedepunct des Quecksilbers aushielt. Es fand sich aber in den höheren Temperaturen, dass die bedeutende Menge des zum Erhitzen angewandten Olivenöls, obgleich auch dieses vorher über Kohlen in einem Camine stark erhitzt war, einen viel zu unausstehlichen Dampf ausstiess, als dass es möglich gewesen wäre, unsere Absicht vollständig zu erreichen. Als wir daher 240° C. nach dem reducirten Thermometer erreicht hatten, gaben wir es auf, weiter als bis 250° C. zu kommen, und mussten uns also entschliessen, dieses als die Grenze unserer Beobachtungen festzusetzen. Die Säure befolgte bis zu dieser Temperatur das stets beobachtete gleichmässige Gesetz der Ausdehnung, so weit dieses aus den unberechneten Beobachtungen geschlossen werden konnte. Inzwischen zeichneten wir den bei 250° beobachteten Stand nicht auf, und weil über den richtigen Stand der Säure bei 230° noch einige Unsicherheit vorhanden zu seyn schien, so beschlossen wir bis zu dieser Temperatur wieder herunter zu gehen und dann durch 240° bis zu 250° aufzusteigen, wie wir bei irgend zweifelhaften Beobachtungen oft gethan hatten. Insbesondere muss ich es der ängstlichen Genauigkeit des Herrn Arneth verdanken, dass er der auf ihn vorzüglich fallenden grossen Beschwerde des Oeldunstes ungeachtet die Beobachtungen lieber drei bis viermal wiederholen als irgend einen Zweifel über die Schärfe derselben obwalten lassen wollte. Auch diesesmal fanden wir dann den Stand bei 230° C. völlig bestätigt, stiegen dann bis 240° C. hinauf, und es war etwas ganz Eigenes, dass wir den um einige Zehntheile der Theilung schwankenden Stand bei dieser Temperatur nicht so schnell wie gewöhnlich fixiren konnten. Schon war der Stand des Quecksilbers im Thermometer bei dieser Temperatur auf eine solche Weise stationär, dass wir die Temperatur mit Leichtigkeit um eine Kleinigkeit steigen oder fallen lassen konnten, ohne dass es uns während einer vollen Viertelstunde möglich war, den Stand der Säure mit der gewöhnten Schärfe zu erhalten, als während dieser peinlichen Bemühung plötzlich eine Menge kleiner Luftbläschen mit hörbarem Zischen aus dem Oele aufstiegen. Ich fürchtete sogleich, dass die Kugel des Röhrchens einen Riss baben mögte, allein als sie herausgenommen ganz unversehrt sich zeigte, wurde sie wieder eingetaucht, um die Temperatur nicht zu sehr herabsinken zu lassen, und die gewünschte Grenze wo möglich zu erreichen. Inzwischen begann das Aufsteigen der Bläschen unmittelbar nach dem Wiedereintauchen aufs neue, und es war daher Zeit, den Versuch abzubrechen, damit nicht die Säure, mit dem heissen Oele vermischt, Gefahr bringen mögte. Wirklich zeigte auch die Kugel nach dem Reinigen einen sehr feinen Riss und zerbrach, als mit einem Federmesser gegen diesen mit beträchtlicher Gewalt gestossen wurde. Durch welche Ursache die schon oftmals bis zu einer höheren Temperatur erhitzte Kugel gesprungen seyn mag, da unter andern das Quecksilber in derselben beim anfänglichen Abwägen so oft gesiedet hatte, ist mir nicht klar, inzwischen war hiemit dieser so mühvoll hergestellte und so anhaltend gebrauchte Apparat verloren. Es verstand sich dabei von selbst, dass wir unser Register mit der zu 230°. C. gehörigen Beobachtung schlossen, obgleich die zu 240° C. gehörige kaum als unsicher zu betrachten war.

Die Zahl der von uns gemachten Beobachtungen, mit Weglassung derjenigen, welche zwischen 5 und 5 Graden C. lagen, und deren Aufnahme wir wegen der dennoch bleibenden grossen Zahl für überflüssig hielten, betrug nicht weniger als 47, welche einen Temperatur-Unterschied von — 30° bis + 230° C. des auf die angegebene Weise auf das Luftthermometer reducirten Quecksilberthermometers umfassten. *)

Die zur Berechnung derselben gehörigen Grössen waren folgende:
Für das Röhrchen *A* ist

$$a = 5625{,}1696617336$$

den Nullpunct bei 8,2 Theilstrichen angenommen. Weil derselbe aber für die Schwefelsäure bei 116,2 lag, so war

$$a = 5733{,}1696617336$$

$$\frac{1}{a} = 0{,}000174423583 98.$$

Auf gleiche Weise war

---

*) Nach Dalton's Angabe soll die Schwefelsäure von 1845 spec. Gewichte, welches von dem durch mich erhaltenen nur unbedeutend abweicht, bei — 25° C. gefrieren. S. L. Gmelin Handb. der theor. Chemie. Heid. 1819. T. I. p. 217. Ueber die Richtigkeit dieser Angabe will ich nicht streiten, kann aber versichern, dass wir die Schwefelsäure in einer kaltmachenden Mischung aus Schnee und verdünnter Schwefelsäure bei — 10° C. des Zimmers eine geraume Zeit auf — 25° R. also — 31°,25 C. erhalten haben, ohne dass sie gefror. Wir haben dabei keinen Fehler durch zu hohe Temperatur begangen, sondern umgekehrt, wie sich daraus ergiebt, dass die Vergleichung des durch Beobachtung bei — 30° C. erhaltenen Werthes der Ausdehnung, mit der durch Rechnung gefundenen verglichen, eine bejahende Differenz giebt. Etwas Weiteres über diesen Gegenstand wird unten beigebracht werden.

$$a + m' = 5629{,}5696617336$$

$$\frac{a\,(a+n')}{a\,(a+m')} = 0{,}000179542052 68$$

$$a + m'' = 5637{,}4696617336$$

$$\frac{a(a+n')\,(a+n'')}{a(a+m')\,(a+m'')} = 0{,}00018466639 3565$$

$$a + m''' = 5704{,}9696617336$$

$$\frac{a(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n''')}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m'')} = 0{,}000184935 05951$$

$$a + m^{IV} = 5640{,}0696617336$$

$$\frac{a(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n^{IV})}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m^{IV})} = 0{,}0001899813 6343$$

$$a + m^{V} = 5652{,}0696617336$$

$$\frac{a(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n^{V})}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m^{V})} = 0{,}0001948484 8345.$$

Vermittelst dieser Elemente erhielten wir die in folgender tabellarischen Uebersicht zusammengestellten Beobachtungen.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n'}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
—30	16,7	—99,5	0,98264485339398	0,9992036650	0,98186243890461
—25	34,9	—81,3	0,98581936262242	0,9993363880	0,98516516106350
—20	53,2	—63,0	0,98901131420 92	0,9994691100	0,98848625799263
—15	68,9	—47,3	0,99174976447777	0,9996018325	0,99135488195335
—10	84,0	3,2	0,99438356059584	0,9997345550	0,99411959535155
— 5	100,2	16,0	0,99720922265631	0,9998672775	0,99707687055519
0	116,2	0	1,00000000000000	1,0000000000	1,00000000000000
5	131,6	15,4	1,00268612319329	1,0001327225	1,00281920220224
10	147,2	31,0	1,00540713110338	1,0002654450	1,00567401139927
15	162,2	46,0	1,00802348486308	1,0003981675	1,00842484705394
20	177,8	61,6	1,01074449277316	1,0005308900	1,01128108691689
25	192,7	76,5	1,01334340417447	1,0006636125	1,01401587152423
t''	ϑ''	$n''-m'$	A''	$1 + \delta t''$	Volumen.
25	27,8	15,2	1,01347353197389	1,0006636125	1,01414608567808
30	44,4	31,8	1,01645393004838	1,0007963350	1,01726336788872
35	60,3	46,7	1,01912910663331	1,0009290576	1,02007593627517
40	75,9	63,3	1,02210950470780	1,0010617800	1,02319476013769
45	91,4	78,8	1,02489240652434	1,0011945025	1,02611664306614

t''	ϑ''	$n''-m'$	A''	$1+\delta t''$	Volumen.
50	106,8	94,2	1,02765735403561	1,0013272250	1,02902128656728
55	121,6	109,0	1,03031457651528	1,0014599475	1,03181878170543
60	136,6	124,0	1,03300770730548	1,0015926700	1,03465294769064
65	151,3	138,7	1,03564697547987	1,0017253925	1,03743377300385
70	165,9	153,3	1,03826828944900	1,0018581150	1,04019751133161
75	181,4	168,8	1,04105119126554	1,0019908375	1,04312375501648
80	196,3	183,7	1,04372636785047	1,0021235600	1,04594278341595
t'''	ϑ'''	$n'''-m''$	A'''	$1+\delta t'''$	Volumen.
80	35,7	15,8	1,04385812044773	1,0021235600	1,04607481580195
85	50,9	30,4	1,04666504962991	1,0022562825	1,04902662166471
90	66,2	45,7	1,04949044545146	1,0023890050	1,05299768337307
95	81,3	60,8	1,05227810799429	1,0025217275	1,05493246865419
100	96,3	75,8	1,05504890389776	1,0026544500	1,05784947846067
t^{IV}	ϑ^{IV}	$n^{IV}-m'''$	A^{IV}	$1+\delta t^{IV}$	Volumen.
105	103,6	15,6	1,05793389082618	1,0027871725	1,06088253507339
110	118,7	30,7	1,06072641022484	1,0029198950	1,06382361996630
115	133,2	45,2	1,06340796858777	1,0030526175	1,06665414636210
120	146,1	58,1	1,06579363085553	1,0031853400	1,06918854395936
125	161,9	73,9	1,06871560419584	1,0032180625	1,07215479838645
130	177,0	89,0	1,07150812419441	1,0034507850	1,07510566835646
135	192,5	104,5	1,07437461761778	1,0035835076	1,07822464722398
t^{V}	ϑ^{V}	$n^{V}-m^{IV}$	A^{V}	$1+\delta t^{V}$	Volumen.
135	38,5	15,4	1,07443383719123	1,0035835076	1,07828407911245
140	54,1	31,8	1,07754953155122	1,0037162300	1,08055395344582
150	84,9	60,8	1,08305899109095	1,0039816750	1,08727137999901
160	117,0	93,9	1,08934737422049	1,0042471200	1,09397396324018
170	148,1	125,0	1,09525579462316	1,0045125650	1,10018820758792
180	179,9	156,8	1,10129720198023	1,0047780100	1,10655921202427
190	212,3	189,2	1,10745259815536	1,0050434550	1,11303798549859
t^{VI}	ϑ^{VI}	$n^{VI}-m^{V}$	A^{VI}	$1+\delta t^{VI}$	Volumen.
190	65,1	30,0	1,10714265648373	1,0050434550	1,11272648065029
200	97,2	62,0	1,11337780795413	1,0053089000	1,11928861939872
210	129,4	94,3	1,11967141396957	1,0055743450	1,12591284871763
220	160,2	125,1	1,12567274725983	1,0058397900	1,13224643971251
230	192,4	157,3	1,13194686842694	1,0061052350	1,13885767006582

Beiläufig mache ich auch hierbei auf die genaue Uebereinstimmung der, gleichen Temperaturen zugehörigen, Beobachtungen aufmerksam, aus denen eben deswegen das arithmetische Mittel genommen wurde.

Die Versuchsreihe enthält nämlich gleichfalls vier correspondirende Beobachtungen, deren Differenzen als ein ohngefähres Maass zur Prüfung der Genauigkeit der ganzen Reihe dienen können. Es war nämlich

für 25° C. das Volumen $a = 1{,}01401587152423$
$b = 1{,}01414608567808$
$\Delta = 0{,}00013021415385.$

für 80° C. — — $a = 1{,}04594278341595$
$b = 1{,}04607481580195$
$\Delta = 0{,}00013203238600.$

für 135° C. — — $a = 1{,}07822464722398$
$b = 1{,}07828407911245$
$\Delta = 0{,}00005943188847.$

für 190° C. — — $a = 1{,}11303798549859$
$b = 1{,}11272648065029$
$\Delta = -0{,}00031150484830.$

Hierbei liegen drei Differenzen auf einer, und eine auf der entgegengesetzten Seite, so dass also die Methode der Berechnung keinen constanten Fehler herbeiführen kann, wie auch schon aus früheren Vergleichungen folgt. Werden die sämmtlichen Differenzen addirt, so bleibt der geringe Rest

$$= -\ 0{,}00001017358$$

welcher für eine so ausserordentlich lange Versuchsreihe als verschwindend zu betrachten ist.

Nach genauer Ueberlegung endlich schien es uns, bei einer so grossen Menge vorhandener Beobachtungen, wenn auch bloss der leichteren Berechnung wegen, besser, die für die Temperaturen unter dem Gefrierpuncte des Wassers erhaltenen

Werthe wegzulassen, indem sie ohnehin unter die frühesten gehören, die wir anstellten, und daher auf den erforderlichen Grad der Genauigkeit keine Ansprüche machen können. Es lagen somit 37 Beobachtungen zur Berechnung vor, aus denen wir auf die gewohnte Weise folgende vier Bedingungsgleichungen in den kleinsten Zahlen formirten:

$$0{,}01028141904 7507 = 18a + 510b + 16200c + 548250d$$
$$0{,}04453302716 8235 = 77a + 5565b + 435050c + 34618375d$$
$$0{,}06244671091 5876 = 108a + 13110b + 1609200c + 199628250d$$
$$0{,}10171805738 2113 = 171a + 33090b + 6515100c + 1303557000d.$$

Die Elimination der vier unbekannten Grössen erforderte sehr mühsame Rechnungen, welche wir indess zu grösserer Sicherheit nach der Beendigung nochmals revidirten, und wir erhielten dann folgende Werthe für die Coefficienten von t:

$$a = 0{,}000551615581045057162265924458$$
$$b = 0{,}0000008385198751879325786575 76$$
$$c = -\,0{,}00000000817123103507557759320 2$$
$$d = 0{,}000000000025216709712590488123.$$

Nach diesen Coefficienten wurden die Volumina der Schwefelsäure bei zunehmenden Temperaturen berechnet, die Werthe mit den durch Beobachtung erhaltenen verglichen, und die nachfolgende tabellarische Uebersicht zeigt beide nebst den Differenzen derselben.

Ausdehnung der Schwefelsäure

t	nach Rechnung.	nach Versuchen.	Unterschiede.
— 30	0,984447249229 11	0,981862458904 61	+ 0,002584790324 50
— 25	0,986871211158 00	0,985165161063 50	+ 0,001706050094 50
— 20	0,989372500850 93	0,988486257992 63	+ 0,000886242858 30
— 15	0,991943287756 89	0,991354881953 35	+ 0,000588405803 54
— 10	0,994576119575 19	0,994119595351 55	+ 0,000456524223 64
— 5	0,997263922255 97	0,997076870555 19	+ 0,000187051700 78

t	nach Rechnung.	nach Versuchen.	Unterschiede.
0	1,00000000000000	1,00000000000000	0,00000000000000
5	1,00277803525866	1,00281920220224	+ 0,00004116694358
10	1,00559208873402	1,00567401139927	+ 0,00008192266525
15	1,00843659937874	1,00842484705394	— 0,00001175232480
20	1,01130638439625	1,01128108691689	— 0,00002529747936
25	1,01419663924041	1,01408097860115	— 0,00011566063926
30	1,01710293761593	1,01726336788872	+ 0,00016043027279
35	1,02002123147804	1,02007593627517	+ 0,00005470479713
40	1,02294785103271	1,02319476013769	+ 0,00024690910498
45	1,02587807388383	1,02611664306614	+ 0,00023856918231
50	1,02881327929654	1,02902128656728	+ 0,00020200727074
55	1,03174663967077	1,03181878170543	+ 0,00007214203466
60	1,03468742906767	1,03465294769064	— 0,00003448137703
65	1,03760386893746	1,03743377300385	— 0,00017009593361
70	1,04052455901674	1,04019751133161	— 0,00032704768513
75	1,04343847723913	1,04312375501648	— 0,00031472222265
80	1,04634497982467	1,04600879960895	— 0,00033618021572
85	1,04924380123508	1,04902662166471	— 0,00021717957037
90	1,05213505318274	1,05299768337307	+ 0,00086263019033
95	1,05501922963068	1,05493246865419	— 0,00008676097649
100	1,05789719679255	1,05784947846067	— 0,00004771833188
105	1,06077020313268	1,06088253507339	+ 0,00011233194071
110	1,06363987436603	1,06382361996630	+ 0,00018374560027
115	1,06650821445821	1,06665414636210	+ 0,00014593190389
120	1,06937760562540	1,06918854593936	— 0,00018905968604
125	1,07225080833470	1,07215479838645	— 0,00009600994825
130	1,07513096130345	1,07510566835646	— 0,00002529294699
135	1,07802158149990	1,07825436366821	+ 0,00023278216831
140	1,08092592448478	1,08055395244582	— 0,00037197103896
150	1,08679708889708	1,08727137999901	+ 0,00047429110193
160	1,09278126432957	1,09397396324018	+ 0,00119269891061
170	1,09892386321429	1,10018820758792	+ 0,00126434437363
180	1,10527572233548	1,10655921202427	+ 0,00128348968879
190	1,11189372248775	1,11288223307444	+ 0,00098851058669
200	1,11884079847606	1,11928861939872	+ 0,00044782092260
210	1,12618593711553	1,12591284871763	— 0,00027308839790
220	1,13400417723102	1,13224643971251	— 0,00175773751851
230	1,14237660966081	1,13885767006582	— 0,00351893959499

Aus der Uebersicht der Differenzen zwischen den durch Rechnung und Beobachtung erhaltenen Werthen ergiebt sich zwar bald, dass die Unterschiede beider merklich grösser sind, als die bei den vorhergehenden Berechnungen erhaltenen, allein dieses lässt sich sehr leicht erklären. Zuvörderst nämlich gab das Röhrchen *A* nicht so genaue Resultate, als das andere von uns durch *B* bezeichnete, weil das Gesammtvolumen der in ihm enthaltenen Flüssigkeit ungleich kleiner war, und ausserdem ist schon angegeben, welchen Schwierigkeiten gerade diese Versuche in den sehr hohen Temperaturen unterlagen, so dass grössere Beobachtungsfehler, als bei den übrigen untersuchten Flüssigkeiten ganz unvermeidlich seyn mussten. Eine genauere Prüfung zeigt inzwischen dennoch, dass weder die Versuche noch auch die aus ihnen entwickelte Formel als verwerflich anzusehen sind. Es wechseln nämlich auch hierbei die positiven und negativen Differenzen so ohne eine bestimmte Folge, dass an keinen constanten Fehler zu denken ist, wobei sich von selbst versteht, dass diejenigen, welche den Temperaturen unter 0° C. zugehören, nicht in Betrachtung kommen können, weil diese Beobachtungen bei der Auffindung der Formel weggelassen und nur deswegen mit denen nach der Formel berechneten verglichen sind, weil es doch interessant war, die Uebereinstimmung beider zu übersehen, welche für die Schwierigkeit der Aufgabe immerhin genau genug ist, insofern die grösste Differenz nur 0,0025 des Volumens erreicht. Von den übrigen Differenzen sind 18 verneinend und 19 bejahend, also selbst die Mengen derselben heben sich so nahe auf, wie möglich, und wenn die Summen beider addirt werden, so bleibt + 0,00036742377126. Man darf also mit Recht sagen, dass auch dieses Resultat billigen Forderungen genügend entspricht.

Die Frage, welchen Punct der grössten oder geringsten Dichtigkeit die gefundene Formel geben möge, war von besonderer Wichtigkeit, da die ihr zum Grunde liegenden Beobachtungen so grosse Unterschiede der Temperaturen umfassen. Die Gleichung

$$\Delta v = 0{,}000551615581\, t + 0{,}000000838519875\, t^2$$
$$- 0{,}00000000817123103\, t^3 + 0{,}0000000000252167097\, t^4$$

differenzirt giebt

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}000551615581 + 0{,}00000167703975\, t - 0{,}0000000245136931\, t^2$$
$$+ 0{,}000000000100866838\, t^3$$

und dieses Differenzial $= 0$ gesetzt, erhält man

$$0{,}551615581 = - 0{,}00167703975\, t + 0{,}0000245136931\, t^2$$
$$- 0{,}000000100866838\, t^3.$$

Für jeden Werth von $-t$ werden alle drei Glieder der Gleichung rechts bejahend, und es folgt hieraus, dass diesemgemäss die Schwefelsäure einen Punct der grössten Dichtigkeit haben müsse; zugleich aber übersieht man bald, dass $t = -100$ der Gleichung noch nicht genüge, und die genauere Rechnung ergiebt, dass dieses erst durch $t = -104$ nahe genau geschieht. Wird nämlich dieser Werth für $-t$ in die Gleichung substituirt, so erhält man

$$0{,}5516155 = 0{,}5530316.$$

und da für $-t = 103$

$$0{,}5516155 = 0{,}5430374$$

wird, so folgt, dass die erstere Grösse bis auf etwa 0,1 Grad der Gleichung vollständig genüge.

Dieses Resultat ist indess sehr auffallend, und wenn bei allen acht vorhergehenden Untersuchungen sich eine sehr genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigte, oder mindestens soviel hervorging, dass die erhaltenen Resultate gewisse Eigenthümlichkeiten der untersuchten Flüssigkeiten ausdrückten, so stellt das eben gefundene einen Satz auf, welcher demjenigen gerade widerstreitet, was bis jetzt über das Verhalten der concentrirten Schwefelsäure bekannt ist. Das sogenannte zweite Schwefelsäurehydrat nämlich, dessen spec. Gewicht = 1845, also mit dem durch mich gefundenen = 1836 sehr nahe übereinstimmend, angegeben wird, soll nach Dalton bei — 25° C. nach Thomson in Thermometerkugeln erst bei — 38° C. gefrieren. Beide Angaben weichen mehr von einander ab, als dass nicht bei einer derselben ein Fehler zu vermuthen seyn sollte, und in diesem Falle bin ich geneigt, ihn bei Dalton vorauszusetzen, welcher seiner geistreichen Combinationen unbeschadet nicht allezeit mit der erforderlichen Schärfe und mit Anwendung hinlänglich reiner Substanzen gearbeitet hat, auch geht aus unsern Versuchen in Uebereinstimmung mit Thomson hervor, dass die in eine Thermometerkugel eingeschlossene Schwefelsäure bei — 33° C. noch nicht gefriert, denn da wir den Stand derselben bei — 31°,25 C. notirt haben, und wir nie den tiefsten Stand aufzeichneten, sondern erst denjenigen, welchen die Flüssigkeit nach einigem Schwanken über und unter einem nachher bleibend beibehaltenen Stande annahm, so lässt sich mit Sicherheit voraussetzen, dass sie bei — 33° C. noch nicht gefror. Das Verhalten der mit etwas mehr oder weniger Wasser vermischten Schwefelsäure ist zwar für alle einzelne kleine Unterschiede dieser Verbindungen noch nicht hinlänglich untersucht; allein da die concentrirtere Säure von 1896 specifischen Gewichts und die verdünntere von 1780 specifischen Gewichts beide schon in der Nähe des Gefrierpunctes des Wassers in Eis verwandelt werden *), so ist es undenkbar, dass gerade bei diesem speciellen Schwefelsäurehydrate der Gefrierpunct bis 103° C. herabsinken sollte. Müsste man hiernach das auf die angegebene Weise aus der Formel erhaltene Resultat aber für so auffallend unrichtig erklären, so ist nicht zu leugnen, dass diesemnach die Sicherheit der acht bisher aufgefundenen Bestimmungen sehr schwankend erscheinen könnte, womit dann zugleich eine Menge wichtiger Folgerungen über das Verhalten der Flüssigkeiten durch den Einfluss der Wärme auf dieselben verloren würde, welche sich sonst allerdings auf die aufgefundenen Formeln gründen liessen, wenn diese die Puncte der grössten und geringsten Dichtigkeiten genau angäben, und sich somit als die richtigen analytischen Ausdrücke des gesammten Verhaltens der untersuchten Flüssigkeiten durch den Prüfstein der Erfahrung legitimirten.

---

*) Vgl. L. Gmelin Handbuch der theor. Chemie. 2. Ausg. 1821. T. I. p. 200 folgd.

Es liegt indess sehr nahe bei der Sache, dass es viel zu übereilt geschlossen seyn würde, wenn man wegen eines allerdings sehr auffallenden Mangels an Uebereinstimmung der einzigen, für die Schwefelsäure gefundenen, Formel mit der Erfahrung sogleich die ganze Methode der Erforschung und Bestimmung allgemeiner Gesetze für das Verhalten der Flüssigkeiten durch den Einfluss der Wärme als unsicher verwerfen wollte, da sich bei allen acht bisher untersuchten Flüssigkeiten keine solche Abweichung von der Erfahrung, bei einigen derselben aber eine ganz ausgezeichnete Uebereinstimmung mit derselben gezeigt hat. Bemerkenswerth ist es vielmehr, dass eine solche auffallende Abweichung von der Erfahrung gerade bei der Schwefelsäure zum Vorschein kommt, wobei die Beobachtungen mehr als den doppelten Umfang irgend einer vorhergehenden haben, ein nicht zu übersehender Umstand, welcher zu folgenden Betrachtungen führte, aus denen die Anomalie erklärlich wird.

Zuvörderst hatte ich mir gleich anfangs die Frage aufgeworfen, ob es rathsam sey, die Formeln für die Ausdehnung der Flüssigkeiten bis zur vierten Potenz der Temperaturen fortzusetzen, und aus guten Gründen dafür entschieden, um hierdurch grössere Genauigkeit zu erhalten, wenn gleich die Schwierigkeit der Rechnung bedeutend vermehrt wurde. Dabei glaubte ich richtig zu schliessen, dass bei der Auffindung der Formeln der Coefficient des vierten Gliedes in zu hohe Decimalstellen hinaufrücken würde, wenn in Folge der Beobachtungen der Einfluss der vierten Potenz der Temperatur auf die Bestimmung der Curve, welche das Gesetz der Ausdehnung jeder gegebenen Flüssigkeit durch Wärme ausdrückt, ohne merklichen Einfluss wäre. Keine von den aufgefundenen Formeln hat indess im Coefficienten der vierten Potenz so hohe Decimalstellen, als die für die Schwefelsäure, und dennoch beträgt das Product von $t^4 \times d = 100^4 \times d$ bei dieser nicht weniger als 0,002521671, und rückt somit bei 100° C. schon bis in die dritte Decimalstelle vor. Es war daher für die Erreichung eines hohen Grades von Genauigkeit allerdings rathsam, die Rechnung so weit fortzusetzen, wie sich aus dem folgenden noch mehr ergeben wird.

Man könnte dieser Schlussfolgerung allerdings entgegensetzen, dass die Curve für die Ausdehnung einer Flüssigkeit, wenn eine Gleichung von drei Gliedern für dieselbe aus den Beobachtungen wirklich gefunden ist, durch diese mit gleicher Genauigkeit ausgedrückt werden könne, als durch eine andere von vier Gliedern, indem dasjenige, was durch das vierte Glied hinzukommt, mit einem gleichen Grade der Genauigkeit auch auf die drei übrigen Glieder vertheilt werden könne.

Um dieses allerdings scheinbare Argument zu prüfen, entschlossen wir uns gerade für die in dieser Hinsicht interessanten Versuche mit der Schwefelsäure bloss die bis 100° C. reichenden Beobachtungen in Rechnung zu nehmen, aus diesen eine Formel zu entwickeln, und die vermittelst derselben berechneten Werthe mit den gesammten, durch Beobachtung erhaltenen, zusammen zu stellen, zugleich aber beide gefundene Formeln mit einander zu vergleichen, und auf diese Weise überhaupt zu einer gründlichern Prüfung der befolgten Methode und dessen, was durch dieselbe erreicht werden kann, zu gelangen. Die sämmtlichen Beobachtungen zwischen 0° bis 100° C. also, mit Weglassung derjenigen, welche sowohl für verneinende Temperaturen, als auch für die über dem Siedepuncte des Wassers liegenden erhalten waren, gaben folgende vier Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0{,}042280126 17349 &= 75\,a + 1375\,b + 28125\,c + 611875\,d\\
0{,}115671993 93500 &= 200\,a + 8250\,b + 350000\,c + 15221250\,d\\
0{,}187226768 74801 &= 325\,a + 21375\,b + 1421875\,c + 95611875\,d\\
0{,}260815051 76159 &= 450\,a + 40750\,b + 3712500\,c + 340221250\,d.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Bestimmungen der unbekannten Coefficienten:

$$
\begin{aligned}
a &= 0{,}00052798351663219336983 1\\
b &= 0{,}00000287180238185804334 0\\
c &= -\,0{,}0000000512240355066603 63\\
d &= 0{,}000000000283244371228617.
\end{aligned}
$$

Es zeigt sich hierbei sogleich, dass die gefundene Gleichung für das Gesetz der Ausdehnung der Schwefelsäure durch Wärme mit der oben erhaltenen der Form nach identisch ist, denn beide haben die zwei ersten und das letzte Glied bejahend, das dritte aber verneinend, auch sind sich die Coefficienten selbst sehr ähnlich, hauptsächlich die beiden der ersten Potenz von t zugehörigen, und man ersieht daher hieraus, dass die Art der Ausdehnungscurve eben so gut durch eine geringere als eine grössere Anzahl von Beobachtungen bestimmt werden kann. Ob inzwischen die durch die Beobachtungen bei niederen Temperaturen gefundene Formel auch solche Werthe giebt, welche mit den Beobachtungen bei höheren Temperaturen übereinstimmen, dieses kann nur durch eine Zusammenstellung beider gefunden werden, welche jedoch der Kürze wegen nur von zehn zu zehn Graden in der nachfolgenden Tabelle enthalten ist.

Ausdehnung der Schwefelsäure.

t	Berechnet.	Beobachtet.	Differenzen.
—30	0,9883575935	0,9818624389	+ 0,0064951546
—20	0,9910441620	0,9884862579	+ 0,0025579041
—10	0,9950614015	0,9941195953	+ 0,0009418062
0	1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000
10	1,0055186238	1,0056740113	+ 0,0001553875
20	1,0113439181	1,0112810869	— 0,0000628312
30	1,0172705066	1,0172633678	— 0,0000071388
40	1,0228444462	1,0231947601	+ 0,0003503139
50	1,0289459546	1,0290212865	+ 0,0000753319
60	1,0346239549	1,0346529476	+ 0,0000289927
70	1,0402615310	1,0401975113	— 0,0000640197
80	1,0459931998	1,0460087996	+ 0,0000155998
90	1,0520214570	1,0529976834	+ 0,0009762264
100	1,0586167770	1,0578494784	— 0,0007672986
110	1,0661176127	1,0638236199	— 0,0022939928
120	1,0749303957	1,0691885459	— 0,0163409903
130	1,0855295362	1,0751056683	— 0,0104238679
140	1,0984574232	1,0805539534	— 0,0179034698
150	1,1143244241	1,0872713799	— 0,0270530442

t	Berechnet.	Beobachtet.	Differenzen.
160	1,1338088853	1,0939739632	— 0,0398349221
170	1,1576571314	1,1001882075	— 0,0574689239
180	1,1866834662	1,1065592120	— 0,0801242542
190	1,2217701716	1,1128822331	— 0,1088879385
200	1,2638675084	1,1192886194	— 0,1445788890
210	1,3145215808	1,1259128487	— 0,1886087321
220	1,3732350130	1,1322464397	— 0,2401885733
230	1,4427455956	1,1388576701	— 0,2038879255

Die nach dieser Formel berechneten Werthe stimmen innerhalb der Grenze von 0° bis 100° C. mit den Beobachtungen genügend überein. Die Unterschiede sind bald bejahend, bald verneinend, ohne Andeutung eines constanten Fehlers, und fallen nur in die vierte Decimalstelle, wenn die den Beobachtungen unter dem Gefrierpuncte zugehörigen aus den oben angegebenen Gründen weggelassen werden. Addirt man ferner die Differenzen zusammen, so lassen sie zwar einen Rest von + 0,0007005, allein hierauf lässt sich kein Schluss bauen, weil die weggelassenen Werthe diesen Ueberfluss ganz oder mindestens zum grössten Theile aufheben könnten, wenn sie gleichfalls mit aufgenommen wären. Ganz anders aber verhält es sich mit denjenigen Werthen, welche für die höheren Temperaturen durch die Berechnung nach dieser Formel gefunden sind. Es zeigen nämlich die Differenzen dieser Werthe sowohl durch ihre unerwartete Grösse, als auch durch ihren stets negativen Charakter, dass die auf diese Weise gefundene Formel gar nicht geeignet ist, die Ausdehnung der Schwefelsäure in höheren Temperaturen darzustellen.

Diese Bemerkung scheint etwas Auffallendes zu haben, weil die Formeln, der Voraussetzung nach, das Gesetz der Ausdehnung der Flüssigkeiten für alle mögliche Temperaturen ausdrücken sollten, und da durch unsere Versuche erwiesen ist, dass ohne Zweifel die sämmtlichen Flüssigkeiten die ihnen eigenthümliche Ausdehnung auch über ihren Siedepunct hinaus beibehalten, folglich auch nach dem nämlichen Gesetze an Wärme zunehmen würden, wenn ein mechanischer Druck sie am Sieden hinderte, wobei sich von selbst versteht, dass von ihrem jedesmaligen Volumen dann die durch diesen Druck bewirkte Verminderung abzuziehen wäre, so sollte man billig erwarten, dass sich vermittelst der aus den zwischen 0° und 100° C. liegenden Beobachtungen gefundenen Formel das Volumen der Flüssigkeiten für jede gegebene Temperatur finden lasse. Allein dieses ist keineswegs der Fall, vielmehr habe ich namentlich die Volumensvermehrung des Wassers bei 640° C. gesucht, und finde dieselbe = 35,28, folglich müsste das Volumen des Wassers, den Einfluss des erforderlichen Druckes zur Verhütung des Siedens nicht gerechnet, bei der angegebenen Temperatur bis zum 36fachen anwachsen, was zum mindesten im höchsten Grade unwahrscheinlich und mit dem erwiesenen Verhalten des Wasserdampfes ganz unvereinbar ist. Hiernach betrüge nämlich die Dichtigkeit des Wassers bei dieser Temperatur nicht mehr als nahe 0,03 derjenigen bei 0° C., da doch die Dichtigkeit des Dampfes bei gleicher Temperatur 0,21 oder siebenmal mehr beträgt *). Für einige Flüssigkeiten aber, z. B. diejenigen, für welche oben der Punct der geringsten Dichtigkeit gefunden ist, wird die Volumensvermehrung bei sehr hohen Temperaturen negativ, und zwar so stark, dass sie nicht bloss dichter als bei 0° werden müssten, sondern dass ihr ganzes Volumen verneinend, mithin geringer als 0° seyn würde, was doch ganz undenkbar ist. In wie fern sich die Formeln gegen diesen allerdings scheinbaren Einwurf vertheidigen lassen, werde ich sogleich zeigen.

Eine Hauptfrage ist aber die, wie die Bestimmung des Punctes der grössten oder geringsten Dichtigkeit nach der zweiten Formel ausfallen möge. Sie selbst heisst:

$$\Delta v = 0{,}0005279835 16\, t + 0{,}00000287180238\, t^2 - 0{,}000000051 2240355\, t^3 \\ + 0{,}0000000002832 44371\, t^4.$$

---

*) S. Gehlers Wörterbuch III. p. 388.

Wird diese differentiirt, so ist:

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}000527983516 + 0{,}00000574360476\,t - 0{,}0000001536721065\,t^2 + 0{,}000000001132977484\,t^3$$

und dieses Differential = 0 gesetzt, giebt

$$0{,}5279835166 = -0{,}00574360476\,t + 0{,}0001536721065\,t^2 - 0{,}000001132977485\,t^3.$$

Für jeden negativen Werth von t werden alle Glieder zur Rechten bejahend, und die Formel giebt also für die Schwefelsäure einen Punct der grössten Dichtigkeit. Sucht man denjenigen Zahlenwerth für $-t$, welcher in die Gleichung substituirt derselben Genüge leistet, so findet sich dieser hinlänglich genähert $= -39$, denn dieses giebt

$$0{,}5279835 = 0{,}5249429.$$

Wollte man sich dem eigentlichen Werthe von $-t$ noch mehr nähern, so könnte dieses nur durch Anhängen von Decimalstellen geschehen, denn für $t = -40$ wird

$$0{,}5279835 = 0{,}5481325$$

woraus sich ergiebt, dass $t = -39{,}2$ der Gleichung noch mehr Genüge leisten würde.

Dieses Resultat stimmt sehr genau mit der Erfahrung überein. Es folgt nämlich schon mit grosser Gewissheit aus dem krystallinischen Gefüge der gefrierenden Schwefelsäure, dass sie beim Festwerden durch Kälte sich ausdehnen und also eine Vermehrung ihres Volumens erhalten muss. Ferner aber gefriert, wie oben angegeben ist, Schwefelsäurehydrat von 1845 specifischen Gewichts nach Thomson bei 38° C. Die von uns gebrauchte Säure zeigte ein specifisches Gewicht von 1836 bei 12°,5 C., welche Bestimmung von jener an sich nicht sehr abweicht, und vermuthlich etwas zu geringe ist, weil zwar das Röhrchen mit der eben im Platintiegel stark erhitzten und noch sehr heissen Säure gefüllt war, die letztere jedoch selbst hierbei einigemale durch das Oeffnen des Gläschens mit der atmosphärischen Luft in Berührung kam, und nachher einige Tage im verstopften Glase stand, dessen Rand und Stöpsel mindestens einen geringen feuchten Niederschlag zeigten. Inzwischen beträgt der Unterschied beider Bestimmungen des Gefrierpunctes, wenn man den aus der Formel gefundenen Punct der grössten Dichtigkeit gleichfalls als den Gefrierpunct annehmen will, nur 1°,2 C., und da der Gefrierpunct der Schwefelsäurehydrate nach der Menge des enthaltenen Wassers so sehr veränderlich ist, so kann der durch die Formel gefundene Werth immerhin für absolut richtig gelten.

Je überraschender diese genaue Uebereinstimmung des Resultats und der Formel mit dem durch die Erfahrung erhaltenen ist, um so wichtiger wird die Frage, warum die früher mitgetheilte, aus allen bis 230° C. reichenden Beobachtungen erhaltene Formel nicht eine gleiche Bestimmung giebt; denn wenn eine grössere oder geringere Zahl von Beobachtungen, welche zum Auffinden der Formel für die Ausdehnung einer Flüssigkeit in Rechnung genommen wird, einen so bedeutenden Unterschied in der Bestimmung des Punctes der grössten Dichtigkeit macht, so könnten hiernach die sämmtlichen hierfür gefundenen Werthe als höchst unsicher erscheinen, indem man nicht wissen kann, ob eine hinlängliche Menge von Beobachtungen zur Erhaltung eines sicheren Resultates aufgenommen sey. Meine Ansichten hierüber sind folgende:

Der analytische Ausdruck für die Ausdehnung einer Flüssigkeit gehört zu einer Curve, durch welche die Incremente des Volumens derselben bei verschiedenen Temperaturen bezeichnet werden. Um sich diese vorzustellen, denke man sich eine gerade Linie von willkührlicher Länge als Axe der Abscissen, nehme auf dieser einen beliebigen Punct für das Null der Thermometerskale, und trage auf dieselbe von hieran nach beiden Seiten die bejahenden und verneinenden Grade der Wärme für eine beliebige (hier also die hunderttheilige) Thermometerskale als Abscissen. Auf diese fälle man rechtwinklich die Ordinaten, nehme auf derjenigen, welche dem Nullpuncte des Thermometers zugehört, eine beliebige Länge als Einheit für das Volumen der jedesmaligen Flüssigkeit im Gefrierpuncte des Wassers, addire hierzu die den Temperaturen zugehörigen Vermehrungen oder Verminderungen des Volumens der Flüssigkeit, bestimme hierdurch die jeder Temperatur zugehörige Länge der Ordinaten und ziehe durch die hierdurch erhaltenen Puncte eine Curve, so bezeichnet diese den Gang der Ausdehnung der Flüssigkeit durch Wärme nach den Beobachtungen. Weil die so erhaltene Curve aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht völlig genau seyn kann, so entfernt man die letzteren durch die bekannten Methoden, und findet auf diese Weise die richtige Curve der Ausdehnung tropfbarer Flüssigkeiten durch Wärme. Es ist nicht zweifelhaft, dass die Gleichung oder der analytische Ausdruck für diese Curve verschieden seyn kann und durch die Reihe der Beobachtungen gegeben wird, wobei nur soviel als absolut gewiss anzunehmen ist, dass die Vermehrung des Volumens eine Function der Temperatur seyn muss. Seit Thomas Young hat man angenommen, die gesuchte Curve sey eine parabolische höherer Ordnung, deren Form allgemein ist

$$v' = v + \Delta v = 1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + \cdots pt^n.$$

Hierbei sind blos die Coefficienten unbekannt und werden aus den Beobachtungen gefunden, vorausgesetzt wird, aber ohne Beweis, dass die Potenzen der Temperaturen nach der Reihe der ganzen natürlichen Zahlen steigen, und ganz unbestimmt ist es gelassen, wie viele Glieder aufzunehmen sind, oder welches der Werth von n für jede einzelne Flüssigkeit sey. Indem ich aber dreist behaupten zu dürfen glaube, dass nirgend eine so grosse Reihe bis so weit ausgedehnter genauer Beobachtungen über die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten existire, als die hier mitgetheilten, so sind diese allerdings geeignet, die analytischen Ausdrücke für die Curve der Ausdehnung an ihnen zu prüfen. Sollte dieses aber eben so gründlich als umfangend geschehen, so würde hierzu ein grösserer Aufwand von Zeit und Mühe erfordert werden, als welchen ich gegenwärtig zu verwenden im Stande bin, und indem ich dieses daher den geübteren Physikern überlasse, begnüge ich mich hier mit einigen allgemeinen Bemerkungen.

Dass zuvörderst die Gleichung geeignet sey, als richtiger Ausdruck der gesuchten Curve zu gelten, dieses kann wohl im Allgemeinen nicht bezweifelt werden. Ich darf nämlich nochmals versichern, dass an den Originalbeobachtungen nie das Mindeste geändert ist, um sie den durch Rechnung gefundenen Werthen mehr anzupassen, und da sowohl jene, als auch die Methode der Berechnung und die hierbei erhaltenen Grössen absichtlich so vollständig mitgetheilt sind, dass jede einzelne Grösse vollständig controllirt werden kann, ausserdem aber für jeden etwa entstehenden Zweifel die Originalprotocolle nebst den ausführlichen Rechnungen *) und selbst zum Theil die Apparate hier noch vorhanden sind, so lässt sich gegen die Beobachtungen an sich nichts einwenden. Es stimmen aber bei einigen Versuchsreihen die durch Beobachtung und Berechnung erhaltenen Werthe so unglaublich genau mit einander überein, dass hierdurch die Zulässigkeit der Formel eine unwandelbare Stütze erhält.

Schon hierauf liesse sich dann ferner das Argument gründen, dass die Aufnahme von vier Gliedern in die Gleichung keineswegs überflüssig ist, wie schon oben angedeutet wurde. Prüft man nämlich eine von den vorzüglich genau mit der Berechnung übereinstimmenden Versuchsreihen, so nimmt man bald wahr, dass selbst auch die höheren Decimalstellen nach einem bestimmten Gesetze wachsen oder abnehmen, und dieses lässt sich nur durch eine viergliedrige Gleichung erreichen, indem dann der Coefficient des letzten Gliedes erst in den höheren Decimalstellen einen merklichen Werth erhält. Noch mehr aber geht eben dieses aus folgender Betrachtung hervor. Wenn man den Coefficienten der Temperaturen das ihnen zukommende bejahende oder verneinende Zeichen giebt, so ist zuerst für Wasser

1) $\Delta v = -at - bt^2 - ct^3 + dt^4$

eine Gleichung, welche nur einer Flüssigkeit zugehören kann, deren grösster

---

*) Bloss die Differenzen der durch Beobachtung und Rechnung erhaltenen Werthe sind von mir allein gesucht, weil diese Operation zu unbedeutend war, als dass man viele Zeit darauf verwenden sollte. Es wäre möglich, dass sich hier Flüchtigkeitsfehler eingeschlichen hätten, welche indess eben so leicht zu finden als zugleich unbedeutend seyn würden. Alle anderen Rechnungen sind der Sicherheit wegen von mir und Herrn Arneth doppelt gerechnet und vollkommen richtig.

Dichtigkeitspunct über 0° C. liegt. Für die übrigen Flüssigkeiten sind die Formeln

2) $\Delta v = at - bt^2 + ct^3 - dt^4$

3) $\Delta v = at + bt^2 - ct^3 + dt^4$

4) $\Delta v = at + bt^2 + ct^3 - dt^4$.

Keine von allen zehn Gleichungen wurde aber von der Form:

5) $\Delta v = at - bt^2 + ct^3 + dt^4$

oder

6) $\Delta v = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$

oder

7) $\Delta v = at + bt^2 - ct^3 - dt^4$

oder mit umgekehrten Zeichen gefunden; ein keinesweges gleichgültiger Umstand. Wenn man aber berücksichtigt, dass die Krümmung der Ausdehnungs-Curven für zunehmende Temperaturen nach einem gewissen constanten Gesetze wächst, dass aber die Werthe der höheren Potenzen von t auch dann, wenn ihre Coefficienten erst in sehr hohen Decimalstellen einen Werth erhalten, doch für die höheren Temperaturen sehr bedeutend werden, so folgt hieraus schon selbst, dass in den Gleichungen bejahende Coefficienten mit verneinenden abwechseln müssen, damit die einen dasjenige wieder compensiren, was die anderen zu viel leisten. Aus diesem nämlichen Grunde sind die Formeln Nr 5, 6 und 7 ganz unzulässig, weil nach ihnen die Curven sich entweder zu viel oder zu wenig krümmen würden.

Bis so weit ist die ganze Sache eben so klar als gewiss. Was aber eine Entscheidung darüber betrifft, ob die Exponenten der Temperaturen nach ganzen Zahlen wachsen müssen, oder ob zwischen diesen liegende gebrochene Exponenten, und wie viele derselben aufgenommen werden müssten, so gestehe ich, dass ich hierüber sofort zu entscheiden mir nicht getraue, wohl aber geneigt bin, der letzteren Meinung beizupflichten, und auch sicher einen Versuch gemacht haben würde, dieses aufzufinden, wenn eine solche Aufgabe nicht zu höchst verwickelten Rechnungen führte.

Sollen einmal in den Gleichungen bloss ganze Exponenten der Temperaturen aufgenommen werden, so geht so viel aus den bisherigen Untersuchungen evident hervor, dass durch die viergliedrigen Gleichungen mit ganzen bejahenden Exponenten der Temperaturen und mit wechselnden positiven und negativen Coefficienten die Ausdehnungs-Curve für die Temperaturen zwischen + 100° C. und — 100° C. sehr genau ausgedrückt werden kann, und es müssen daher auch, nach meiner festen Ueberzeugung, alle diejenigen Resultate unumstösslich richtig seyn, welche innerhalb dieser Grenze aus den Gleichungen nothwendig folgen, also namentlich auch die Bestimmungen der grössten oder geringsten Dichtigkeit, und ich bin deswegen ganz entschieden der Meinung, dass namentlich der Punct der grössten Dichtigkeit des von uns gebrauchten, nahe absoluten, Alkohols gerade da liegt, wo er oben gefunden ist, so dass also sein Gefrierpunct nicht weit unter dieser Temperatur liegen kann. Derjenige Theil der Curve aber, welcher weit über 100° C. oder unter — 100° C. liegt, wird durch die Gleichung keinesweges mit genügender Genauigkeit angegeben, und diese kann daher über das Verhalten der Flüssigkeiten bei den höher liegenden Temperaturen nicht entscheiden.

Hierbei macht indess die Form der Gleichung einen bedeutenden Unterschied. Um hierüber nicht zu weitläuftig zu seyn, will ich meine Ansicht der Sache kurz angeben. Mir scheint nämlich jede der gefundenen Gleichungen nur der Anfang der eigentlichen, bis zu jeder möglichen Temperatur genügenden, zu seyn, deren Glieder mit den höheren Temperaturen zunehmen müssten, wofür unter andern namentlich schon das Nichtvorkommen der Gleichungen von der Form Nr. 5, 6 und 7 entscheidet. So wäre die eigentliche Gestalt der Gleichung Nr. 1

$$\Delta v = + at + bt^2 - ct^3 + dt^4 - et^5 + ft^6 \cdots + mt^n + pt^q - \cdots$$

Nr. 2 aber würde seyn

$$\Delta v = at - bt^2 + ct^3 - dt^4 + et^5 - ft^6 \cdots + mt^n - pt^q + \cdots$$

und eben so Nr. 3 und Nr. 4

$$\Delta v = at + bt^2 - ct^3 + dt^4 + et^5 - ft^6 \cdots + mt^n + pt^q - rt^s \cdots$$

$$\Delta v = at + bt^2 + ct^3 - dt^4 \cdots + mt^n + pt^q + rt^s - ut^v \cdots$$

Um aber die Coefficienten für die höheren Potenzen von t zu finden, mussten auch verhältnissmässig weit fortgesetzte Beobachtungen vorhanden seyn, und es folgt also hieraus, dass man für die meisten Flüssigkeiten so weit fortgesetzter Rechnungen nicht bedarf, indem ohnehin die sehr hohen Decimalstellen der über 4 hinausgehenden Potenzen selbst bei 100° C. von kaum merklichem Einflusse seyn würden.

Zur Erläuterung des Gesagten sey es erlaubt, die Gleichungen für die Schwefelsäure mit der nächstfolgenden für Mandelöl zusammen zu stellen, und aus der Vergleichung beider noch deutlicher zu zeigen, warum der Punct der grössten Dichtigkeit der Schwefelsäure aus der ersteren Formel für die Ausdehnung derselben nicht richtig gefunden werden konnte, ohngeachtet der Punct der geringsten Dichtigkeit für Mandelöl aus der die Ausdehnungs-Curve desselben ausdrückenden Gleichung bis über 300° C. hinaus sehr genau mit der Erfahrung übereinstimmend gefunden werden wird, obgleich zur Auffindung der Gleichung selbst nur Beobachtungen von 0° C. bis 120° C. benutzt sind.

Coefficienten

für Schwefelsäure.	für Mandelöl.
$a = 0{,}00052$	$a = 0{,}00074$
$b = 0{,}0000028$	$b = 0{,}0000031$
$c = -0{,}000000051$	$c = 0{,}0000000027$
$d = 0{,}00000000028.$	$d = -0{,}000000000015.$

Die Vergleichung beider ergiebt, dass die Ausdehnungs-Curve bei Mandelöl hauptsächlich durch das erste Glied bedingt wird, indem sie sich der geraden Linie mehr nähert, als dieses bei der Schwefelsäure der Fall ist; vor allen Dingen aber ist der Einfluss des letzten verneinenden Gliedes bei ihr fast zwanzigmal kleiner als des letzten bejahenden bei der Schwefelsäure, und von dem Einflusse dieser höheren Potenzen hängt es hauptsächlich ab, ob und wann die sich zunehmend krümmende Curve einen Wendepunct erhält, welcher dann das Maximum der Ausdehnung bezeichnet. Enthält die Gleichung eine hinlängliche Zahl Glieder, so dass sie als der eigentliche Ausdruck des Verhaltens der Flüssigkeit unter dem Einflusse der Wärme angesehen werden kann, so wird dieser Wendepunct mit der Erfahrung übereinstimmen, und irgend eine wesentliche Veränderung der Flüssigkeit durch den Einfluss der Wärme bezeichnen, widrigenfalls aber ist diese Bestimmung des Maximums der Ausdehnung unsicher oder nichts bedeutend, weil die neu hinzukommenden Glieder der Gleichung sie abändern würden. Wir wollen des Beispiels wegen annehmen, die Erhitzung würde bis 1000° C. fortgesetzt, so ist die Volumensvermehrung

für Schwefelsäure		für Mandelöl	
aus a =	0,52	aus a =	0,74
aus b =	2,8	aus b =	0,31
aus d =	280,0	aus c =	2,7
Summa =	283,32	Summa =	3,75
aus c =	— 51,00	aus d =	— 15,00
also =	232,32.	also =	— 11,25.

Beide Resultate sind unzulässig, indem nach dem einen die tropfbare Flüssigkeit einen undenkbar grossen Raum einnehmen, nach dem andern aber gar kleiner als 0 werden würde. Die Ursache dieser beiderseitigen Unzulässigkeiten liegt offenbar in den fehlenden höheren Gliedern. Indess giebt dennoch jede dieser beiden Gleichungen auf gewisse Weise die Natur der untersuchten Flüssigkeit an, indem bei einer nach dem oben aufgestellten Schema beliebig weit fortgesetzten Reihe von Gliedern die Gleichung für die Schwefelsäure nie, die für das Mandelöl aber allezeit einen Punct der geringsten Dichtigkeit geben wird. Denkt man sich ferner die Bildung der Ausdehnungs-Curve für beide Flüssigkeiten, so ist klar, dass die Gleichung für das Mandelöl nicht füglich weniger, als vier Glieder haben kann, und eben dieses ist der Fall bei den Gleichungen Nr. 1 und Nr. 2; die Nr. 3 dagegen erhielte wohl besser nur drei Glieder, um nicht mehr als die erste Reihenfolge, nämlich

$$+ at + bt^2 - ct^3$$

zu umfassen, wobei dasjenige, was in der viergliedrigen Gleichung auf das letzte Glied fällt, durch Zunahme der Coefficienten der beiden ersten Glieder ersetzt werden würde. In diesem Falle dürfte sie aber nicht mehr als die Beobachtungen zwischen 0° und 100° umfassen, weil sonst die Curve wegen des starken Einflusses des höchsten verneinenden Gliedes zu bald einen Wendepunct erhalten und der Natur der untersuchten Flüssigkeit nicht weiter entsprechen würde. *)

Hinsichtlich desjenigen Theiles der Curve, welcher unterhalb des Nullpunctes der Thermometerskale liegt, also den verneinenden Temperaturgraden zugehört, und wobei also die Ordinaten kleiner als 1 werden, folgt aus der Natur der Sache, dass dieser die nämliche Krümmung beibehalte, als der oberhalb des Nullpuncts liegende; auch ergiebt der Anblick aller in den verschiedenen Tabellen für verneinende Thermometergrade aufgezeichneten Werthe für die Volumina unter dem Gefrierpuncte, dass die Abnahmen des Volumens das nämliche Gesetz als die Zunahmen desselben befolgen. In so fern man daher namentlich beim Wasser annehmen kann, dass die aus dem arithmetischen Mittel von drei genauen Beobachtungsreihen gefundene Curve den Gang der Ausdehnung dieser Flüssigkeit mit grösster Schärfe bezeichnet, folgt nothwendig, dass

---

*) Ich habe es versucht aus den gesammten Beobachtungen eine dreigliedrige Gleichung zu finden, allein dann werden das erste und letzte Glied bejahend, das zweite aber wird verneinend. Hirdurch vermeidet die Gleichung das zu frühe Eintreffen des Wendepunctes, aber die danach berechneten Werthe stimmen keinesweges genau mit der Erfahrung überein. Es scheint mir hiernach und aus andern aus den Differenzenreihen entlehnten Gründen nicht zweifelhaft, dass die Gleichungen der Ausdehnungs-Curven mindestens vier Glieder haben müssen.

der Punct der grössten Dichtigkeit gerade da liegen muss, wohin die Gleichung ihn setzt, und dass diese Bestimmung um nicht mehr als höchstens 0,01 Grad der Centesimalskale unrichtig seyn kann. Ueberhaupt ist die Bestimmung des Punctes der grössten Dichtigkeit in allen Fällen völlig genau, wo derselbe nicht um mehr als etwa 10 bis höchstens 20 verneinende Thermometergrade tiefer fällt, als die Differenz der zur Bildung der Curve in Rechnung genommenen bejahenden und verneinenden Thermometergrade beträgt *), und somit können die sämmtlichen oben mitgetheilten für völlig genau gelten, mit Ausnahme desjenigen, welchen die erstere der Formeln für die Schwefelsäure giebt.

Es folgt nämlich aus der hier mitgetheilten Darstellung von selbst, dass eine viergliedrige Gleichung als analytischer Ausdruck der Ausdehnungs-Curve für die Schwefelsäure von 0° C. bis 230° C. offenbar ungenügend ist, und diese vielmehr von der Form

$$\Delta v = at + bt^2 - ct^3 + dt^4 + et^5 - ft^6$$

seyn müsste. Werden aber dennoch jene gesammten Beobachtungen von einem so grossen Umfange in die viergliedrige Formel gezwängt, so können die durch Rechnung und Beobachtung gefundenen Werthe nahe genau mit einander übereinstimmen, allein die Bestimmung des Punctes der grössten Dichtigkeit kann nicht genau seyn, weil wegen des überwiegenden Einflusses der folgenden Glieder bei sicheren Temperaturen der Coefficient des ersten Gliedes zu gross werden muss, die der folgenden Glieder aber zu klein, wodurch eben die Unrichtigkeit bedingt ist. Eben daher sind auch die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der Volumensvermehrung von 0° bis 100° C. nach der zweiten Formel ungleich kleiner, als nach der ersten, und so giebt auch nur jene Gleichung den Punct der grössten Dichtigkeit mit der Erfahrung sehr genau übereinstimmend an.

---

*) Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Thermometergrade unter 0° C. abgezogen und nicht als wirklich verneinende addirt werden.

10) *Ausdehnung des Mandelöls.*

Gutes, feines Mandelöl, aus derjenigen Officin, welche hier in der Stadt für eine der besten gilt, schien mir der geeignetste Repräsentant der fetten Flüssigkeiten zu seyn, und wir entschlossen uns daher, die lange Reihe unserer Versuche hiermit zu beschliessen, um auch den Gang der Ausdehnung wenigstens an einer Species dieser weitläuftigen Gattung zu prüfen, da sich erwarten lässt, dass das nämliche Gesetz bei allen übrigen gleichfalls herrschend seyn wird. Das specifische Gewicht des Oeles habe ich nicht bestimmt, weil ich die Reinigung des Aräometer-Gläschens fürchtete, und die darüber ohnehin bekannten Bestimmungen leicht als gültig anzunehmen sind.

Im Allgemeinen ist die Ausdehnung der fetten Oele durch Wärme sehr gross, wie nicht bloss aus dem Verhalten des von uns im Messapparate eingeschlossenen Mandelöls hervorgeht, sondern auch aus der beiläufig zugleich beobachteten Volumensvermehrung des zum Erwärmen gebrauchten Olivenöles zu unserer grossen Unbequemlichkeit sehr augenfällig wurde, indem wir bei steigender Wärme genöthigt waren, einen Theil desselben aus dem Topfe zu nehmen, um dem Ueberlaufen und der hieraus möglichen Entzündung desselben vorzubeugen. Einigemale konnten wir uns dabei der Bemerkung nicht enthalten, dass die Oelhändler im heissen Sommer vertheilhafter als im Winter verkaufen, wenn sie nicht das auszumessende Oel vorher erwärmen. Leider waren wir bei der Anstellung dieser Versuche nicht mehr im Besitze des Röhrchens *A*, und mussten uns daher des einzigen noch vorhandenen bedienen, welches zwar ein grosses Maass der Ausdehnung, und somit sehr sichere Resultate gab, dabei aber zugleich die Unbequemlichkeit des öfteren Herausnehmens mit sich führte. Anfangs hatten wir zwar die Absicht, diese Versuche gleichfalls bis zu sehr hohen Temperaturen fortzusetzen, allein sowohl das öftere Herausnehmen eines Theiles des so stark erhitzten Oeles, als auch der unausstehliche Dampf des zum Erwärmen benutzten Olivenöles, dessen Einwirkung auf die Respirationswerkzeuge durch die wegen des oft wiederholten, Herausnehmens verlängerten Versuche so viel empfindlicher wurden, und endlich die Furcht, unser zweites Röhrchen gleichfalls durch eigensinniges Fortsetzen der Versuche einzubüssen, bewogen uns bei 185° C. abzubrechen. In diesem Umfange mussten wir nicht weniger als eilfmal herausnehmen, und waren daher um so geneigter aufzuhören, als die Ausdehnung dieser Flüssigkeit sich ausserordentlich gleich blieb, so dass man sich bei ihr, unter allen von uns versuchten, am wenigsten von der Wahrheit entfernen würde, wenn man sie als ganz gleichmässig ansehen wollte. Wegen der höchst mühsamen Berechnung glaubten wir uns daher eine Erleichterung verschaffen zu dürfen, wenn wir diese nur bis 120° C. des corrigirten Thermometers ausdehnten. Zur Berechnung der in diesem Umfange der Temperatur liegenden Beobachtungen dienen folgende Grössen.

Für das Röhrchen **B** ist

$$a = 11955{,}9846153857\cdots\cdots$$

Da aber diese Grösse bei 23,45 Theilstrichen bestimmt war, der Nullpunct für Mandelöl aber bei 62,3 Theilstrichen des Röhrchens lag, so ist

$$a = 11994{,}83461538$$
$$\frac{1}{a} = 0{,}000083369219507.$$

Hiernach ist

$$a + m' = 11966{,}33461538$$
$$\frac{a + n'}{a\,(a+m')} = 0{,}000084463732138$$
$$a + m'' = 11965{,}53461538$$
$$\frac{(a+n')\,(a+n'')}{a(a+m')\,(a+m'')} = 0{,}000085468972324$$
$$a + m''' = 11963{,}03461538$$
$$\frac{(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n''')}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m''')} = 0{,}000086353451815$$
$$a + m^{IV} = 11955{,}43461538$$
$$\frac{(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n^{IV})}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m^{IV})} = 0{,}000087367553354$$
$$a + m^{V} = 11948{,}23461538$$
$$\frac{(a+n')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+n^{V})}{a(a+m')\quad\cdot\quad\cdot\quad(a+m^{V})} = 0{,}000088391257513$$

$$a + m^{VI} = 11963,9346 1538$$

$$\frac{(a+n') \quad \cdot \quad \cdot \quad (a+n^{VI})}{a(a+m') \quad \cdot \quad \cdot \quad (a+m^{VI})} = 0,00008925 2714906$$

$$a + m^{VII} = 11978,5346 1538$$

$$\frac{(a+n') \quad \cdot \quad \cdot \quad (a+n^{VII})}{a(a+m') \quad \cdot \quad \cdot \quad (a+m^{VII})} = 0,00009015 3547460.$$

Vermittelst dieser Grössen wurden die in nachfolgender Tabelle enthaltenen Werthe berechnet.

t'	ϑ'	n'	$1 + \frac{n}{a}$	$1 + \delta t'$	Volumen.
0	62,3	0	0,0000000000000	0,0000000000	1,0000000000000
5	106,7	44,4	1,0037015933461 1	1,0001347230	1,0038368150358 5
10	149,1	87,8	1,0073198174727 1	1,0002694460	1,0075912357682 1
15	190,9	128,6	1,0107212816286 0	1,0004041690	1,0111297838382 4
t''	ϑ''	$n''-m'$	A''	$1 + \delta t''$	Volumen.
20	77,0	43,2	1,0143701148569 6	1,0005388920	1,0149167507965 3
25	121,4	87,6	1,0181203045638 9	1,0006736150	1,0188061256728 1
30	166,3	132,5	1,0219127261368 8	1,0008083380	1,0227387770260 6
t'''	ϑ'''	$n'''-m''$	A'''	$1 + \delta t'''$	Volumen.
35	75,2	42,2	1,0255195167689 6	1,0009430610	1,0264866442299 1
40	118,4	85,4	1,0292117763733 5	1,0010777840	1,0303210443585 0
45	163,3	130,3	1,0330493332307 0	1,0012125070	1,0343019127785 6
t^{IV}	ϑ^{IV}	$n^{IV}-m'''$	A^{IV}	$1 + \delta t^{IV}$	Volumen.
50	75,2	44,7	1,0369093325268 3	1,0013472300	1,0383062878868 5
55	121,7	91,2	1,0407693318229 6	1,0014819530	1,0423117030565 2
60	166,8	104,5	1,0445170716317 3	1,0016166760	1,0462057173129 9
t^{V}	ϑ^{V}	$n^{V}-m^{IV}$	A^{V}	$1 + \delta t^{V}$	Volumen.
65	68,5	45,6	1,0485010320646 7	1,0017513990	1,0503373757236 9
70	112,3	89,4	1,0523277309015 8	1,0018861220	1,0543125493861 1
75	155,7	132,8	1,0561194827171 4	1,0020208450	1,0582537364931 6
t^{VI}	ϑ^{VI}	$n^{VI}-m^{V}$	A^{VI}	$1 + \delta t^{VI}$	Volumen.
80	60,0	44,3	1,0600352154249 7	1,0021555680	1,0623201934141 8
85	104,0	87,3	1,0638360394980 3	1,0022902910	1,0662725336047 4
90	148,0	132,3	1,0678136460861 1	1,0024250140	1,0704031091272 4
t^{VII}	ϑ^{VII}	$n^{VII}-m^{VI}$	A^{VII}	$1 + \delta t^{VII}$	Volumen.
95	76,4	45,2	1,0718478687998 7	1,0025597370	1,0745915174479 5
100	120,9	89,5	1,0758017640702 0	1,0026944600	1,0787004688903 2
105	166,9	135,5	1,0799073889558 8	1,0028291830	1,0829626445822 3

t^{VIII}	ϑ^{VIII}	n^{VIII}--m^{VII}	A^{VIII}	$1 + \delta t^{VIII}$	Volumen.
110	89,5	43,5	1,0838290682704 1	1,0029639060	1,0870414357488 0
115	133,1	87,1	1,0877597629396 8	1,0030986290	1,0911303268861 2
120	177,4	131,4	1,0917535650921 8	1,0032333520	1,0952835886653 8

Ausser diesen Beobachtungen enthält das von uns geführte Protocoll noch eine grosse Menge, namentlich für einzelne Thermometergrade von 1° bis 10° und andere, allein es scheint mir überflüssig, auch diese aufzunehmen, da sich aus den mitgetheilten das Gesetz der Ausdehnung der untersuchten Flüssigkeit ohne den mindesten Zweifel sicher auffinden lässt. Die hier mitgetheilten sämmtlich in Rechnung genommen gaben folgende vier Gleichungen:

$$0{,}0790194881 3767 = 105\,a + 2275\,b + 55125\,c + 1421875\,d$$
$$0{,}2179333096 2333 = 285\,a + 13975\,b + 705375\,c + 36521875\,d$$
$$0{,}3618994977 4912 = 465\,a + 36475\,b + 2894625\,c + 232271875\,d$$
$$0{,}5097099822 2168 = 645\,a + 69775\,b + 7594875\,c + 831671875\,d.$$

Durch Elimination der unbekannten Grössen erhält man folgende Werthe der Coefficienten von t^n:

$$a = 0{,}0007445475062202849600 4558$$
$$b = 0{,}0000003134379067744208 3476$$
$$c = 0{,}0000000027508990862452 6119$$
$$d = -0{,}0000000000159750790337 0642.$$

Die vermittelst dieser Coefficienten durch Rechnung erhaltenen Volumina des Mandelöles bei verschiedenen Temperaturen, nebst den durch Beobachtung gefundenen und die Differenzen beider sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Ausdehnung des Mandelöles

t	nach Rechnung.	nach Beobachtung.	Unterschiede.
0	1,00000000000000	1,00000000000000	0,00000000000000
5	1,00383090735673	1,00383681503585	+ 0,00000590767912
10	1,00747941000117	1,00759123576821	+ 0,00011182576704
15	1,01124721130836	1,01129783838240	+ 0,00005062707404
20	1,01503577646715	1,01491675079653	— 0,00011902567062
25	1,01884632888020	1,01880612567281	— 0,00004020320739
30	1,02267985376400	1,02273877702606	+ 0,00005892326206
35	1,02653709634883	1,02648664422991	— 0,00005045211892
40	1,03041856223882	1,03032104435850	— 0,00009751788032
45	1,03431494297190	1,03430191277856	— 0,00001303019334
50	1,03825488741973	1,03830628788685	+ 0,00005140046712
55	1,04220976138796	1,04231170305652	+ 0,00010194166856
60	1,04618838401591	1,04620571731299	+ 0,00001733329708
65	1,05019425463673	1,05033737572369	+ 0,00014312109694
70	1,05421416791754	1,05431254938611	+ 0,00009838146857
75	1,05825922525902	1,05825373649316	— 0,00000548876586
80	1,06233686400985	1,06232019341418	— 0,00001667059567
85	1,06640661369644	1,06627253360474	— 0,00013408009170
90	1,07050540310307	1,07040310912724	— 0,00010229397583
95	1,07461816113181	1,07459151744795	— 0,00002664368386
100	1,07874252087253	1,07870046889032	— 0,00004205198221
105	1,08286586978893	1,08296264458223	+ 0,00009677479330
110	1,08701535971852	1,08704140574880	+ 0,00002604603028
115	1,09115790187263	1,09113032688612	— 0,00002757498651
120	1,09530016756641	1,09528358866538	— 0,00001657890103

Es wechseln hierbei die positiven und negativen Differenzen vom Anfang an auf eine solche Weise, dass man die Abweichungen der durch Beobachtung statt gefundenen Werthe von denen, welche die Formel giebt, nothwendig für Fehler der Versuche halten muss, und diese konnten hier um so leichter entstehen, als wegen der Grösse der Ausdehnung, so oft ein Theil der Flüssigkeit herausgenommen werden musste, und dabei nicht mehr als eine einzige Beobachtung wiederholt werden konnte, um die neue Reihe an die vorhergehende zu knüpfen. Im Ganzen sind 11 positive und 13 negative Differenzen vorhanden, welche summirt die für eine so lange Reihe nicht bedeutende Grösse $= 0{,}00007067055685$ geben. Man darf daher mit Recht annehmen, dass durch die Gleichung das eigentliche Gesetz der Ausdehnung fetter Oele genügend dargestellt werde, und vermöge der individuellen Beschaffenheit der aufgefundenen Formel auch bis zu höheren Temperaturen ausreiche, als welche in die Berechnung aufgenommen sind.

Endlich ist noch erforderlich den Punct der grössten Dichtigkeit auch für das Mandelöl zu finden. Die Differentialgleichung hierfür giebt

$$\frac{\Delta v}{dt} = 0{,}0007445475 + 0{,}00000062687581\,t + 0{,}00000000825269725\,t^2 - 0{,}0000000000639000316\,t^3.$$

Wird dieses Differential $= 0$ gesetzt, so erhält man die kubische Gleichung

$$0{,}7445475 = -\,0{,}00062687581\,t - 0{,}00000825269725\,t^2 + 0{,}0000000639000316\,t^3.$$

Für jeden verneinten Werth von t wird das erste Glied dieser Gleichung bejahend, das zweite und dritte aber werden verneinend. Man übersieht aber bald, dass t nicht kleiner als $= 1000$ seyn darf, wenn die Ziffer 6 des ersten Gliedes der Gleichung zur Rechten in die erste Decimalstelle rücken und hiernach der ersten Ziffer zur Linken am Werthe nahe gleich kommen soll; allein in diesem Falle wird das zweite Glied $= -\,8{,}25269725$, ohne das dritte Glied, welches sogar $= -\,63{,}9$ wird, und es giebt somit keinen verneinenden Werth von t, welcher der Gleichung Genüge leistet, oder mit andern Worten, das Oel hat nach dieser Gleichung keinen Punct der grössten Dichtigkeit. Dieses stimmt mit der Erfahrung vollkommen überein, denn die fetten Oele gestehen, und zwar meistens nahe unter, selbst schon über dem Gefrierpuncte des Wassers, allein ohne sich auszudehnen, vielmehr ziehen sie sich hierbei zusammen, weil sie nicht eigentlich krystallisiren.

Die Frage, ob die Oele ein Minimum der Dichtigkeit haben, klingt zwar etwas auffallend, indess verlohnt sich's der Mühe, sie auf gleiche Weise als bei den übrigen Flüssigkeiten, auch beim Mandelöle aufzuwerfen. Erhält diesemnach in der Differential-Gleichung t einen positen Werth, so werden die ersten beiden Glieder derselben negativ, das dritte aber wird positiv. Sucht man denjenigen Werth für t, welcher substituirt der Gleichung genügt, so kommt in ganzen Zahlen $t = 296$ am nächsten. Dieser giebt nämlich

$$0,7445475 = 0,7485813 9.$$

Bleibt man bei ganzen Graden stehen, so giebt $t = 295$

$$0,7445475 = 0,7373456$$

und ist also zu klein, so dass $t = 296$, als der Gleichung am vollständigsten Genüge leistend, anzusehen ist.

Wird dieses Resultat mit der Erfahrung verglichen, so zeigt sich eine höchst auffallende Uebereinstimmung. Die fetten Oele nämlich sieden nicht eigentlich, sondern erleiden in Gemässheit der damit angestellten Versuche eine Zersetzung nach einigen *) bei ohngefähr 300° C., nach andern **) bei 600° F. oder 315° C., indem bei dieser Temperatur ein Theil derselben zwar als destillirt übergeht, zugleich aber eine eigentliche Zersetzung eintritt. Es betragen aber 296° C. des corrigirten Thermometers, auf welches sich die Bestimmung durch die Formel bezieht, sehr nahe 310° des Quecksilberthermometers, womit jene Bestimmungen erhalten sind, und man kann also sagen, dass in diesem Falle einer wirklich vorhandenen Controlle, die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Erfahrung innerhalb der Grenze von vielleicht weniger als einem Centesimalgrade genau ist.

Hiermit beschliesse ich eine lange Untersuchung, durch welche ich beinahe fürchten muss, Ermüdung für diejenigen herbeizuführen, welche derselben im Einzelnen zu folgen geneigt seyn sollten. Der Werth des Ganzen beruhet auf einer grossen Zahl sehr genauer Thatsachen, welche als Grundlage einer noch immer nicht in ihrer ganzen Vollendung vorhandenen Wärmetheorie von sehr grossem Nutzen seyn können, und ich würde keinen Anstand nehmen, einige der wichtigsten Folgerungen sogleich anzudeuten, wenn ich nicht die gewöhnliche Grenze einer solchen Abhandlung ohnehin schon überschritten hätte.

---

*) Handbuch der theor. Chemie von L. Gmelin. Heid. 1819. Th. III. p. 1201.

**) S. Klaproth und Wolf Chem. Wörterbuch. Art. Oel.

AVIS.

L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg a publié dans le premier siècle de son existence 73 volumes de ses Mémoires. Ce recueil se compose de cinq séries publiées successivement sous les titres suivans: Commentarii Acad. Imp. sc. Petrop. depuis 1726—1747 (14 volumes); Novi Commentarii 1747—1776 (21 volumes); Acta 1776—1783 (12 volumes); Nova Acta 1783—1803 (15 volumes) et Mémoires 1803—1826 (11 volumes). A chacune de ces différentes époques se rattache quelque souvenir remarquable, tels que: en 1726 la première séance publique en présence de S. M. l'Impératrice Cathérine I, ou l'époque de l'inauguration de l'Académie; en 1747 les règlemens donnés à cette société par l'Impératrice Elisabeth fille de Pierre I; en 1776 la célébration solennelle du jubilé semi-séculaire; en 1783 la nomination de M^{me} la Princesse Daschkoff Directeur de l'Académie; en 1803 les nouveaux règlemens donnés par l'Empereur Alexandre; enfin en 1826 la célébration de la fête séculaire honorée de la présence de S. M. l'Empereur NICOLAS I et de toute Son auguste Famille. Le désir de faciliter le débit de ses Mémoires et d'en accélérer la publication a fait choisir à l'Académie un nouveau mode dans la rédaction de ce recueil dont commence aujourd'hui la sixième série, sous le même titre de *Mémoires*. Cette nouvelle série paraîtra en deux corps d'ouvrage ou sections éparses et indépendantes l'une de l'autre. La première section comprendra les Mémoires de Mathématiques, d'Astronomie, de Physique, de Chimie et des Sciences naturelles; la seconde ceux des Sciences politiques, d'Histoire et de Philologie. Ces deux sections paraîtront par livraisons de 10 à 15 feuilles chacune. Six de ces livraisons formeront un volume, et à la première section sera ajoutée une septième livraison, comme supplément, qui contiendra l'histoire de l'Académie et les rapports lus dans les séances et dont la publication aura été arrêtée. Les mémoires seront placés pèle-mèle dans l'ordre de leur présentation. Les sections seront vendues séparément, mais personne ne pourra acheter des livraisons séparées. En achetant la première livraison on payera le volume entier et on touchera un billet pour recevoir les livraisons suivantes. Les mémoires des savans étrangers seront séparés de ceux de l'Académie et formeront un recueil à part qui se publiera de la même manière, par livraisons de 10 à 15 feuilles imprimées chacune, et dont de même six formeront un volume.

TABLE DES MATIÈRES.

M. Meyer, Cyperaceae novae descriptionibus et iconibus illustratae (avec 14 planches lithographiées) 195

M. de Kittlitz, Ueber die Vögel der Inselgruppe von Boninsima, beobachtet zu Anfang May 1828 (avec 5 planches gravées et enluminées) . . 231

M. Muncke, Ueber die Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten durch Wärme 249

Avis. La 5^{me} planche appartenante au mémoire de M. de Kittlitz et représentant le *Turdus terrestris* sera jointe à l'une des prochaines livraisons qui contiendra la continuation de ce mémoire.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS À

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS,

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME PREMIER.

5me LIVRAISON.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1831.

Se vend chez GRAEFF, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison
Stcherbakoff N°. 91 et à Leipzic chez CNOBLOCH.

Publié avec l'approbation de l'Académie.

En Février 1831.

Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

NATURAL HISTORY

PRECIS
D'UN NOUVEL ARRANGEMENT DE LA FAMILLE
DES
BRACHÉLYTRES
DE L'ORDRE DES INSECTES COLÉOPTÈRES,

PAR

M. le Comte Mannerheim,

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE.

(Lu le 9 Juin 1830)

Occupé depuis quelque temps à ranger mon musée entomologique d'après les systèmes les plus modernes, je n'ai pu que trop sentir la nécessité de mettre les *Brachélytres*, en quelque sorte, au niveau des autres familles du même ordre. Il paraît que les insectes appartenant au genre *Staphylinus* du célèbre fondateur du système de l'histoire naturelle, ont trouvé, en général, peu de sectateurs parmi les entomologistes. L'habitude des *Brachélytres* de vivre dans les champignons, les fumiers, les ordures et les charognes a, je crois, donné assez de répugnance d'en faire des collections plus nombreuses. Le peu de variété dans le coloris et dans la forme de ces insectes a aussi beaucoup retardé l'attention des naturalistes, et l'extrême exiguité de la plûpart de ces animaux, qui nous oblige de les étudier à la loupe, aura, sans doute, le plus contribué à les dérober aux recherches. Si l'on en excepte les excellens ouvrages de MM. Gravenhorst 1) et Gyllenhal 2), il n'existe pas de traité complet sur les *Brachélytres.* Toutefois, je suppose que M. le Comte Dejean, en continuant l'intéressant *Species général* 3) de sa collection, nous tirera bientôt de cet embarras, en nous donnant une monographie de cette famille, dans le même style que ce noble Pair de France vient de traiter les *Carabiques*, et qui ne laisse rien à désirer. Pour ce qui concerne les généralités de la famille en question, Mr. le Chevalier Latreille continue encore de tenir le sceptre parmi les entomologistes. Il nous l'a prouvé dans ses *Familles naturelles* 4); il n'en a point dérogé dans la nouvelle édition du *Règne animal* de M. le Baron Cuvier 5). C'est à lui que nous devons un arrangement véritablement systématique de la famille des *Brachélytres*; et si les autres entomologistes n'ont pas entièrement négligé cette famille, qui ne devait pas leur paraître moins intéressante que toute autre partie de l'immense création, c'est encore à lui que nous en sommes redevables. Quant à moi, je ne désavouerai pas que les ouvrages de M. Latreille m'ont inspiré le désir de me vouer plus attentivement à l'étude de ces petits animaux. J'en ai pris moi-même, pendant plusieurs années, un assez grand nombre. Maintenant, en voulant les ranger d'après la méthode de M. Latreille, j'ai d'abord long-temps hésité si je devais me borner exclusivement aux genres qui en font partie, ou si je pouvais y faire encore quelques coupes. En examinant le nombre de plus de cent espèces que j'avais d'*Aleochara*, tel que ce genre se trouve chez M. Gyllenhal, il n'est point échappé à mon attention que plusieurs espèces montraient des dif-

---

1) Coleoptera Microptera etc. Brunsvigae 1802 in 8. Monographia Coleopterorum Micropterorum. Gottingae 1806 in 8.

2) Insecta Svecica etc. T. I. P. 2. Scaris 1810. P. 3. Scaris 1813. et P. 4. Lipsiae 1827. in 8.

3) Species général des Coléoptères etc. T. 1—4. Paris 1825—1829. in 8.

4) Familles naturelles du Règne Animal etc. Paris 1825. in 8.

5) Le Règne Animal etc. nouvelle édition, revue et augmentée. T. IV. Paris 1829. in 8.

férences trop saillantes pour y rester. Or, pour obvier à cette difficulté, j'adoptai d'abord quelques genres établis par le célèbre entomologiste Britannique M. Leach, et j'ai fini par multiplier cette division par des genres que j'ai cru devoir y faire entrer moi-même. Les *Aléochares* une fois traités de cette manière, il ne m'était pas possible de rester en arrière avec le reste des *Brachélytres*, et en avançant sur les mêmes traces, j'ai obtenu une quantité de coupes plus ou moins fondées sur des caractères qui m'ont paru assez essentiels pour ne pas être mis en considération. Je recommande ce petit traité à l'indulgence des personnes qui sont à même d'en juger; mon seul désir est de contribuer aux progrès de cette science qui, depuis mon enfance, fait le délice de mes loisirs. J'ose espérer que mon travail n'aura pas été fait en vain et ne sera pas infructueux, si j'ai réussi à inspirer plus d'intérêt pour une branche de l'histoire naturelle qui n'a pas été cultivée à l'instar de ses voisines, et si j'ai pu réclamer les droits qu'elle doit avoir à l'attention des savans.

J'ai borné ce traité uniquement aux espèces qui se trouvent dans mon musée, de manière qu'il pourra être considéré comme une espèce de catalogue raisonné des *Brachélytres* qui en font partie. Par cette raison, il m'a aussi paru superflu de reproduire les descriptions des espèces qui ont déjà été publiées par d'autres entomologistes. J'en ai seulement cité celle qui m'a paru la plus complète. Si, sous ce rapport, j'ai donné la préférence à la description de M. Gyllenhal, j'espère que les autres entomologistes ne m'en voudront pas; l'ayant fait encore sous le point de vue que ma collection avait été formée dans le Nord de l'Europe, principalement en Finlande et en Suède, de sorte que je devais sans doute le plus d'attention à la Faune qui traite les *Brachélytres* de ces pays. J'en avais aussi un autre motif. La générosité de M. Gyllenhal, dont je ne puis que trop me louer, m'a mis à même de connaître presque tous les *Brachélytres* qu'il a décrits; je possède, par ses bontés, à quelques exceptions près, des types authentiques pour les espèces mentionnées dans son ouvrage, ce qui ne diminuera pas, comme je l'espère, le prix de mon traité. Quant aux espèces qui m'ont paru nouvelles, j'ai tâché d'en donner des diagnoses. Comme le but principal de mon mémoire est de montrer les coupes que j'ai cru devoir faire dans les *Brachélytres* de ma collection, sans aviser à une monographie de cette famille, la partie descriptive des espèces ne pouvait avoir qu'un but sécondaire, et c'est aussi par cette raison que je me suis borné à donner de chaque nouvelle espèce, outre la diagnose, un aperçu comparatif des caractères qui la font distinguer de l'espèce la plus voisine. Ce n'est que lorsqu'il y avait moins d'affinité, que j'ai donné une description plus détaillée. Le nom de l'entomologiste qui se trouve immédiatement après le nom spécifique de chaque insecte, appartient à celui qui le premier lui a donné ce nom, et j'ai scrupuleusement tâché d'observer la priorité sous ce rapport.

Les genres établis par moi-même sont les seuls que j'ai cru devoir caractériser avec plus d'exactitude dans la continuation de mon ouvrage qui traite ces coupes plus spécialement. Pour les autres, il n'y a que la citation du savant qui le premier les a fondés. J'avoue qu'il y en a plusieurs dont la description nous manque encore; or, c'est une tâche que je laisse à remplir aux fondateurs de ces genres et aux entomologistes mieux instruits.

Quant aux tribus, elles appartiennent presque toutes à M. Latreille. Toutefois le grand nombre qui existe du genre *Aleochara*, tel qu'il a été établi par M. Gravenhorst, et reproduit par M. Gyllenhal, m'a paru réclamer une section particulière. Les *Aléocharides* présentent une forme qui ne permet pas de les associer ni aux *Aplatis*, ni aux *Microcéphales* de M. Latreille, et je crois qu'il y a moins de difficultés de les rejoindre d'après la méthode de M. Gravenhorst, que de ranger les *Aleochara* de mon traité ainsi que les *Lomechusa* parmi les *Tachinides*.

Les *Denticrures* de M. Latreille ont exigé une autre définition. Ayant examiné plus attentivement l'*Oxytelus corticinus Grav.* qui présente tous les caractères du genre auquel il fut d'abord agrégé, j'ai observé qu'il n'avait point les jambes dentées ou épineuses du côté extérieur comme les autres *Oxytelides*, quoique les tarses fussent construits de la même manière. J'ai donc été obligé de changer un peu les caractères que M. Latreille avait proposés pour cette section. Tous les genres qui font partie des *Oxytélides* de mon arrangement, ont les tarses très distinctement de trois articles. J'ai fait cette observation sur une quantité d'espèces, à l'aide de plusieurs microscopes, et je me suis parfaitement convaincu de ce fait intéressant. Ceci me donne l'idée qu'on pourrait sans beaucoup de difficultés ranger les *Psélaphides* parmi les *Pentamères*. Cette opinion a aussi été celle de M. Leach. Ils ont beaucoup de rapports avec les genres *Falagria* et *Autalia*, et je serais très-disposé de les placer à la suite de ces *Brachélytres*, toutefois comme une famille particulière, à cause de la structure des antennes et des palpes. M. Megerle avait déjà agrégé le *Pselaphus Karstenii Reichb.* aux *Brachélytres*, et après lui, M. le Comte Dejean en fit autant; mais cet insecte ne doit certainement pas y rester, car il offre tous les caractères d'un véritable *Pselaphus*.

J'ai aussi suivi dans l'arrangement général, la méthode adoptée dans les ouvrages de M. Latreille; mais pour mieux faciliter l'examen des *Brachélytres*, il m'a cependant paru indispensable de le faire suivre de Tableaux dichotomiques à la manière de M. Duméril et de M. le Comte Dejean. On pourroit peut-être me reprocher de m'être par-là jeté dans une espèce de répétition, mais si l'on envisage l'état actuel de l'entomologie, j'espère trouver assez d'excuses pour les idées qui m'ont guidé en traitant de la sorte le nouvel arrangement que je vais proposer ci-après.

Le nombre des espèces qui composent mon arrangement, tel qu'il suit, est de 402, prises, pour la plus grande partie, dans le Nord de l'Europe. Il est donc à supposer que si, à l'avenir, les autres pays de la partie du monde que nous habitons, ainsi que les pays d'outre-mer, étaient plus attentivement explorés en fait de *Brachélytres*, nous aurions encore des collections immenses de ces insectes. La collection de M. le Comte Dejean offrit, lors de la publication du catalogue *) qu'il en a donné, 434 *Brachélytres* sur 6692 *Coléoptères*. Le Comte se propose maintenant d'en faire paraître une seconde édition, et il m'écrit que son Musée contient dans ce moment plus de 17700 espèces de *Coléoptères*. Il est donc à supposer que les *Brachélytres* de cette précieuse collection montent déjà à un nombre très-considérable. Où se borneront donc nos observations sur cette immense création! Tout ouvrage qui en traite ne devient de plus en plus qu'incomplet, et sert seulement à nous convaincre que le naturaliste le plus savant ne parviendra jamais à dévoiler les mystères de la nature.

BRACHELYTRA. *Cuvier. Dejean.*

Brachyptera. *Latreille.* Staphylinii. *Latr. Gyllenhal.*
Microptera. *Schaeffer. Gravenhorst.*

Antennae extrorsum crassiores, saepissime moniliformes, rarissime serratae vel clavatae, clava autem nunquam perfoliata vel lamellata. Corpus plerisque elongatum, angustum. Elytra abbreviata, in aliis majorem, in paucis minorem, sed in plerisque dimidiam abdominis partem obtegentia. Anus vesiculis retractilibus instructus.

Tribus Prima.

STAPHYLINIDES.

Fissilabra. *Latr.*

Antennae inter, vel ante oculos insertae. Labrum emarginatum. Palpi breves, filiformes vel securiformes, articulis omnibus distinctis. Caput a thorace collo distinctum. Abdomen in vivis reclinatum. Pedes plerumque spinosi. Tarsi 5-articulati.

---

*) Catalogue de la Collection de Coléoptères de M. le Baron Dejean. Paris 1821. in 8.

I. Palpi labiales securiformes.

A. Palpi maxillares filiformes.

Antennae breves, extrorsum incrassatae, articulis sex ultimis dilatatis compressis. Mandibulae porrectae, valde decussatae, capitis fere longitudine. . . . . 1. *Oxyporus.*

B. Palpi maxillares securiformes. Antennae longiores, filiformes. Mandibulae capite multo breviores, haud porrectae . 2. *Astrapaeus.*

II. Palpi omnes filiformes.

A. Antennae pone mandibulas et labrum inter oculos insertae.

1. Tarsi antici in utroque sexu, vel saltem in maribus, dilatati.

α. Thorax elytris multo latior, orbicularis, antice subtruncatus, lateribus late explanatus. Antennae, arculis 4—10 latere interno productis, serratae, ultimo angustiore, sub-acuminato. . . . . . , . 3. *Velleius.*

β. Thorax semi-orbiculato-quadratus.

a. Antennae breves, extrorsum articulis quinque latioribus, transversis, ultimo superne oblique truncato, sub-foveolato. Caput et thorax glabra. . . . 4. *Creophilus.*

b. Antennae extrorsum articulis sex brevioribus, subtransversis, ultimo oblique truncato, sub-emarginato. 5. *Emus.*

γ. Thorax latitudine longior, postice rotundatus. Antennae articulis 4—10 inter se aequalibus, lenticularibus.

a. Collare capite multo angustius.

* Antennarum articulus ultimus a latere oblique truncatus, subemarginatus. . . . . 6. *Staphylinus.*

** Antennarum articulus ultimus integer. . . . . 7. *Cafius.*

b. Collare inflatum, capite parum angustius. . . . . 8. *Physetops.*

2. Tarsi antici in utroque sexu simplices. . . . . . . 9. *Gyrohypnus.*

B. Antennae ante oculos, in processu capitis, pone labrum, ad mandibularum basin interiorem insertae.
  1. Collare angustum. Caput magnum, petiolatum, postice truncatum. . . . . 10. *Eulissus.*
  2. Collare inflatum, cum capite magno fere omnino confusum. . . . . 11. *Platyprosopus.*

C. Antennae ante oculos, ultra labrum, ad mandibularum basin insertae.
  1. Corpus convexiusculum. Thorax lineari-quadrangulus.
    α. Antennae haud fractae. Tarsorum articulus ultimus praecedentibus longior . . . . 12. *Lathrobium.*
    β. Antennae fractae. Tarsorum articulus primus sequentibus longior . . . . 13. *Cryptobium.*
  2. Corpus deplanatum. Thorax trapeziformis. Tarsorum articulus ultimus praecedentibus longior. . . . . . 14. *Achenium.*

Tribus Secunda.

STENIDES.

LONGIPALPI. *Latr.*

Antennae inter, vel ante oculos insertae. Labrum transversum, truncatum. Palpi maxillares capitis fere longitudine, articulo ultimo subulato, retracto, occulto. Caput collo distincto. Abdomen in vivis plerumque reclinatum. Pedes inermes. Tarsi 5-articulati.

I. Antennae ante oculos insertae, apicem versus incrassatae.
  A. Tarsorum articulus quartus bifidus. . . . . 1. *Paederus.*
  B. Tarsorum articulus quartus integer. . . . . 2. *Rugilus.*

II. Antennae ante oculos insertae, apice abrupte crassiores . . 3. *Eristhetus.*

III. Antennae inter oculos insertae, apice abrupte crassiores.
  A. Ligula obsoleta. Anus bisetus. . . . . 4. *Dianous.*
  B. Ligula protensa. Anus setis destitutus. . . . , ... 5. *Stenus.*

Tribus Tertia.

OXYTELIDES.

Denticrura. *Latr.*

Antennae ante oculos, sub margine capitis elevato, prominulo insertae. Labrum transversum integrum. Palpi capite breviores, articulis distinctis, ultimo subulato. Caput collo distincto. Abdomen in vivis subreclinatum. Tibiae, anticae saltem, compressae, plerumque extus denticulato-pectinatae. Tarsi 3-vel 4-articulati.

I. Tibiae quatuor anteriores denticulato-pectinatae.
  A. Tibiae omnes integrae . . . . 1. *Bledius.*
  B. Tibiae anticae, vel quatuor anteriores, apice exteriori excisae.
    α. Tibiae etiam posticae denticulato-pectinatae. Corpus breve, antice multo latius . . . . 2. *Platystethus.*
    β. Tibiae posticae inermes. Corpus elongatum, sublineare. 3. *Oxytelus.*
II. Tibiae omnes inermes . . . . 4. *Trogophloeus.*

Tribus Quarta.

OMALIDES.

Depressa. *Latr.*

Antennae ante oculos, sub margine capitis elevato prominulo, insertae. Labrum transversum, integrum. Palpi breves, articulis distinctis, ultimo minuto aciculari, vel conico-acuminato. Caput collo distincto. Abdomen in vivis planum. Pedes inermes. Tarsi 5-articulati.

I. Tarsorum articulus ultimus elongatus, reliquis simul sumtis saepe aequalis.

A. Tarsi quatuor anteriores dilatati spongiosi . . . . . 1. *Phloeocharis.*

B. Tarsi omnes simplices.

1. Palpi maxillares articulo penultimo dilatato, ultimo parvo subulato. . . . . 2. *Taenosoma.*

2. Palpi maxillares articulo ultimo conico, subacuminato.

α. Antennae extrorsum crassiores.

a. Corpus breve. Thorax brevis, transversus, postice haud angustior. Elytra maximam abdominis partem obtegentia. . . . . 3. *Omalium.*

b. Corpus oblongum. Thorax brevis transversus, postice nonnihil angustior. Abdomen elytris plerumque duplo longius. . . . . 4. *Anthobium.*

β. Antennae filiformes. Corpus oblongum.
Thorax antice posticeque rotundato-angustatus . 5. *Acidota.*

II. Tarsorum articulus ultimus longitudine praecedentis, vel parum longior.

A. Palpi maxillares, articulo ultimo sub-acuminato, praecedente parum minore. Antennae filiformes . . . . 6. *Lesteva.*

B. Palpi maxillares subulati, articulo penultimo incrassato, apicali gracili, aciculari. Antennae extrorsum crassiores . 7. *Proteinus.*

C. Palpi maxillares subulati, articulo secundo admodum majore. Antennae clavatae, articulis 10—11. clavam magnam globosam efformantibus. . . . . 8. *Micropeplus.*

Tribus Quinta.

TACHINIDES.

MICROCEPHALA. *Latr.*

Antennae ante oculos insertae, nunquam vero sub margine capitis prominulo vel elevato. Labrum rotundatum. Palpi breves, articulo ultimo subulato, vel acuminato. Caput thorace multo angustius et in illum ad oculos usque intrusum. Abdomen in vivis inclinatum. Pedes spinosi. Tarsi 5 - articulati.

I. Corpus globosum postice attenuatum, abdomine sub elytris fere omnino retractum. Palpi filiformes acuminati. . . . 1. *Hypocyphtus.*

II. Corpus latum postice attenuatum.

A. Palpi subulati, articulo ultimo parvo, aciculari. Abdominis segmenta integra. . . . . 2. *Tachyporus.*

B. Palpi filiformes, articulo ultimo antecedente longiore, acuminato. Abdominis segmenta in utroque sexu emarginata. 3. *Tachinus.*

III. Corpus elongatum, utrinque sub-attenuatum.

A. Palpi subulati, articulo ultimo parvo, aciculari. . . . 4. *Mycetoporus.*

B. Palpi filiformes, articulo ultimo longiore, acuminato . . 5. *Bolitobius.*

Tribus Sexta.

ALEOCHARIDES.

Antennae infra oculos, margini illorum interno appositae, sed nunquam sub margine capitis laterali insertae. Labrum integrum, truncatum. Palpi maxillares, articulo ultimo conico vel subulato. Caput aut occultum, aut collari distinctum. Abdomen in vivis reclinatum. Pedes inermes, in paucissimis spinosi. Tarsi 5 - articulati.

I. Palpi maxillares elongati, articulo ultimo conico acuto.

A. Antennae medio incrassatae, articulo primo parum majore. 1. *Dinarda.*

B. Antennae extus tenuiores, subsetaceae, articulo primo crassissimo, apice emarginato. . . . . 2. *Lomechusa.*

II. Palpi maxillares breves, articulo ultimo subulato.

A. Antennae filiformes, non fractae, articulis aequalibus. Os rostratum. Tibiae quatuor anteriores spinosae. . . . 3. *Gymnusa.*

B. Antennae basi fractae, extrorsum crassiores. Os haud rostratum. Tibiae hirsutae vel pubescentes, nunquam vero spinosae.

1. Caput sub thorace plus minusve retractum. Corpus posterius plus minusve attenuatum. Thorax angulis anticis valde deflexis.

α. Antennae breves, in medio plus minusve incrassatae, articulo secundo tertio fere duplo breviore. Corpus plerumque crassum. Thorax convexus, elytris angustior. Elytra saepe brevissima. Pedes hirsuti; tarsorum articulus primus parum longior. . . . 4. *Aleochara.*

β. Antennae breves, extrorsum parum crassiores, articulis omnibus, longitudine aequalibus, ultimo tantum majore, oblongo-ovato. Corpus elongatum, teretiusculum. Thorax elytris latior, lateribus rotundatis, deflexis. Pedes pubescentes, tarsorum articuli aequales. 5. *Sphenoma.*

γ. Antennae longiores, extrorsum parum crassiores, articulo secundo tertio fere aequali. Corpus posterius attenuatum. Elytra thorace fere latiora. Pedes pubescentes, tarsorum articulus primus insequente paullo longior. . . . . 6. *Oxypoda.*

2. Caput plus minusve exsertum. Corpus posterius vix attenuatum. Thorax plerumque rotundatus, angulis vix deflexis. Pedes pubescentes.

α. Antennae extrorsum articulis quinque abrupte crassioribus.

a. Corpus convexum, anterius attenuatum. Tarsorum articulus primus nonnihil longior. . . . . . 7. *Microcera.*

b. Corpus subdepressum, haud attenuatum. Tarsi graciles, articulis subaequalibus. . . . . 8. *Oligota.*

β. Antennae articulis duobus basilaribus crassis, subglobosis, reliquis capillaribus setosis. . . . . 9. *Trichophya.*

γ. Antennae extrorsum plus minusve sensim crassiores.

a. Caput subsessile, thoracis basi nunquam latius.

* Thorax capitis latitudine. Corpus deplanatum, lineare. Antennae moniliformes. Tarsorum articulus ultimus reliquis simul sumtis aequalis. . . . 10. *Homalota.*

** Thorax transversus, globosus, capite latior, postice reflexo-marginatus. Corpus breve, depressum, insecto terrefacto in globum revolutum. Tarsi articulis aequalibus . . . . 11. *Gyrophaena.*

*** Thorax capite latior, lateribus rotundatus. Corpus in plerisque subdepressum, posterius sublineare. Tarsorum articulus primus subsequente longior. . . . . 12. *Bolitochara.*

**** Thorax elongatus, capitis fere latitudine, lateribus vix rotundatus. Corpus elongatum, abdomine posterius nonnihil dilatato. Tarsorum, praesertim posticorum, articulus primus subsequente multo longior . . . . 13. *Drusilla.*

Caput exsertum, thoracis basi semper latius.

* Thorax basi apiceque latitudine aequalis. Elytra basi non plicata. Tarsorum articuli aequales. . . . 14. ***Calodera.***

** Thorax apice latior. Elytra basi non plicata. Tarsorum articulus primus subsequentibus longior 15. ***Falagria.***

*** Thorax apice angustatus, stipitatus. Elytra basi plicata. Tarsorum articuli aequales . . . . 16. *Autalia.*

Fam. *BRACHELYTRA.*

Labrum emarginatum					1.	STAPHYLINIDES.
Labrum integrum.	Tarsi 5-articulati.	Palpi articulis omnibus distinctis.	Antennae ante oculos insertae.	Pedes inermes	4.	OMALIDES.
				Pedes spinosi	5.	TACHINIDES.
			Antennae margini oculorum interno appositae		6.	ALEOCHARIDES.
		Palpi articulo ultimo occulto			2.	STENIDES.
	Tarsi 3- vel 4-articulati				3.	OXYTELIDES.

Trib. I. STAPHYLINIDES.

- Palpi labiales securiformes.
  - Palpi maxillares filiformes . . . . 1. *Oxyporus.*
  - Palpi maxillares securiformes . . . . 2. *Astrapaeus.*
- Palpi omnes filiformes.
  - Antennae ante oculos pone mandibulas insertae.
    - Tarsi, in maribus saltem, dilatati.
      - Antennarum articulus ultimus integer.
        - Antennae serratae . . . . 3. *Vellejus.*
        - Antennae moniliformes . . . . 7. *Cafius.*
      - Antennarum articulus ultimus oblique truncatus.
        - Antennarum articulus ultimus superne truncatus, sub-foveolatus 4. *Creophilus.*
        - Antennarum articulus ultimus a latere truncatus, sub-emarginatus
          - Antennae extrorsum articulis sex brevibus, subtransversis . . . . 5. *Emus.*
          - Antennarum articuli 4-10 inter se aequales lenticulares.
            - Collare angustum, Caput petiolatum . . . . 6. *Staphylinus.*
            - Collare inflatum, Caput subsessile . . . . 8. *Physetops.*
    - Tarsi in utroque sexu simplices . . . . 9. *Gyrohypnus.*
  - Antennae ante oculos ad mandibularum basin insertae.
    - Antennae in processu capitis pone labrum insertae.
      - Collare angustum, Caput petiolatum . . . . 10. *Eulissus.*
      - Collare inflatum, Caput subsessile . . . . 11. *Platyprosopus.*
    - Antennae ultra labrum insertae.
      - Corpus convexiusculum. Thorax lineari-quadrangulus.
        - Antennae haud fractae . . . . 12. *Lathrobium.*
        - Antennae fractae . . . . 13. *Cryptobium.*
      - Corpus deplanatum. Thorax trapeziformis . . . . . 14. *Achenium.*

Trib. II. STENIDES.

- Antennae ante oculos insertae.
  - Antennae extrorsum parum crassiores.
    - Tarsorum articulus quartus bifidus . . . . 1. *Paederus.*
    - Tarsorum articulus quartus integer . . . . 2. *Rugilus.*
  - Antennae apice abrupte crassiores . . . . 3. *Eristhetus.*
- Antennae inter oculos insertae.
  - Ligula obsoleta. Anus bisetus . . . . 4. *Dianous.*
  - Ligula protensa. Anus setis distitutus . . . . 5. *Stenus.*

Trib. III. OXYTELIDES.

- Tibiae, anteriores saltem, extus denticulato - pectinatae.
  - Tibiae omnes integrae . . . . 1. *Bledius.*
  - Tibiae anticae apice exteriore excisae.
    - Tibiae posticae denticulato - pectinatae . . . . 2. *Platystethus.*
    - Tibiae posticae inermes . . . . 3. *Oxytelus.*
- Tibiae omnes inermes . . . . 4. *Trogophloeus.*

Trib. IV. OMALIDES.

- Tarsorum articulus ultimus elongatus, reliquis simul sumtis aequalis.
  - Tarsi quatuor anteriores dilatati, spongiosi . . . . 1. *Phloeocharis.*
  - Tarsi omnes simplices
    - Palpi maxillares articulo ultimo subulato . . . . 2. *Taenosoma.*
    - Palpi maxillares articulo ultimo conico.
      - Antennae extrorsum crassiores.
        - Abdomen elytris parum longius . . . . 3. *Omalium.*
        - Abdomen elytris plerumque duplo longius . . . . . . 4. *Anthobium.*
      - Antennae filiformes . . . . 5. *Acidota.*
- Tarsorum articulus ultimus praecedentibus aequalis.
  - Palpi maxillares articulo ultimo conico . . . . 6. *Lesteva.*
  - Palpi maxillares subulati.
    - Antennae extrorsum sensim crassiores . . . . 7. *Proteinus.*
    - Antennae extrorsum abrupte crassiores . . . . 8. *Micropeplus.*

Trib. V. TACHINIDES.

- Corpus globosum . . . . 1. *Hypocyphtus.*
- Corpus subdepressum.
  - Corpus latum, postice attenuatum.
    - Palpi subulati . . . . 2. *Tachyporus.*
    - Palpi filiformes . . . . 3. *Tachinus.*
  - Corpus elongatum, utrinque subattenuatum.
    - Palpi subulati . . . . 4. *Mycetoporus.*
    - Palpi filiformes . . . . 5. *Bolitobius.*

Trib. VI. ALEOCHARIDES.

- Palpi maxillares elongati articulo ultimo acuto.
  - Antennarum articulus primus parum major . . . . 1. *Dinarda.*
  - Antennarum articulus primus crassissimus . . . . 2. *Lomechusa.*
- Palpi maxillares breves, articulo ultimo subulato.
  - Os rostratum. Tibiae anteriores spinosae . . . . 3. *Gymnusa.*
  - Os haud rostratum. Tibiae inermes.
    - Caput sub thor. plus minusve retractum. Thorax angulis anticis deflexis.
      - Antennarum articulus secundus tertio fere duplo brevior. 4. *Aleochara.*
      - Antennarum articuli 2 et 3 fere aequales.
        - Corpus elongatum, teretiusculum . . . . . 5. *Sphenoma.*
        - Corpus posterius attenuatum . . , ... 6. *Oxypoda.*
    - Caput plus minusve exsertum. Thorax plerumque rotundatus, angulis vix deflexis.
      - Antennae extrorsum abrupte crassiores.
        - Corpus convexum. Tarsorum articulus primus longior . . . . 7. *Microcera.*
        - Corpus subdepressum. Tarsorum articuli aequales . . . . 8. *Oligota.*
      - Antennae extrorsum haud abrupte crassiores.
        - Antennarum articuli 3 - 11 capillares, setosi . . : . . . . . 9. *Trichophya.*
        - Antennae extrorsum sensim crassiores.
          - Caput subsessile, thoracis basi nunquam latius.
            - Tarsor. articulus ultimus reliquis simul sumtis aequalis. 10. *Homalota.*
            - Tarsorum articulus ultimus praecedente vix longior.
              - Tarsorum articuli aequales . . . . . . 11. *Gyrophaena.*
              - Tarsorum articulus primus subsequente longior.
                - Thorax capite latior, lateribus rotundatus. Corpus posterius sublineare . . . . 12. *Bolitochara.*
                - Thorax elongatus, capitis fere latitudine, lateribus vix rotundatis. Corpus posterius nonnihil dilatatum . . . . 13. *Drusilla.*
          - Caput exsertum, thoracis basi semper latius.
            - Elytra basi non plicata.
              - Thor. basi apiceque latitudine aequalis. Tarsorum articuli aequales. 14. *Calodera.*
              - Thorax apice latior. Tarsorum articulus primus longior . . . . 15. *Falagria.*
            - Elytra basi plicata . . . . 16. *Autalia.*

Trib. I. STAPHYLINIDES.

1. OXYPORUS *Fabricii.*

STAPHYLINUS *Linné.*

1. RUFUS *Linné. Gyllenhal Insecta Svecica.* P. II. p. 442.

In Finlandiae boletis saepius captus.

2. MAXILLOSUS *Fabr. Gravenhorst Coleoptera Microptera.* p. 152.

Ad Yläne Nygord Finlandiae in agaricis aliquoties cepit D. *Sahlberg* et benevole communicavit.

3. SCHOENHERRII *Sahlberg. Niger, glaber, antennis, tibiis, tarsis elytrisque testaceis, his angulo postico exteriore nigro.*

Sahlb. Insecta Fennica Manuscr.

Habitat in agaricis Finlandiae rarissime. Specimen in museo meo conservatum amicitiae D. *Nordenskjöld* debeo.

Sequenti similis, colore, thorace angustiore, magis globoso elytrisque longioribus, striis duabus disci ad apicem usque productis nec non profundius punctatis, canalicula interjecta magis excavata, bene distinctus.

4. MANNERHEIMII *Billberg. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 495.

Prima specimina in Savolaxia Finlandiae anno 1816 legi. Deinde a D. *Sahlberg* ad Yläne Nygord et a D. *Nordenskjöld* ad Frugord captus et mecum communicatus. Semper in boletis obvius.

2. ASTRAPAEUS *Gravenhorst.*

STAPHYLINUS *Rossi. Olivier.*

1. ULMI *Rossi. Olivier Entomologie.* T. III. No. 42. p. 17.

Specimen ex Europa australi communicavit D. *Gyllenhal.*

3. VELLEIUS *Leach.*

STAPHYLINUS *Fabr. Gyll.*

1. DILATATUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 299.

Prope Petropolin lectus et a D. *Faldermann* communicatus.

4. CREOPHILUS *Kirby.*

STAPHYLINUS *Linné. Gyll.*

1. MAXILLOSUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 279.

In Finlandiae stercoratis, cadaveribus et quisquiliis sat frequens. Specimen e Dauria misit D. *Wladsimirsky* et alterum ex America boreali dedit Comes *Dejean.*

Var. b. mihi, *elytris glabris, laevibus nigris.*

In Finlandia aliquoties capta.

2. VARIEGATUS *Dej.* *Niger nitidus, elytris abdomineque fasciis cinereis, nigro-maculatis, elytris margine fulvo, thoracis basi, elytrorum sutura apiceque fulvo-hirtis.*

Dej. Catalogue des Coléoptères. p. 21

Habitat in Brasilia ad Rio Janeiro.

Praecedente similis, sed minor, capite thoraceque angustior et hirsutie fulva vestitus.

---

5. EMUS. *Leach.*

STAPHYLINUS *Linné. Grav. Gyll.*

Sectio 1. Antennae capite breviores, articulis secundo et tertio obconicis, quarto et quinto brevioribus globosis.

1. HIRTUS *Lin. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 280.

Ad Holkaberg Ostrogothiae in Svecia semel captus; specimen alterum e Gallia meridionali misit D. *Chardiny.*

Sectio 2. Antennae capite longiores, articulis secundo et tertio subsequente longioribus.

2 NEBULOSUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 282.

E Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missus; specimen e Sibiria etiam communicavit D. *Henning.*

3. SPECIOSUS *Dej.* *Pubescens, niger, cinereo fuscoque nebulosus, antennis, genubus tibiisque testaceis, pectore abdominisque apice vellere viridi-micante vestitis.*

Ex America boreali misit D. *Leconte.*

Emo nebuloso simillimus, antennis fere totis ferrugineis apice tantum nigris, pectore abdominisque apice vellere viridi-micante obsitis, diversus.

4. CHRYSOCEPHALUS *Fourcroy. Grav. Monographia Micropterorum.* p. 124.

E Dalmatia misit. D. *Parreyss.*

5. PUBESCENS *De Geer. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 284.

In Finlandiae stercoratis non infrequens; specimen Sibiricum etiam dedit D. *Henning.*

6. MURINUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 283.

In Finlandiae stercoratis saepe obvius.

Var. b. mihi. *Nigrior, carinula thoracis postica evidentiore.*

E Lapponia misit D. *Fellman.*

7. INAURATUS *mihi.* *Pubescens, niger, angustior, capite, thorace elytrisque e fusco et aureo nebulosis, thorace postice haud carinato.*

E Dauria misit D. *Wladsimirsky.*

Praecedente angustior, magis linearis, thorace postice haud carinato et pube aurea micante in capite, thorace et elytris conspersus.

6. STAPHYLINUS *Linné.*

Sectio I. Thorax antice truncatus, supra creberrime punctatus, tenue tantum pubescens vel etiam glaber.

1. CHRYSOCOMUS *mihi.* *Niger, opacus, pubescens, subtiliter punctulatus, thorace violaceo-micante, antennis, capite, elytris pedibusque fulvo-aureis.*

Habitat in Dauria. D. *Wladsimirsky.*

Insectum pulcherrimum. *St. eryhtroptero* vix angustior, sed multo brevior. Caput thorace multo latius, subquadrangulare, creberrime punctulatum, fulvum, pilis aureo-micantibus dense adspersum. Antennae thorace breviores, fulvae. Thorax antice parum latior, latitudine longior, antice truncatus, lateribus fere rectis, niger, subtiliter punctulatus, violaceo-micans, parce pubescens. Scutellum rotundatum, holosericeo-atrum. Elytra thorace latiora, subquadrata, angulo exteriore rotundata, subtilissime punctulata, fulva, dense aureo-sericea. Abdomen nigrum, tenue pubescens, segmentorum ventralium marginibus aureo-micantibus. Pedes fulvi, aureo-sericei.

2. ERYTHROPTERUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 293.

E Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Billberg* missus; individuum Sibiricum D. *Henning* debeo; etiam e Gallia meridionali a D. *Chardiny* communicatus.

3. CASTANOPTERUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 295.

In Finlandia sub lapidibus et in stercore equino passim. In Blekingia Sveciae etiam a me lectus.

4. STERCORARIUS *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 296.

In Blekingia semel captus; a D. *Gyllenhal* etiam missus.

5. DAURICUS *Dej.* *Nigro-fuscus, pubescens, capite magno thoraceque aeneomicantibus, tibiis tarsis elystrisque testaceo-rufis, his obsolete nigro-maculatis.*

E Dauria misit D. *Wladsimirsky.*

Staph. lutario fere dimidio major, capite thoraceque latioribus et colore distinctus.

6. ERYTHROPENNIS *Dej.* *Fusco-brunneus, pubescens, antennis, tibiis, tarsis elytrisque dilutioribus, his fusco-nebulosis, capite thoraceque aeneo-micantibus.*

Dej. Cat. p. 21.

Ex America boreali misit D. *Leconte.*

Praecedenti similis, sed major, longior, caput magis quadratum et color alius.

7. IMMACULATUS *Harris.* *Linearis, rufo-piceus, opacus, abdomine obscuriore, subtiliter punctulatus, antennis, capite, pedibus, elytris anoque rufo-cinnabarinis, pectore segmentorumque abdominalium marginibus flavo-aureis.*

Specimen ex America a D. *Oakes* missum benevole cammunicavit D. *Faldermann.*

Statura sequentis, sed major, magis linearis et aliter coloratus.

8. LUTARIUS *Grav. Monogr.* p. 115.

E Gallia misit Comes *Dejean*, e Dalmatia D. *Parreyss.*

9. CINNAMOPTERUS *Knoch. Grav. Coleoptera. Microptera.* p. 164.

Specimina ex America boreali amicitiae DD. *Leconte* et *Faldermann* debeo.

10. BADIUS *Dej. Rufo-piceus, antennarum medio abdomineque obscurioribus, pedibus pallidioribus, elytris umbra obsoleta fuscescente, thorace dorso carinato.*

Dej. Cat. p. 21.

Habitat in America boreali, a Comite *Dejean* communicatus.

Statura et magnitudo praecedentis, capite thoraceque nonnihil longioribus, punctura thoracis densiore ut etiam colore diversus.

11. AENEOCEPHALUS *De Geer. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 291.

In Finlandiae et Sveciae stercoratis et sub lapidibus pluries lectus. E Germania misit D. *Sturm*; e Dauria D. *Wladsimirsky.*

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 292.

In Svecia capta.

12. CHALCOCEPHALUS *Fabr. Systema Eleutheratorum.* P. II. p.. 593.

In Ostrogothia Sveciae captus et Comiti *Dejean* communicatus, qui me certiorem fecit hoc insectum verum esse *St. chalcocephalum Fabricii.*

13. AENEICOLLIS *Dahl. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 475.

In Scania et Westrogothia Sveciae aliquoties lectus.

14. OLENS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 285.

E Tauria misit D. *Tams*; e Svecia D. *Zetterstedt.*

15. AZURESCENS *Dej. Niger, sub-opacus, capite, thorace elytrisque supra caerulescentibus, subtilissime punctatis, capite thoraceque haud carinatis.*

Dej. Cat. p. 21.

E Dalmatia misit D. *Parreyss.*

Sequente paullo major, statura simillimus, sed subtilius punctulatus, et defectu linea elevata in fronte et thoracis dorso facile distinguendus.

16. CYANEUS *Paykull. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 286. *)

Individua Svecana a DD. *Schönherr, Hollberg* et *Haeffner* obtinui.

17. SIMILIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 287.

E Svecia a DD. *Billberg* et *Haeffner* missus.

18. MORIO *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 473.

In Scania Sveciae semel captus; ex Austria misit Comes *Dejean.*

19. SUBPUNCTATUS *Dej. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 288. P. IV. p. 474.

Sub lapidibus locis aridis in Finlandia non infrequens.

20. URALENSIS *mihi. Niger, convexus, capite thoraceque glabris nitidis, parcius punctulatis, elytris abdomineque opacis, thorace postice bifoveolato.*

E Slatoust Sibiriae misit D. *Herrmann.*

Praecedenti simillimus et nimis affinis, paullo tamen major, in capite, thorace et elytris longior, et thorace postice foveolis duabus longitudinalibus parum profundis, punctatis impressus.

21. PRAELONGUS *Say. Elongatus, niger, subdepressus, glaber, capite thoraceque fortius, elytris virescentibus subtilius punctatis, thorace obsolete carinato.*

Specimen ex America boreali a D. *Oakes* missum dedit D. *Faldermann.*

Praecedente paullo major et praesertim in elytris magis depressus, thoraceque non foveolato diversus.

22. ERYTHROPUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 290.

Specimen Svecanum a D. *Billberg* missum.

23. BRUNNIPES *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 289.

Ex insula Gottlandia misit D. *Zetterstedt.*

---

*) E *St. cyaneo* et affinibus D. *Kirby* condidit genus *Ocypus* quod vix vero distinctum.

Sectio 2. Thorax rotundatus, vel semi-orbiculatus, antice subtruncatus, supra glaber, laevis, vel punctis paucioribus, in disco plerumque seriatim digestis, impressus.

Subdivisio 1. Thoracis disco impunctato.

24. SPLENDENS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 297.

In Finlandiae et Sveciae stercoratis aliquoties captus.

25. LAMINATUS *Creutzer. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 298.

In stercore equino Finlandiae rarius, etiam e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Subdivisio 2. Thoracis seriebus dorsalibus 2- vel 3-punctatis.

26. TRISTIS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 301.

Sub lapidibus in Finlandia et Svecià rarius.

27. FULIGINOSUS *Grav. Micr.* p. 34.

In Finlandia ad Willnäs rarius captus sub lapidibus.

28. MOLOCHINUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 302.

Sub muscis et lapidibus in Finlandia et Svecia non infrequens.

Var. c. *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 477.

Ad Willnäs semel lectus.

29. VARIABILIS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 303.

Petropoli et in Finlandiae truncis arborum emortuarum nec non sub lapidibus saepius lectus. E Svecia misit D. *Gyllenhal* et e Lapponia D. *Fellman.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Specimen Svecanum communicavit D. *Gyllenhal.*

Var. c. *Gyll.* l. c.

In Finlandia non infrequens.

Var. d. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 304.

Cum praecedente capta, et e Svecia a D. *Gyllenhal* missa.

Var. e. *Gyll.* l. c.

In Finlandia semel lecta.

Var. f. *Gyll.* l. c.

Petropoli semel tantum obvia.

Var. g. *mihi. Rufo-testaceus, capite elytrisque obscurioribus.*

Ad Willnäs semel lecta.

Var. h. *mihi. Ut Var. c. sed seriebus thoracis quadripunctatis.*

Etiam ad Willnäs semel capta.

30. SCITUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 306.

In Finlandia et Svecia sub cortice arborum emortuarum interdum obvius.

31. LAEVIGATUS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 306.

Petropoli et in Finlandia saepius lectus.

32. IMPRESSUS *Panzer. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 307.

In Finlandia passim obvius; e Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

33. RUFO-CINCTUS *mihi. Niger nitidus, elytris glabris rufo-marginatis, haud striato-punctatis, abdomine subcaerulescente, segmentorum marginibus rufo-ferrugineis.*

In Finlandia australi bis captus; etiam e Svecia inter specimina *St. impressi* a D. *Gyllenhal* communicatus.

Statura et magnitudo praecedentis, a quo differt elytris haud striato-punctatis; an igitur species diversa?

34. PICIPES *Kollar. Niger nitidus, elytris rufo-castaneis, rugosopunctatis, antennis pedibusque testaceis, abdomine attenuato.*

In insula Corcyra legit D. *Parreyss*, qui marem et feminam speciei hujus insignis mecum benevole communicavit.

Magnitudo *St. laevigati*, sed statura *St. maurorufo* vel *attenuato* proximus.

35. MAURUS *mihi. Sahlberg Insecta Fennica.* p. 317.

In Finlandia ad Willnäs bis captus.

36. MAURO-RUFUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 309.

Sub lapidibus in Finlandia aliquoties captus; etiam e Lapponia a D. *Fellman* missus.

37. PRAECOX *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 310.

Ad Willnäs perraro occurrit.

38. ATTENUATUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 311.

E Svecia a D. *Gyllenhal* et e Lapponia a D. *Fellman* missus; individuum unicum tantum ad Willnäs ipse inveni.

39. BOOPS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 312.

In Finlandia australi rarius.

40. SUBULIFORMIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 312.

Petropoli rarissime obvius.

Subdivisio 3. Thoracis seriebus dorsalibus 4-punctatis.

41. AENEUS *Rossi Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 314.

In Finlandiae et Sveciae stercoratis saepissime captus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Capta prope Petropolin et in Finlandia.

42. NITIDUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 315.

Petropoli et in Finlandia Sveciaque aliquoties lectus; etiam e Germania a D. *Sturm* missus.

43. CAERULEIPENNIS *mihi.*

Staph. cyanipennis Grav. Mier. p. 168. *Monogr.* p. 86. *Varietas Americana.*

Ex America boreali misit D. *Leconte.*

44. DECORUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 316.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.* In Insula Runsala prope Aboam semel inveni.

45. CYANICORNIS *Harris. Niger subnitidus, capite ovato, thorace breviore, elytris longius pubescentibus, opacis.*

Specimen ex America boreali sub hoc nomine communicavit D. *Faldermann.*

Praecedentis magnitudo et fere statura, capite thoraceque multo brevioribus, elytris longius pubescentibus et colore omnino nigro diversus; antennae autem minime cyaneae, anne igitur denominatio ad aliam pertineat speciem?

46. POLITUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 317.

In Finlandia et Svecia saepius lectus. E Svecia etiam misit D. *Gyllenhal*, e Lapponia D. *Kohlström* et e Germania D. *Sturm*.

47. FUSCIPENNIS *mihi. Niger nitidus, capite ovato, thorace angustiore, antennarum articulo primo sub-testaceo, elytris fusco-castaneis opacis, pedibus piceis.*

In Scania Sveciae semel captus.

Praecedenti similis; minus nitidus, niger, elytris pedibusque aliter coloratus.

48. LUCENS *mihi. Aeneo-virescens nitidissimus, antennarum articulo primo nigro, capite thorace vix angustiore.*

Petropoli, ad Willnäs et in Scania obvius, ubique tamen perrarus.

St. polito iterum similis, sed magis virescenti-aeneus, nitidior, statura fere linearis, thoraceque magis globoso, antice haud latiore, diversus.

49. ATRATUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 319.

In Finlandiae et Sveciae stercoratis aliquoties lectus, etiam a D. *Gyllenhal* et e Lapponia a D. *Fellman* communicatus.

50. CARBONARIUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 319.

Cum praecedente rarius.

51. RIGIDICORNIS *Grav. Micr.* p. 23.

E Lapponia a D. *Fellman* communicatus.

52. CEPHALOTES *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 320.

In stercoratis Finlandiae passim.

53. VARIUS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 321.

In stercore praesertim bovino, in Finlandia sat frequens.

54. MARGINATUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 322.

Finlandiae et Sveciae in stercoratis frequens; e Lapponia a D. *Kohlström* missus.

55. FIMETARIUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 324.

In stercoratis Finlandiae et Sveciae frequenter obvius; e Svecia etiam misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 325. *St. lucidus Grav.*

Petropoli et in Finlandia lectus; e Lapponia communicavit D. *Fellman.*

56. SORDIDUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 326.

In Finlandia rarius lectus; e Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

57. SUBFUSCUS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 326.

Ad Willnäs raro obvius.

58. ALBIPES *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 327.

In Finlandiae Australis stercoratis frequentissimus.

59. FUSCUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 329.

Semel captus in Finlandia.

60. NITIDULUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 330.

Unicum specimen ad Willnäs captum.

Subdivisio 4. Thoracis seriebus dorsalibus 5-punctatis.

61. DISCOIDEUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 331.

E Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* pluries missus. Unicum ipse ad Willnäs legi specimen.

62. VERNALIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 332.

In Finlandia raro obvius, e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

63. VENTRALIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 334.

In Finlandia et Svecia aliquoties captus, etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

64. QUISQUILIARIUS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 335.

Petropoli et in Finlandia plurima inveni specimina, unicum e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

65. OCHROPUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 336.

In Finlandia et Svecia aliquoties captus.

66. EBENINUS *Grav Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 336.

In Finlandia, Svecia et Germania rarius lectus.

67. IMMUNDUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 337.

In Finlandia et in Ostrogothia Sveciae rarius captus.

68. SANGUINOLENTUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 338.

In Finlandiae stercoratis rarius; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

69. DIMIDIATUS *Sahlb. Ins. Fenn.* p. 326.

Ad Willnäs semel lectus.

70. BIPUSTULATUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 339.

In Finlandia et Svecia rarius mihi obvenit, specimen etiam communicavit D. *Gyllenhal.*

71. OPACUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 340.

In stercore, praesertim equino, in Finlandia et Svecia frequenter occurrit; a D. *Gyllenhal* quoque missus.

Var. c. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 341.

Cum praecedente, etiam sat frequens.

72. AGILIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 341.

In Finlandiae stercoratis sat frequens; e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

73. VARIANS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 342.

In Finlandia et Svecia non infrequens; specimen etiam misit D. *Gyllenhal.*

74 IRREGULARIS *mihi. Niger nitidus, elytris fusco-virescentibus, pedibus fusco-piceis, capite thorace majore subquadrato, thoracis seriebus dorsalibus irregularibus.*

Petropoli a D. *Hummel* lectus et mecum benevole communicatus.

Praecedenti colore similis, capite autem majore, subquadrato et elytris minus crebre punctatis. In thorace etiam prope seriem dorsalem extus punctum majusculum utrinque impressum, unde series minus regulares.

Subdivisio 5. Thoracis seriebus dorsalibus 5-punctatis.

75. FULVIPES *Panz. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 343.

Ad Willnäs semel captus, et a D. *Sturm* e Germania missus.

76. MICANS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 344.

In Finlandia et Svecia passim; specimina quaedam etiam communicavit D. *Gyllenhal.*

77. VIRGO *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P II. 345.

Ad Willnäs rarissime lectus.

Subdivisio 6. Thoracis seriebus dorsalibus multipunctatis.

78. PUNCTUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 346.

Ad Willnäs bis tantum captus.

Sectio 3. Thorax rotundatus, latitudine longior, antice subtruncatus, supra glaber, profunde multipunctatus.

79. MULTIPUNCTATUS *mihi. Niger subnitidus, elytris fusco virescentibus, capite orbiculato, crebre et profunde punctato, thorace etiam profunde absque ordine punctato, relicta area media laevissima.*

In Scania Sveciae ad Esperöd semel captus.

Species distinctissima, *St. puncto* statura et magnitudo similis.

80. CINERASCENS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 361.

Petropoli et in Svecia rarius lectus. Specimina nonnulla Svecana etiam benevolentiae DD. *Gyllenhal* et *Boheman* debeo.

CAFIUS *Leach.*

STAPHYLINUS *Grav. Gyll.*

Sectio 1. Thorax antice truncatus, lateribus sinuato-excisis, seriebus dorsalibus 4-punctatis.

1. XANTHOLOMA *Hellwig. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 323.

Ad littora maris ad Esperöd in Scania Sveciae, sub lapidibus humidis, anno 1822 copiose lectus.

Sectio 2. Thorax oblongo-ovatus, lateribus subrectis, seriebus dorsalibus 5- vel 6-punctatis.

2. NANUS *Grav Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 347.

Petropoli, in Finlandia et Svecia saepius lectus; etiam individua Svecana a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* obtinui.

3. SPLENDIDULUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 348.

Ad Willnäs semel captus.

4. PUMILUS *mihi. Fusco-testaceus, antennarum basi pedibusque luteis, thorace lineari, seriebus dorsalibus 6-punctatis.*

In Ostrogothia Sveciae semel obvius.

Medius quasi inter *Caf. splendidulum* et *aterrimum*, colore illi et thoracis forma huic affinis, nec uni alterive facile associandus.

5. ATERRIMUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 349.

Saepe captus in Finlandia et Svecia; e Westrogothia misit D. *Gyllenhal*, e Smolandia Sveciae D. *Boheman.*

6. NIGRITULUS *Grav. Micr.* p. 41.

Ad Willnäs semel lectus.

---

8. PHYSETOPS *mihi.*

STAPHYLINUS *Pallas, Sturm.*

Palpi subaequales, filiformes, articulo ultimo praecedente parum breviore, truncato, in labialibus latiore, vix tamen securiformi. Antennae capite breviores, articulo primo parum longiore, sub-clavato, ceteris longitudine fere aequalibus, 2 *et* 3 *obconicis, insequentibus subglobosis, moniliformibus, ultimo acuminato. Corpus lineari-elongatum. Caput inflatum, thorace latius, collari parum distincto. Thorax antice latior, lateribus deflexis. Elytra quadrangula, subdepressa. Tarsi maris antici dilatati, articulo ultimo paullo longiori; posteriores articulis primo et ultimo interjectis paullo longioribus.*

A φύσητὸς inflatus et ὢψ facies.

1. TARTARICUS *Pallas Iter.* T. II. app. p. 30. *Sturm Catalog.* p. 61.

Habitat in Tartaria magna. Individuum in Museo meo conservatum benevolentiae D. *Henning* debeo.

9. GYROHYPNUS *Kirby.*

XANTHOLINUS *Dahl.* STAPHYLINUS *Grav. Gyll.*

1. LONGICEPS *Illiger. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 350.

In Finlandia et Svecia parcius lectus; specimen Svecanum etiam misit D. *Gyllenhal.*

2. OCHRACEUS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 352.

Finlandiae in stercoratis et sub lapidibus ipse inveni; e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

3. BATYCHRUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 480.

Individuum in Svecia lectum misit D. *Gyllenhal.*

4. PUNCTULATUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 353.

Petropoli, in Finlandia et Svecia in stercoratis exsiccatis non infrequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal*, e Gallia Comes *Dejean.*

5. PARUMPUNCTATUS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 481.

Sub muscis in Finlandia aliquoties lectus, etiam Petropoli semel captus.

6. LENTUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 354.

Sub cortice arborum emortuarum in Svecia et Finlandia interdum captus; etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

7. TRICOLOR *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 355.

In truncis putridis Finlandiae et Sveciae aliquoties lectus.

8. PYROPTERUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 356.

E Svecia misit D. *Hollberg*; Individuum etiam a me Aboae lectum possideo.

9. FULMINANS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 357.

A D. *Gyllenhal* e Svecia communicatus.

10. **PILICORNIS** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 359.

In Finlandia et Svecia rarius lectus.

Var. b. *mihi. Rufo testaceus, capite, thoracis dorso, elytrorum abdominisque apice infuscatis.*

Ad Willnäs semel tantum obvius.

11. **NIGRICEPS** *mihi. Rufo-testaceus, capite majori nigro, elytrorum abdominisque apice infuscatis.*

In Kinnekulle Sveciae sub cortice Pini semel lectus.

Praecedente paullo major, nec non capite latiore distinctus.

12. **ALTERNANS** *Knoch. Grav. Micr.* p. 48.

In Finlandia meridionali rarius, a D. *Bonsdorff* lectus.

Var. b. *mihi. Rufo-testaceus totus, pedibus pallidioribus.*

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

13. **PARVULUS** *Grav. Micr.* p. 42.

Ad Willnäs semel captus.

14. **LINEARIS** *Knoch. Grav. Micr.* p. 43.

In Westrogothia Sveciae semel obvius.

15. **MELANOCEPHALUS** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 360.

Sub cortice arborum emortuarum ad Willnäs perrarus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum Var. a. semel lectus.

16. **PROCERULUS** *Grav. Monogr.* p. 95.

Ad Willnäs sub muscis interdum obvenit.

17. **PLANATUS** *Grav. Monogr.* p. 108.

Petropoli legit D. *Hummel* et benevole communicavit.

10. EULISSUS *mihi.*

Palpi filiformes, articulo ultimo, sive quarto in maxillaribus, tertio in labialibus praecedenti aequalibus, oblongo-ovatis; maxillares labialibus duplo longiores. Antennae ante oculos in processu capitis pone labrum, ad mandibularum basin insertae, capite breviores, articulo primo maximo clavato, plus quam tertiam antennae partem constituente, secundo brevi obconico, tertio iterum duplo longiore, clavato, reliquis brevibus lenticularibus, ultimo vix acuminato. Corpus lineare. Caput petiolatum, thorace longius, basi truncatum, antice angustatum; collare angustum inflatum. Thorax trapeziformis, antice dilatatus. Elytra posterius nonnihil latiora, sutura dehiscentia. Pedes breves; tarsi articulis bifidis, ultimo paullo longiore.

Ab εὖ bene, pulchre et λισσὸς laevis.

1. CHALYBAEUS *mihi. Chalybaeus nitidissimus, elytris violaceis, antennis nigris, pedibus rufis.*

Ad Minas Geraës Brasiliae a D. *Ménétriés* in stercore bovino lectus et mecum benevole communicatus.

Elegantissima species, *Staphylino cyaneo* major. Caput cyaneum nitidissimum, versus os et latera virescens, pone labrum triangulariter impressum et praeterea ad oculos utrinque foveola parva obsoletiore, nec non in nucha punctis aliquot profundis notatum, labro flavo, antennis nigris. Collare nigrum, capite duplo angustius, inflatum, postice fere ad medium utrinque incisuris duabus sat profundis, antrorsum divergentibus. Thorax laete chalybaeus, ad latera nonnihil virescens, tennuissime marginatus, ad angulum anteriorem apicis punctis utrinque duobus impressus. Scutellum magnum triangulare, viride, apice rotundato, impressum, punctis profundis irregularibus undique conspersum. Elytra violaceo-chalybaea, ad suturam elevatam series et altera fere in medio e punctis impressis, ut et margo inflexus confertim punctatus. Abdomen virescens, punctatum, margine utrinque reflexo. Pedes rufi, tibiis paullo obscurioribus.

11. Platyprosopus *mihi.*

Metopius *) *Steven.* Staphylinus *Dej.*

Labrum emarginatum, dense ciliatum. Mandibulae validae, intus tridentatae. Palpi breves filiformes, articulo ultimo subcylindrico, truncato; maxillares labialibus nonnihil longiores. Maxillae intus denticulatae, apice lacinia rotundata instructae. Mentum profunde emarginatum; ligula bifida. Antennae capite longiores, filiformes, ad latera processus capitis, supra basin labri utrinque insertae, articulis obconicis, primo majore, secundo oblongo-ovato. Corpus lineare subdepressum. Caput thorace parum latius, sed multo longius, ovatum, fronte ante oculos producta, a basi antennarum ad oculos sinuato-emarginata et supra oculos nonnihil elevata; linea inter oculos subelevata transversa, in qua stemmata bina satis conspicua. Collum parum distinctum. Tarsi antici (in maribus?) valde dilatati.

A πλατὺς latus et πρόσωπον facies, vultus.

1. ELONGATUS *Steven. Elongatus, rufo-piceus, elytris pedibusque castaneis, capite opaco, thorace glaberrimo, elytris subtilissime rugoso-punctatis.*

Staphylinus fallax. Dej.

Habitat in Caucaso D. *Steven*, in Armenia D. *Sowicz.* Specimen in Museo meo conservatum dedit D. *Ménétriés.*

Gyrohypno tricolore triplo major. Caput piceum, crebre at subtiliter punctatum, pubescens, utrinque punctis tribus majusculis impressis; oculi minuti reniformes; antennae ferrugineae. Thorax subquadratus, antice parum latior, rufo-piceus glaberrimus, nitidissimus, lateribus confertim punctatus, seriebus quatuor: dorsalibus quinque-, at lateralibus tripunctatis. Scutellum triangulare pubescens. Elytra castanea, quadrata, longius pubescentia. Abdomen piceum pubescens, segmentorum marginibus anoque rufo-testaceis. Pedes mediocres, castanei.

---

*) Nomen *Metopii* mutandum, exstant enim inter Hymenoptera *Metopius Panz.* et inter Diptera *Metopia Meigen*

12. LATHROBIUM *Grav. Gyll.*

PAEDERUS *Fabr. Oliv.* STAPHYLINUS *Linné.*

Sectio 1. Thorax elongato - quadrangulus.

1. ELONGATUM *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 363.

In Finlandia sub lapidibus non infrequens; e Germania misit D. *Sturm.*

2. FULVIPENNE *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 365.

Cum praecedente frequentius.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel capta.

Var. c. *Gyll.* l. c.

Etiam semel tantum in Finlandia australi obvia.

3. RUFIPENNE *Gyll. Ins. Svec.* P. III. p. 704.

Ad Willnäs et in insula Runsala prope Aboam aliquoties lectum.

4. PUNCTULATUM *mihi. Nigrum subnitidum, ore, antennis, elytris postice pedibusque rufo-testaceis, capite thoraceque crebrius punctatis.*

Ad Willnäs semel lectum.

Praecedenti simile, sed paullo minus, brevius, capite thoraceque crebrius punctatis, minus nitidis. A. *L. multipuncto*, cui etiam affine, differt thorace latiore et elytris obsoletius punctatis, punctis in strias non digestis.

5. MULTIPUNCTUM *Grav. Monogr.* p. 132. Var. 1.

E Gallia meridionali misit Comes *Dejean.*

6. BRUNNIPES *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 366.

Sub lapidibus et muscis in Finlandia saepius captum; e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *mihi. tota pallide rufa, elytris parum obscurioribus.*

In Finlandia australi rarius obvenit.

7. LINEARE *Hellwig. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 370.

In insula Runsala et ad Willnäs in Finlandia parcius obvium; etiam e Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missum.

8. MINUTUM *Dej. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 182.

L. longulum Gyll. Ins. Svec P. II. p. 371

Ad Willnäs semel captum; e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

Sectio 2. Thorax quadratus.

9. QUADRATUM *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 367.

In Svecia et Finlandia sub lapidibus rarius; etiam a D. *Gyllenhal* missum.

10. TERMINATUM *Knoch. Grav. Micr.* p. 55.

E Smolandia Sveciae misit D. *Boheman.*

Var. b. *mihi. Elytris immaculatis pedibus rufis.*

L. quadratum Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 367.

A D. *Gyllenhal* e Svecia communicata.

---

13. CRYPTOBIUM *mihi.*

LATHROBIUM *Grav. Gyll.* PAEDERUS *Payk.*

Palpi inaequales, maxillares multo longiores, articulo penultimo magno clavato, ultimo minuto conico. Antennae fractae. articulo primo longissimo clavato, sequentibus inter se aeque longis, 2 *et* 3 *obconicis,* 4 - 10 *lenticularibus, ultimo rotundato. Corpus lineari-elongatum. Thorax elongato-quadrangulus, subconvexus, elytris angustior. Elytra longiora quadrata. Abdomen stylis lateralibus pilosis in utroque sexu instructum. Tarsorum articulus primus insequentibus longior.*

A κϱυπτὸς occultus et βίος vita, vitae genus.

1. FRACTICORNE *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 369.

Ad Willnäs aliquoties captum; e Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missum.

---

13. ACHENIUM *Leach.*

LATHROBIUM *Grav.*

1. DEPRESSUM *Grav. Micr.* p. 182.

Specimen Parisiis captum communicavit D. *Chevrolat.*

Trib. II. STENIDES.

1. PAEDERUS *Fabr. Grav. Gyll.*

STAPHYLINUS *Linné.*

Sectio 1. Thorax convexus, sub - globosus.

1. MORIO *mihi.* *Ater opacus, antennis ferrugineis, thorace obovato, postice truncato, elytris brevissimis. caerulescentibus.*

Ex insula St. Domingo misit D. *Jaeger.*

Magnus. *Paed. ripario* duplo major. Caput thorace multo latius, subdepressum, disperse punctatum, fronte obsoletius bi - impressa. Antennae tenues, capite cum thorace longiores. Thorax latitudine longior, obovatus, basi truncatus, convexus, disperse punctatus. Scutellum minutum, triangulare. Elytra thorace angustiora, latitudine breviora, apice introrsum oblique truncata, punctis leviter insculptis pilosis. Abdomen reliquo corpore fere longius, inflatum, ano stylato, Pedes, praesertim postici, elongati.

2. LITTORALIS *Knoch. Grav. Micr.* p.. 61.

In Ostrobothnia Finlandiae et Sudermannia Sveciae rarissime mihi obvenit; adest etiam specimen ex Austria a Comite *Dejean* missus.

3. RIPARIUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 372.

Aliquot in Sudermannia ipse legi specimina; e Westrogothia Sveciae a D. *Gyllenhal* et e Lapponia a D. *Kohlström* communicatus.

4. RUFICOLLIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 373.

Individua quaedam Parisiis lecta misit D. *Chevrolat.*

Sectio 2. Thorax depressus, lateribus rotundatus.

5. LONGIUSCULUS *Harris.* *Elongatus, filiformis, rufo - ferrugineus, opacus, abdominis apice nigro, capite mediocri quadrato.*

Specimen in America boreali lectum a D. *Faldermann* obtinui.

Paed. angustato longior, sed non latior, capite minore et colore abunde diversus.

6. EXTENSUS *Gyll.* *Nigro - piceus, opacus, confertissime punctatus, ore, antennis pedibus elytrisque postice testaceis, capite maximo quadrato.*

E Smolandia Sveciae misit D. ***Boheman***; in Ostrogothia a me etiam lectus. Sequente fere duplo major, capite majore quadrato et thorace latiore obcordato bene distinctus.

7. ANGUSTATUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 375.

In Finlandia et Svecia interdum obvius.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum Var. a. rarius obvenit.

---

2. RUGILUS *Leach.*

STILICUS *Latreille.* PAEDERUS *Payk. Grav. Gyll.*

Sectio 1. Thorax antice angustatus.

1. ORBICULATUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 374.

In Finlandia non infrequens; etiam specimen in Svecia captum aliaque Gallica a D. *Chevrolat* missa possideo.

2. LAEVIGATUS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 483.

In Scania Sveciae semel lectus.

Sectio 2. Thorax subquadratus.

3. FUSCULUS *Ziegler.* ***Rufo*** *- testaceus, antennis pedibusque pallidioribus, capite thorace paullo latiore, quadrato, fuscescente, carinula thoracis vix conspicua.*

Specimen in Austria captum misit Comes ***Dejean.***

Rug. *bicolore* triplo major, magis opacus, aliter coloratus et capite thoraceque latioribus discrepans.

4. BICOLOR *Oliv. Grav. Micr.* p. 59.

Ut Austriae incolam communicavit Comes ***Dejean.***

5. CASTANEUS *Knoch. Grav. Micr.* p. 60.

E Parisiis misit D. *Chevrolat.*

6. RUBRICOLLIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 376.

Ad Willnäs in Finlandia saepius captus; e Smolandia Sveciae misit D. *Boheman*, e Parisiis D. *Chevrolat.*

3. ERISTHETUS *Knoch.*

EVAESTHETUS *) *Grav. Gyll.*

1. **SCABER** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 462.

E Smolandia Sveciae communicavit D. *Boheman.*

4. DIANOUS *Leach.*

STENUS *Gyll.*

1. **CAERULESCENS** *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 463.

Anno 1822 in Smolandia Sveciae lectus; pluries etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

5. STENUS *Latr. Grav. Gyll.*

PAEDERUS *Oliv.* STAPHYLINUS *Linné.*

1. **BIPUSTULATUS** *Linné.*

St. biguttatus Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 464.

Petropoli ad rivulorum ripas sat frequens; etiam in Svecia meridionali lectus; specimina e Westrogothia misit D. *Gyllenhal.*

2. **MAURUS** *mihi. Niger opacus, profunde punctatus, subrugosus, thorace elongato elytrisque foveolatis, fronte bicanaliculata, abdomine marginato.*

E Germania sub nomine *St. buphthalmi* a D. *Struwe* communicatus.

St. Junoni simillimus, sed thorace lateribus minus dilatatis, punctis confluentibus, praesertim in elytris, et pedibus gracilioribus differre videtur.

3. **JUNO** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 467.

In Svecia non infrequens, unde misit D. *Gyllenhal.* Petropoli et in Finlandia rarius obvenit; Specimen Lapponicum etiam dedit D. *Fellman.*

---

*) *Evaesthetus* e lapsu calami pro *Eristheto* facile exortus; nomen enim e vocabulis εὖ et αἴσθησις huic insecto aegre tribuendum.

4. ATER *Dahl.* *Niger opacus, profunde punctatus, thorace elongato, subcylindrico, medio canaliculato, fronte bicanaliculata, abdomine marginato.*

Dej. Cat. p. 25.

Ex Austria misit Comes *Dejean.*

St. Junoni iterum similis, sed multo angustior, minus profunde punctatus, thoraceque subcylindrico, medio canaliculato, distinctus.

5. BOOPS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 469.

Ad ripas humidas in Finlandia non infrequens; e Svecia mecum communicavit D. *Gyllenhal.*

6. CICINDELOIDES *Schaller. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 470.

In Finlandia et Svecia captus; specimen Petropolitanum etiam dedit D. *Faldermann*; ubique tamen raro occurrit.

7. OCULATUS *Götze. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 471.

In Finlandia et Svecia saepius lectus; specimina Svecana a DD. *Gyllenhal* et *Marklin* pluries otinui.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel capta.

Var. c. *mihi. capite thoraceque rugosius punctatis.*

Semel tantum in Finlandia meridionali obvia.

8. TARSALIS *Ljungh. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 472.

Aliquoties captus in Svecia et Finlandia; saepe etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

Var. c. *Gyll.* l. c.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

9. BINOTATUS *Ljungh. Gyll. Ins Svec.* P II. p. 474.

In Finlandia et Svecia rarius; specimen etiam misit D. *Gyllenhal* et alterum sub nomine *St. limbati* communicavit D. *Marklin.*

Var. b. *mihi. Minor, angustior.* an species distincta?

Ad Willnäs bis capta.

10. BIFOVEOLATUS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 500.

Ad Willnäs bis captus; e Svecia a D. *Gyllenhal* quoque missus.

11. BUPHTHALMUS *Schranck. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 475.

In Finlandia et Svecia sat frequens; individua quaedam Svecana communicarunt DD. *Gyllenhal* et *Boheman*.

12. CANALICULATUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 501.

Petropoli, in Finlandia et in Svecia lectus, ubique tamen perrarus. Typum misit D. *Gyllenhal*.

13. NIGER *Dahl. Niger, immaculatus, cinereo-pubescens, subtiliter puuctulatus, thorace breviore ovato, subbifoveolato, abdomine angustius marginato.*

Dej. Cat. p. 25.

Specimen Gallicum D. *Gyllenhal* debeo.

Praecedente brevior, capite thoraceque latioribus, punctura fortiori et thoracis foveolis duabus lateralibus obliquis, obsoletis diversus.

14. NIGRITULUS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 502.

Petropoli et in Finlandia aliquoties captus.

15. GENICULATUS *Dej. Niger, sub-nitidus, grisescens, antennarum basi pedibusque testaceis, geniculis nigris, fronte canaliculata, thorace trifoveolato, abdomine marginato.*

E Gallia meridionali misit Comes *Dejean*.

Magnitudo *St. proboscidei*, sed multo angustior, caput minus dilatatum, oculi minores, et thorax medio transversim trifoveolatus.

16. PROBOSCIDEUS *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 476.

In Finlandia meridionali bis captus; e Svecia a D. *Gyllenhal* communicatus.

17. PALLIPES *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 477.

Ad Willnäs semel tantum obvenit.

18. ARGUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 503.

In Smolandia et Ostrogothia Sveciae aliquot inveni specimina, ad Willnäs in Finlandia unicum tantum.

*

19. FUSCIPES *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 478.

In Svecia et Finlandia rarius obvius; specimina plurima a D. *Gyllenhal* accepi.

20. OPTICUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 504.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

21. CARBONARIUS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 505.

In Finlandia et Svecia sat frequens; etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

22. CIRCULARIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 479.

In Finlandia australi rarius. e Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missus.

Trib. III. OXYTELIDES.

1. BLEDIUS *) *Leach.*

SIAGONA *Kirby.* PROGNATHA *Latr.*

OXYTELUS *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. TRICORNIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 444.

Petropoli anno 1825 sat copiose lectus, specimina duo etiam legi prope urbem Ystad in Svecia.

2. TAURUS *Dej. Germar Fauna Insectorum Europae.* XII. 2.

E Dalmatia misit D. *Parreyss.*

---

*) Characteres generis *Bledii* oculo armato accuratius examinavi:
Labrum transversum, truncatum. Mandibula valida cornea, valde incurva, acuminata, intus dente majori armata. Maxilla cornea, curvata, obtusa, extus emarginata, intus anguste membranacea. Mentum truncatum, ligula lata bisinuata. Palpi maxillares multo longiores, articulo primo obconico, secundo crassiore, etiam obconico, tertio ejusdem longitudinis adhuc latiore ovato, ultimo minutissimo aciculari; labiales articulo primo minuto, secundo elongato subcylindrico, ultimo breviore acuminato. Antennae fractae, extrorsum parum incrassatae, articulo primo longissimo, curvato, clavato, secundo tertio nonnihil longiore. Corpus lineare, cylindricum, capite thoraceque interdum in maribus cornutum. Tibiae integrae; quatuor anteriores compressae extus dense denticulato-pectinatae; posticae inermes, retrorsum arcuatae, dense ciliatae. Tarsi omnes retractiles, distincte triarticulati, articulo ultimo reliquis simul sumtis longiore.

3. **UNICORNIS** *Dej. Germ. Fn. Ins. Eur.* XII. 3.

A D. *Parreyss* e Dalmatia communicatus.

4. **ELONGATUS** *mihi. Elongatus, niger, subnitidus, profunde punctatus, elytrorum macula oblonga rufa, pedibus pallidis, thorace orbiculato, obsolete canaliculato.*

Petropoli in terra argillacea semel captus.

Medius quasi inter *Bl. tricornem* et *fracticornem*, illo parum brevior, sed fere duplo angustior, thorace convexiore mutico et colore praeterea facile dignoscitur.

5. **FRACTICORNIS** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 446.

Petropoli in solo argillaceo cuniculos fodiens sat frequens; ad Willnäs in Finlandia semel captus; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

6. **CASTANEIPENNIS** *Ziegler. Niger nitidus, ore, antennis, elytris, ano pedibusque testaceis, thorace convexiore, obsolete canaliculato.*

Oxytelus castaneipennis Dej. Cat. p. 25.

— *fracticornis Var. b. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 446.

E Svecia misit D. *Gyllenhal*; in Scania ipse legi, sed Petropoli et in Finlandia cum praecedente mihi nunquam obvenit.

Praeter colorem a *Bl. fracticorne* differre videtur, thorace convexiore, minus crebre punctato et obsoletius canaliculato.

7. **ATRICAPILLUS** *Germ. Fn. Ins. Eur.* XI. 4.

Petropoli bis captus.

8. **PALLIPES** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 447.

In littore lacus Waenern Sveciae rarius lectus.

9. **FEMORALIS** *Dej. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 497.

E Svecia benevole communicavit D. *Schönherr.*

10. **TALPA** *Gyll Ins. Svec.* P. II. p. 448.

In littoribus arenosis lacus Waenern ad Kinnekulle Sveciae sat copiose legerunt DD. *Gyllenhal*, *Sahlberg* et *ipse* anno 1822. Etiam e Finlandia misit D. *Sahlberg.*

11. ARENARIUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 448.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 449.

Varietates a. et b. una cum specie praecedente in Svecia copiose lectae.

---

2. PLATYSTETHUS *mihi.*

OXYTELUS *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

Labrum angustum, transversum, truncatum. Mandibulae validae, corneae, incurvae, apice acuminatae; dextra intus bidenticulata; sinistra dente tantum unico armata. Maxillae submembranaceae, elongatae, obtusae. Mentum subquadratum, ligula bifida, intus pectinato-ciliata. Palpi inaequales; maxillares articulo primo brevissimo, secundo elongato clavato, tertio ejusdem longitudinis, subcylindrico, ultimo parvo subulato; labiales brevissimi, articulis aequalibus, 1 *et* 2 *subcylindricis, ultimo acuminato. Antennae subfractae, breves, extrorsum valde incrassatae, articulo primo validiore,* 2 *et* 3 *inter se aequalibus. Corpus breve depressum, capite thoraceque dilatatis. Tibiae omnes denticulato-pectinatae, antice nonnihil curvatae, compressae, apice exteriore excisae. Tarsi omnes retractiles, distincte tri-articulati, articulo ultimo reliquis simul sumtis longiore.*

Mas: *Caput thorace latius;* Femina: *Caput thoracis latitudine.*

A πλατὺς latus, amplus et στῆθος pectus.

1. CORNUTUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 450.

Petropoli in terra argillacea rarissime.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente lecta.

2. MORSITANS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 451.

Petropoli et in Finlandia sat frequens.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente non infrequens; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missa.

3. **NODIFRONS** *mihi.* *Niger nitidus, crebre punctatus, ore pedibusque pallidis, capite non canaliculato, binodulo, thorace obsolete sulcato.*

Oxytelus morsitans Var. c. Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 451.

Petropoli aliquoties captus, e Svecia a D. *Gyllenhal* quoque communicatus. Praecedente fere duplo minor, capite minus dilatato, haud canaliculato, supra antennas evidentius binodulo, thorace etiam, respectu magnitudinis, minore, profundius punctato, obsolete tantum canaliculato.

3. OXYTELUS *) *Grav. Gyll.*

STAPHYLINUS *Linné. Panz.*

1. **CARINATUS** *Panz. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 452.

Petropoli, in Svecia et Germania a me sat copiose lectus, etiam in Finlandia non infrequens. Typum misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 453.

Petropoli saepius capta.

Var. c. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel obvia.

2. **PICEUS** *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 454.

In stercoratis Finlandiae et Sveciae frequentissimus; a D. *Gyllenhal* etiam communicatus.

Var. b. *Elytris fusco-piceis.*

In Finlandia frequens; e Lapponia misit D. *Fellman.*

---

*) Characteres *Oxyteli* oculo armato penitus lustratos proponam:

Labrum subquadratum. Mandibulae corneae, fere rectae, intus bidenticulatae. Maxillae obtusae, membranaceae. Mentum truncatum, ligula lata, emarginata. Palpi maxillares parum longiores, articulo primo minuto, obconico, sequentibus longitudine aequalibus, 2 et 3 obconicis, ultimo subulato; labiales articulis 1 et 2 subcylindricis aequalibus, ultimo parum breviore, acuminato. Antennae longiores, non fractae, extrorsum plerumque parum crassiores, articulo primo validiore, 2-4 parvis nodosis, inter se aequalibus. Corpus elongatum, lineare, depressum. Caput et Thorax semper mutica. Tibiae quatuor anteriores extus nonnihil denticulato-pectinatae, apice externo excisae; posticae inermes rectae, ciliatae. Tarsi vix retractiles, distincte triarticulati, articulo ultimo reliquis simul sumtis longiore.

Mas: *Caput thoracis latitudine vel latius.* Femina: *Caput thorace angustius.*

3. **LONGICORNIS** *mihi. Niger, sub-nitidus, antennarum basi pedibusque pallidis, antennis longis, thorace transverso, lateribus rotundato integerrimo, subrugoso, dorso sulcis tribus subaequalibus.*

Oxytel. piceus Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 455.

Cum praecedente in Finlandia pluries lectus.

Var. b. *mihi. Thorace rufo-piceo.*

E Svecia misit D. *Gyllenhal*; in Finlandia a me ipso capta.

Var. c. *mihi. Elytris testaceis.*

Sub nomine *Ox. picei Var. b.* dedit D. *Gyllenhal*; etiam in Finlandia obvenit.

Ox. piceo simillimus, distinctus autem mihi videtur, antennis dimidio corporis longioribus, extrorsum minus incrassatis, capite angustiore, thorace subrugoso, carinulis elevatis evidenter punctatis, dum in *Ox. piceo* carinulae istae omnino sunt laeves. Nullo modo sexus differentia, exstant enim *Ox. picei* ambo sexus aeque diversi.

4. **SCULPTURATUS** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 456.

Aboae in Finlandia semel captus.

5. **DEPRESSUS** *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 457.

Ad Willnäs rarissime obvius.

6. **AMERICANUS** *Dej. Brevis, piceus, sub-nitidus, antennarum basi, thoracisque angulis anticis rufis, elytris pedibusque lividis, thorace transverso, sulcis quinque impressis.*

Specimen ex America boreali communicavit Comes *Dejean.*

Magnitudo *Ox. depressi*, sed brevior, latior et aliter coloratus.

7. **NITIDULUS** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 458.

Petropoli et in Finlandia sat frequens; e Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missus.

8. **PUSILLUS** *mihi. Ater opacus, subtilissime strigosus, pedibus pallidis, capite inaequali, thoracis dorso sulcis duobus sublinearibus et foveis utrinque impresso.*

In Finlandia ad Willnäs rarius lectus in stercore bovino.

Ox. nitidulo duplo minor, colore opaco, carbonario, e strigis subtilissimis exorto, thorace sulcis binis magis linearibus foveisque utrinque profundius impressis optime dignoscitur.

9. CAELATUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 459.

Ad Willnäs raro obvius; Typum e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll*, l. c.

In Finlandia australi semel capta.

4. TROGOPHLOEUS *mihi.*

OXYTELUS *Grav. Gyll.*

Labrum transversum, truncatum. Mandibulae intus bidentatae. Maxillae membranaceae, obtusae. Palpi maxillares longiores, articulo penultimo globoso, inflato, ultimo minutissimo aciculari; labiales articulis aequalibus, ultimo acuminato. Antennae fractae, articulo primo longiore subcylindrico, sequentibus longitudine aequalibus, obconicis, truncatis, extrorsum paullo latioribus, ultimo majore, ovato. Corpus lineare, depressum. Caput et Thorax mutica. Tibiae tenues, rectae, omnes inermes. dense ciliatae. Tarsi vix retractiles, distincte tri-articulati, articulo ultimo reliquis simul sumtis longiore.

A τρώγω comedo et φλοιὸς cortex.

1. CORTICINUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p 645.

Sub cortice pini sylvestris victitat. Petropoli et in Finlandia aliquoties captus; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* communicatus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel obvia.

Trib. IV. OMALIDES.

1) Phloeocharis *mihi.*

Palpi maxillares articulo penultimo majore, inflato, orbiculato, ultimo minutissimo aciculari. Labrum transversum, apice subrotundatum. Antennae capite cum thorace fere breviores, articulo primo globoso, secundo magnitudine aequali, 3-6 *minutis obconicis,* 7-9 *globosis paullo majoribus lenticularibus,* 10 *et* 11 *triplo majoribus, iterum globosis. Corpus minutum, sublineare. Caput triangulare. Thorax elytris nonnihil latior. Pedes breviusculi. Tarsi quatuor anteriores articulis tribus primis dilatatis, spongiosis; postici simplices.*

A φλοιὸς cortex et χάρις delectatio.

Genus singulare, respectu palporum *Proteino* affine, sed tarsorum structura ab iis revocandum; *Aleocharam* etiam facile credideris.

1. SUBTILISSIMA *mihi. Fusco-picea, pubescens, ore, antennis segmentorumque abdominis marginibus rufo-piceis.*

Sub cortice Pini sylvestris in Finlandia meridionali aliquoties capta.

Aleochara pusilla Grav. minor. Caput nigro-piceum pubescens, ore rufo; Antennae pallide rufae; Oculi nonnihil prominuli nigri. Thorax transversus, subquadrangularis, vel antice et postice truncatus, lateribus nonnihil rotundatis, subtiliter, sed non crebre punctulatus, fusco-piceus, longius griseo-pubescens. Elytra thorace nonnihil angustiora, latitudine parum longiora, punctura et pubescentia ut in thorace. Abdomen elytrorum latitudine, lineare, segmentorum marginibus anoque rufis. Pedes rufo-picei, tarsis luteis.

---

2) Taenosoma *mihi.*

Aleochara *Grav. Gyll.*

Palpi maxillares articulo penultimo dilatato, crasso, ultimo parvo subulato. Antennae articulo primo crassiore, clavato, secundo breviore obconico, 3-8 *minutis, rotundatis,* 9-11 *paullo majoribus etiam sub-orbiculatis. Corpus lineare,* *valde angustum. Thorax capite elytrisque angustior. Tarsorum articulus ultimus, reliquis simul sumtis aequalis.*

A ταίνω extendo et σῶμα corpus.

1. GRACILE *mihi. Nigrum, nitidulum, subtilissime punctulatum, antennarum basi pedibusque pallidis, thorace convexiore, postice profunde bifoveolato.*

Petropoli semel captum.

Sequenti simile et affine, sed differt antennis longioribus, extrorsum crassioribus nigris, colore obscuriore et thorace convexiore, foveis posticis binis longitudinalibus evidentius impressis.

2. PUSILLUM *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 409.

Petropoli saepius lectum.

Obs. anne ad hoc genus etiam pertineat *Oxytelus fuliginosus Grav. Gyll.?*

---

3. OMALIUM *Grav.*

STAPHYLINUS *Payk.*

Sectio 1. Thorace convexo.

1. BOREALE *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 198.

Specimen Lapponicum misit D. *Schönherr.*

2. CONSIMILE *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 199.

Ad Yläne Nygord in Finlandia legit D. *Sahlberg* et mecum benevole communicavit.

3. ROTUNDICOLLE *Sahlb. Ins. Fenn.* p. 281.

E Lapponiae paroecia Utsjock misit D. *Fellman.*

4. PICEUM *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 200.

E Svecia a DD *Gyllenhal* et *Schönherr* missum.

5. ASSIMILE *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 202.

Individua Svecana communicarunt DD. *Gyllenhal* et *Boheman.*

6. INFLATUM *Gyll. Ins. Svec.* P. III. p. 700.

E Smolandia Sveciae misit D. *Boheman.*

7. **PYGMAEUM** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 223.

A D. *Gyllenhal* e Svecia communicatum.

Sectio 2. Thorace depresso.

8. **SIBIRICUM** *mihi. Oblongum, glabrum, nigrum, antennis, thoracis limbo, elytris pedibusque testaceis.*

E Barnaul Sibiriae misit D. *Gebler.*

Om. quadro simillimum, parcius punctulatum, capite thoraceque respectu magnitudinis multo minoribus, et abdomine longiore fere unice diversum.

9. **QUADRUM** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 461.

In Lapponia a D. *Fellman* lectum et mihi benevole missum.

10. **FIMETARIUM** *Eschscholtz. Rufo-piceum, nitidum, crebre punctatum, antennarum basi, thoracis elytrorumque limbo pedibusque pallidioribus, thorace transverso canaliculato, elytris substriatis, abdomen fere totum obtegentibus.*

Mas: *Elytris truncatis.*

Femina: *Elytris apice interiore sinuato-acuminatis.*

Habitat in stercore in insula Sitcha Americae borealis D. *Eschscholtz*, cujus benevolentiae specimina in Museo meo conservata debeo.

Om. tecto majus, fortius punctatum, thorace breviore canaliculato, elytrisque longioribus substriatis, in femina sinuatis, diversum.

11. **TECTUM** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 202.

In Finlandiae fungis tempore autumnali saepius lectum; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missum.

12. **RANUNCULI** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 204.

In floribus Calthae et Ranunculorum Finlandiae et Sveciae sat frequens.

13. **LAPPONICUM** *mihi. Nigrum obscurum, subtilissime punctatum, antennarum basi, thoracis lateribus, elytris pedibusque pallidis, thorace convexo.*

E Lapponiae paroecia Utsjock misit D. *Fellman.*

Praecedente duplo minus, subtilius punctulatum, thorace convexo, posterius minus angustato et elytris brevioribus facile distinguendum.

14. OPHTHALMICUM *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 205.

Specimina plurima e Svecia communicavit D. *Gyllenhal*, mihi nunquam obvium.

15. SORBI *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 206.

Individuum in Westrogothia captum dedit D. *Schönherr.*

16. DEPRESSUM *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 210. *)

In stercore bovino Finlandiae saepius lectum; typum e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

4. ANTHOBIUM *Leach.*

OMALIUM *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

Sectio I. Thorace depresso, vel deplanato.

1. RIVULARE *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 214.

Petropoli et in Finlandia saepius legitur. E Svecia communicarunt DD. *Gyllenhal* et *Haeffner.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente rarius.

2. CAESUM *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 215.

Petropoli et in Finlandiae floribus minus frequens; Specimen Svecanum etiam misit D. *Gyllenhal.*

3. OXYACANTHAE *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 217.

Ad Willnäs semel captum.

4. EXIGUUM *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 218.

In Finlandia australi rarissime obvium.

5. PUSILLUM *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 220.

In Finlandia saepius lectum; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missum.

---

*) Tarsorum articulus ultimus antecedente tantum duplo longior. Thoracis forma etiam a ceteris *Omaliis* recedit. An igitur peculiare constituere liceat genus?

6. **PLANUM** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 221.

Aliquoties obvenit in Finlandia; specimina Svecana a D. *Gyllenhal* communicata in Museo meo etiam conservantur.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente in Finlandia capta.

Sectio 2. Thorace subconvexo.

7. **VIBURNI** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 224.

Petropoli et in Finlandiae floribus non infrequens; typum e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

8. **FLORALE** *Panz. Grav. Micr.* p. 118.

Petropoli rarius obvium.

9. **NIGRUM** *Grav. Monogr.* p. 212.

Ad Willnäs in Finlandia semel lectum.

10. **GYLLENHALII** *Sahlb. Ins. Fenn.* p. 286.

Specimen in Finlandia captum amicissimo D. *Sahlberg* debeo.

11. **SALICIS** *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 226.

Individuum unicum ad Willnäs captum.

12. **SALICINUM** *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 467.

Petropoli aliquoties obvenit; specimen unicum etiam inveni ad Willnäs et alterum in Ostrogothia Sveciae.

13. **BRUNNEUM** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 227.

In Finlandia australi a DD. *Sahlberg* et *Bonsdorff* lectum et benevole communicatum, e Svecia etiam misit D. *Schönherr.*

14. **DEPLANATUM** *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 222.

Petropoli et in Finlandia Sveciaque saepius captum; etiam a D. *Gyllenhal* communicatum.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente minus frequens.

Var. c. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel lecta.

15. STRIATUM *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 231.

E Smolandia Svecia misit D. *Boheman.*

5. ACIDOTA *Kirby.*

OMALIUM *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Fabr.*

1. RUFA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 228.

Specimen prope Aboam captum dedit D. *Achilles Pippingsköld.*

2. CRUENTATA *mihi. Rufo-testaceum subnitidum, depressum, profunde punctatum, thorace transverso, utrinque impresso, elytris punctato-striatis.*

Petropoli a D. *Faldermann* captum et mecum benevole communicatum.

Praecedente dimidio minus, magis depressum, minus nitidum, thorace breviore, in ipso margine utrinque impresso, elytrisque distinctius punctato-striatis ab illo facillime removendus.

3. CRENATA *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 230.

Petropoli legit D. *Hummel* et mihi amicissime dedit specimen; alterum in Museo conservatum a D. *Gyllenhal* e Svecia obtinui; in Finlandia etiam a me semel captum.

6. LESTEVA *Latr.*

ANTHOPHAGUS *Knoch, Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Linné, Fabr. Payk.*

1. DICHROA *Illig. Grav. Micr.* p. 188.

Specimina e Germania communicarunt Comes *Dejean* et D. *Sturm.*

2. TESTACEA *Grav. Micr.* p. 121.

Antoph. caraboides Var. c. Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 192.

In Finlandia australi interdum obvenit.

3. CARABOIDES *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 192.

In Finlandia sat frequens.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Var. d. *Gyll.* l. c.

Var. e. *Gyll.* l. c.

Omnes hae varietates in Finlandia et Svecia leguntur.

4. ANGUSTICOLLIS *mihi.* *Rufo-testacea, glabra, subtilius punctata, capite abdominisque postico nigro-piceis, thorace angustiore.*

In arbustis circa Petropolin non infrequens.

Praecedente simillimus, punctura subtiliore et thorace breviore, angustiore diversa.

5. LAPPONICA *mihi. Sahlb. Ins. Svec.* p 275.

E Lapponiae paroecia Utsjock misit D. *Fellman.*

6. ALPINA *Fabr Gyll Ins. Svec.* P. II. p. 194.

Ad Willnäs in Finlandia rarius capta. E Lapponia a D. *Kohlström* et e Smolandia Sveciae a D. *Boheman* communicata.

Var. b. *Gyll.* l. c.

In Finlandia cum praecedente semel lecta.

7. PLAGIATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 195.

In Finlandia ad Willnäs, in littore arenoso maris, et ad lacum Saima, ut etiam ad lacum Waenern in Svecia capta.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Una cum Var. a. lecta.

8. GLOBULICOLLIS *mihi.* *Nigra subnitida, pubescens, thorace cordato, pulvinato, antennarum basi pedibusque rufis, fronte bi-impressa.*

Sub lapidibus ad littora lacus Saima in Finlandia orientali semel obvia.

Praecedentis Var. b. simillima; paullo major, fortius punctata, thorace capite multo latiore globoso, fere pulvinato, medio obsolete canaliculato, et fronte canaliculis duabus exaratis distincta.

9. LONGIPES *mihi.* *Nigro-fusca, pubescens, antennarum basi pedibusque pallidis, thorace longiore, cordato, antennis pedibusque elongatis, fronte impressa.*

Ad littora lacus Wettern in Svecia ad Holkaberg Ostrogothiae anno 1822. lecta.

Media quasi inter *Lest. plagiatam* et *obscuram.* Illius magnitudine et hujus colore, ab utroque tamen antennis longis crassis, pedibus elongatis et elytris multo brevioribus, optime dignoscitur.

10. OBSCURA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 196.

In Finlandia ad Willnäs rarius, e Svecia a D. *Boheman* communicata.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel capta.

11. LONGULA *mihi.* *Nigro-fusca, densius pubescens, subtilius creberrime punctulata, antennis, elytris pedibusque testaceis, thorace latiore, cordato, elytris longioribus, fronte bifoveolata.*

Ad Willnäs rarissime occurit.

Praecedenti similis; subtilius et crebrius punctulata, thorace latiore, elytrisque thorace triplo longioribus, dum in *Lest. obscura* elytra thorace vix duplo longiora; quare ut species diversa consideranda.

12. PUBESCENS *mihi.* *Nigro-fusca, subtilissime punctulata, densius pubescens, antennis pedibusque rufis, thorace cordato, trifoveolato, fronte bifoveolata.*

Ad littora lacus Wettern Sveciae una cum *Lest. longipede* lecta.

Praecedente minor, adhuc densius pubescens, subtilius punctulata, pedibus longioribus et thorace magis cordato, foveolis tribus, in medio 2 et 1 positis, distinguenda.

7. PROTEINUS *Latr.*

OMALIUM *Gyll.* DERMESTES *Fabr.*

1. BRACHYPTERUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 207.

In Finlandiae fungis arboreis sat frequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

2. MINUTUS *mihi.* *Niger, nitidissimus, antennarum basi, thoracis limbo, elytris pedibusque rufo-ferrugineis.*

In Boleto suaveolente ad Willnäs semel captus.

Praecedente plus quam duplo minor, convexior, nitidissimus et aliter coloratus.

8. MICROPEPLUS *Latr.*

OMALIUM *Gyll.* NITIDULA *Marsham.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. PORCATUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 211.

E Svecia misit D. *Gyllenhal*, e Gallia D. *Chevrolat.*

2. STAPHYLINOIDES *Marsham. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 213.

Ad Yläne Nygord in Finlandia legit D. *Sahlberg* et mecum benevole communicavit.

Trib. V. TACHINIDES.

1. HYPOCYPHTUS *Schüppel.*

CYPHA *) *Kirby.* TACHYPORUS *Grav.* SCAPHIDIUM *Payk. Gyll.*

1. LONGICORNIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. I. p. 191.

Tachyporus granulum? Grav. Monogr. p. 3.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

2. LAEVIUSCULUS *mihi.* *Niger, nitidus, laevis, antennis pedibusque concoloribus.*

Scaphidium longicorne Var. b.? Gyll. Ins. Svec. P. I. p. 191.

In Finlandia semel captus.

Praecedente minor, nitidior, antennis brevioribus, thorace convexiore, angustius marginato, ut et colore antennarum et pedum diversus.

---

*) Denominatio D. *Schüppeli* eligenda; exstat enim jam inter Curculionites genus *Cyphus* Schönherr. Dispositio methodica p. 107.

2. TACHYPORUS *Knoch, Grav. Gyll.*

OXYPORUS *Fabr.* STAPHYLINUS *Linné, Oliv.*

Sectio 1. Thorace elytrisque glabris.

1. SAGINATUS *Grav. Monogr.* p. 6.

Petropoli a D. *Hummel* captus et mecum benevole communicatus.

2. CHRYSOMELINUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 236.

In Finlandia et Svecia sat frequens, etiam a D. *Gyllenhal* missus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel capta.

3. MARGINATUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 237.

Petropoli, in Finlandia Sveciaque saepius obvius; typum communicavit D. *Gyllenhal.*

4. ABDOMINALIS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 238.

In Finlandia australi aliquoties lectus.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 239.

Cum praecedente rarior; e Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

5. NIGRICEPS *mihi. Latus, subconvexus, pallidus, capite nigro, impresso, ano infuscato.*

Ad Willnäs semel captus.

Tach. abdominali duplo minor, capite nigro, postice transversim profundius impresso, et thorace elytris parum latiore diversus.

6. OBTUSUS *Linné.*

Tachyp. analis Fabr. Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 239.

In Svecia et Finlandia pluries obvius; typum misit D. *Gyllenhal.*

7. RUFICOLLIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 240.

Ad Willnäs semel obvenit.

Var. b. *Gyll.* l. c.

E Svecia misit D. *Gyllenhal*; Petropoli et in Finlandia rarissime obvia.

8. PUSILLUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 241.

In Ostrogothia Sveciae semel lectus; etiam a D. *Gyllenhal* communicatus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Sub lapidibus ad Willnäs pluries capta.

9. NITIDULUS *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 242.

Ad Willnäs semel tantum mihi occurrit.

Sectio 2. Capite thoraceque pubescentibus.

10. PUBESCENS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 243.

In Finlandia sub cortice arborum emortuarum sat frequens; Petropoli rarior; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente non infrequens.

11. CELLARIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 244.

Petropoli et in Finlandia saepius lectus; Specimina Svecana misit D. *Gyllenhal.*

12. BIPUNCTATUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. III. 702.

Individuum in Westrogothia Sveciae captum a D. *Schönherr* benevole communicatum.

13. PEDICULARIUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 246.

Ad Willnäs rarius; e Svecia a D. *Gyllenhal* etiam missus.

3. TACHINUS *Grav. Gyll.*

OXYPORUS *Fabr.* STAPHYLINUS *Linné.*

1. FIMBRIATUS *Knoch. Grav. Micr.* p. 191.

Specimen in America boreali, captum dedit D. *Faldermann.*

2. SUBTERRANEUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 252.

In Finlandia meridionali semel captus; e Svecia communicarunt DD. *Gyllenhal*, *Boheman* et *Haeffner.*

3. **BIPUSTULATUS** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 254.

Hujus speciei perrari specimine, in Smolandia Sveciae capto, Museum meum ditavit D. *Boheman.*

4. **HUMERALIS** *Schneider. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 256.

In stercoratis Finlandiae passim.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 257.

Cum praecedente frequentior; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missa.

Var. c. *mihi. Elytris rufis immaculatis.*

Ibidem parcius lecta.

5. **LATICOLLIS** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 471.

Ad Willnäs raro obvius.

Var. b. *mihi. Pallidus, antennis extrorsum, oculisque tantum nigris.*

Cum praecedente semel capta.

6. **DUBIUS** *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 258.

Ad Willnäs rarissime obvenit.

7. **RUFIPES** *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 260.

E Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 261.

In Finlandia rarius; etiam a D. *Gyllenhal* communicata.

Var. c. *Gyll.* l. c.

In Finlandiae stercore equino non infrequens.

Var. d. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente minus frequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. e. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs aliquoties capta.

8. **PULLUS** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 262.

In Finlandiae stercoratis non infrequens; typum a Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

9. INTERMEDIUS *mihi. Nigro-piceus nitidus, thorace subtiliter punctulato, antennarum basi, thoracis limbo elytrorumque margine et macula humerali pedibusque rufo-testaceis.*

In stercore equino aliquoties ad Willnäs captus.

Var. b. *mihi. Elytrorum macula humerali deficiente.*

Cum Var. a. rarior.

Sequenti affinis, thorace autem paullo latiore, convexiore, antennis basi testaceis et punctura paullo evidentiore distinctus.

10. FIMETARIUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 263.

In Ostrogothia Sveciae copiose lectus, in Finlandia minus frequens; typus a D. *Gyllenhal* communicatus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente rarior.

11. MARGINELLUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 265.

In quisquiliis et stercoratis Finlandiae frequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente saepe lecta.

12. COLLARIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 266.

In Finlandia minus frequens; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

E Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

13. SILPHOIDES *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 267.

Specimen in Svecia lectum dedit D. *Gyllenhal.*

4. MYCETOPORUS *mihi.*

TACHYPORUS *Gyll.* TACHINUS *Grav. Monogr.*

Partes oris ut in Tachyporo. Antennae, articulo primo magno, elongato, obconico, 2 brevi nodoso, 3 iterum longo, obconico, basi tenui, sequentibus bre-

vioribus, sensim crassioribus, apice truncatis, ultimo ovato obtuso. Corpus laeve, nitidum, plerisque elongatum, utrinque, sed praesertim anterius, attenuatum. Elytra striis tribus punctatis. Pedes spinulosi. Tarsorum articulus primus longior.

A μύκης, ητος fungus et πορέω percurro, penetro.

1. LEPIDUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 247.

Petropoli et in Svecia pluries captus; etiam a D. *Gyllenhal* missus.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 248.

Petropoli non infrequens, in Finlandia australi rarius.

2. SPLENDIDUS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 249.

Ad Willnäs semel captus.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Petropoli unicum tantum inveni individuum.

3. PALLIDULUS *mihi. Elongatus, pallide testaceus, vertice, antennarum basi, pectore abdomineque infuscatis, elytris obsolete striatis.*

In Finlandia australi aliquoties lectus, etiam in Ostrogothia Sveciae semel obvius.

Praecedentis Var. b. similis, sed minor, angustior, elytrorum striis vix conspicuis et articulo antennarum ultimo breviore, unde diversus mihi videtur.

4. LONGULUS *mihi. Elongatus, niger, nitidus, laevissimus, antennis, pedibus, abdominis segmentorum marginibus anoque testaceis, elytris rufo-castaneis, regione scutelli, margine et apice exteriore nigrescentibus.*

Ad Willnäs locis umbrosis rarissime obvenit.

Var. b. *Elytrorum macula apicis deficiente.*

Cum praecedente lecta.

Bolitobio striato similis, sed multo angustior et palpi omnino hujus generis.

5. PUNCTUS *Grav. Ins. Svec.* P. II. p. 250.

In Finlandia ad Willnäs semel captus; etiam e Lapponiae paroecia Utsjock misit D. *Fellman.*

Var. b. *mihi* *Elytris nigris, margine postico rufo.*

E Lapponia a D. *Fellman* communicatus.

---

5. BOLITOBIUS *Leach.*

TACHINUS *Grav. Gyll.* OXYPORUS *Fabr.* STAPHYLINUS *Linné, Payk. Oliv.*

1. FORMOSUS *Knoch. Grav. Monogr.* p. 32.

Specimen unicum ad Willnäs in Finlandia captum, alterum Petropoli lectum amicissime mihi dedit D. *Hummel.*

2. CINGULATUS *mihi.* *Niger, nitidus, antennarum basi apiceque, elytris, pedibus abdominisque cingulo postico rufis.*

Ad Willnäs semel obvius.

Sequente fere duplo major, antennis longioribus, articulo ultimo adhuc majore, oblongo-ovato, thorace convexiore, abdominisque segmento penultimo toto et antepenultimo dimidatio rufis, ultimo vero omnino nigro.

3. ANALIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 269.

Duo specimina e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

4. CERNUUS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 271.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

5. STRIATUS *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 272.

Ad Willnäs semel captus.

6. LUNULATUS *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 274.

Unicum ad Willnäs cepi individuum.

7. ATRICAPILLUS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 273.

In fungis Finlandiae ubique frequens.

8. PULCHELLUS *mihi.* *Rufo-testaceus, nitidus, capite, antennarum medio, pectore, elytrorum fascia postica, anoque nigris.*

Ad Kackarais prope Aboam in Finlandia legit D. *Arnell*, qui hoc et multa alia a se lecta magni pretii insecta summa benevolentia mecum communicavit.

Praecedenti similis, paullo tamen angustior et aliter coloratus. *Bol. lunulato* etiam affinis, sed quadruplo minor, nitidior et respectu magnitudinis angustior, antennarum articulo ultimo longiore toto pallido.

9. TRIMACULATUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 275.

Specimina ad Yläne Nygord in Finlandia capta dedit D. *Sahlberg.*

10. PYGMAEUS *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 277.

In fungis Finlandiae et Sveciae frequentissimus; typum misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll* l. c.

Semel capta in Finlandia.

Var. c. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente frequentior.

Trib. VI. ALEOCHARIDES.

1. DINARDA *Leach.*

LOMECHUSA *Grav. Gyll.*

1. DENTATA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 441.

E Svecia a DD. *Gyllenhal* et *Boheman* missa.

2. LOMECHUSA *Grav. Gyll.*

STAPHYLINUS *Fabr. Payk.*

1. STRUMOSA *Fabr. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 437.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

2. PARADOXA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 438.

Unicum in Museo meo exstans specimen benevole dedit D. *Gyllenhal.*

3. EMARGINATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 440.

A D. *Boheman* e Smolandia Sveciae communicata.

3. GYMNUSA *Karsten.*

ALEOCHARA *Knoch, Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. **BREVICOLLIS** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 425.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.* Petropoli etiam olim a me capta et D. *Hummel* communicata.

2. **DUBIA** *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 426.

Specimen in Smolandia captum D. *Boheman* debeo.

4. ALEOCHARA *Knoch, Grav. Gyll. Leach.*

LOMECHUSA *Latr.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. **FUSCIPES** *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 428.

E Svecia communicarunt DD. *Gyllenhal* et *Boheman.*

2. **TRISTIS** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 430.

In Finlandia et Svecia raro obvia.

3. **BIPUNCTATA** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 430.

In Finlandia sat frequens, in Svecia semel tantum mihi obvenit.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 493.

Cum praecedente minus frequens.

4. **INTRICATA** *mihi. Nigra nitida, sub-pubescens, punctulata, elytris longitudinaliter rugoso-intricatis, macula triangulari apicis rufa, ano rufescenti, antennis brevibus, medio sub-crassioribus.*

Ad Willnäs in Finlandia semel capta.

Praecedentis Var. b. simillima, sed thorax paullo major, adhuc convexior, subpubescens et elytra profunde longitudinaliter rugosa, rugis hinc inde confluentibus.

5. **CARNIVORA** *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 431.

In Finlandia semel lecta; e Svecia a D. *Gyllenhal* communicata.

6. **MOERENS** *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 493.

Ad Willnäs aliquoties capta.

7. HAEMORRHOIDALIS *mihi*. *Longiuscula, linearis, nigra, subtilissime punctata, fusco-pubescens, antennis longioribus, extrorsum crassioribus, his basi, pedibus anoque rufis.*

In Finlandia australi rarius obvia.

Magnitudo fere praecedentis; statura autem multo angustior, magis linearis. Differt praeterea antennis longioribus, thorace elytris angustiore, anterius magis attenuato, punctura evidentiore, elytris haud rugosis et pubescentia thoracis elytrorumque multo longiore et densiore. *Al. brevipenni* statura elongata etiam similis, sed elytris multo longioribus mox distinguenda.

8. LANUGINOSA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 432.

In Finlandiae stercoratis non infrequens; etiam in Svecia olim capta; typum misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *mihi. Elytrorum apice concolore.*

In Finlandia frequentior.

Var. c. *mihi. Ut Var. a. et b. sed duplo minor.*

Cum praecedentibus minus frequens.

9. VILLOSA *mihi. Nigra, opaca, creberrime punctata, antennis longioribus, basi pedibusque piceis, hirsutie brevi fusca undique obtecta.*

Petropoli in locis suffocatis non infrequens; in Finlandia rarius occurrit.

Praecedenti simillima, notis constantibus distincta autem mihi videtur, corpore angustiore, magis lineari, antennis thorace multo longioribus, basi piceis, thorace elytris fere angustiore, elytris nunquam margine apicali rufo, pubescentia breviore fusca, ut et colore totius corporis magis opaco.

10. FUMATA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 434.

In Finlandiae stercoratis sat frequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

In Finlandia et Svecia non infrequens.

Var. c. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente aliquoties capta.

11. LAEVIGATA *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 433.

Ad Aboam in Finlandia semel obvia.

12. BREVIPENNIS *Grav. Monogr.* p. 169.

Petropoli a D. *Hummel* lecta et mecum benevole communicata.

13. PULLA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 494.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

14. NITIDA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 435

Ad Willnäs raro occurrit.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Cum praecedente.

15. BILINEATA *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 436.

In Kinnekulle Sveciae et in Finlandia ad Willnäs lecta, rarissime obvia.

16. MORION *Grav Micr.* p. 97.

Ad Willnäs semel capta; specimina Petropolitana dedit D. *Hummel.*

17. EXIGUA *mihi. Nigra, opaca, parce pubescens, creberrime punctulata, antennis capite cum thorace fere longioribus, pedibus ferrugineis.*

In Finlandia ad Willnäs rarissima.

Magnitudo et fere statura praecedentis, vel adhuc minor, corpore magis pubescente, pedibus pallidioribus et imprimis antennis longioribus distincta.

---

5. SPHENOMA *mihi.*

***Palpi** maxillares, articulo penultimo clavato, ultimo subulato, retracto. **Antennae** capite cum thorace vix longiores, fractae, extrorsum parum crassiores, articulis omnibus longitudine aequalibus, excepto tantum ultimo, oblongo-ovato, subacuminato. **Corpus** elongatum, teretiusculum. **Caput** sub thorace inflexum et thorace multo angustius. **Thorax** convexus, antice subtruncatus, lateribus rotundatis, deflexis. **Elytra** thorace angustiora, intra angulum apicis exterioris pro-*

funde emarginata. Abdomen reliquo corpore fere duplo longius. ***Pedes** mediocres; tarsi gracillimi, articulis aequalibus.*

A σφήνωμα, Corpus cuneiforme.

1. ABDOMINALE *mihi. Lineari-elongatum, rufo-testaceum, nitidum, abdomine nigropiceo, thorace convexo, aequali, antice subtruncato.*

Var. b. *mihi. Capite infuscato.*

Habitat in Finlandiae et Sveciae fungis minus frequens.

Statura lineari teretiuscula *Mycetoporis* quodammodo affine, *Myc. pallidulo* paullo minus. Caput rufo-ferrugineum, subtilissime punctulatum, tenue pubescens; oculi minuti nigri. Antennae rufo-ferrugineae, medio interdum infuscatae. Thorax latitudine fere longior, supra gibbus, rufo-ferrugineus, omnium subtilissime punctulatus, tenue pubescens. Elytra latitudine baseos parum longiora, rufo-ferruginea, subtilissime punctulata, tenue pubescentia. Abdomen sub-lineare, nigro-piceum, pubescens, segmentorum marginibus anoque interdum rufis. Pedes pallidi.

---

6. OXYPODA *mihi*

ALEOCHARA *Grav. Gyll.*

***Palpi** maxillares ut in Sphenoma.* ***Antennae** fractae, extrorsum plus minusve crassiores, articulo secundo tertio parum minore.* ***Corpus** posterius attenuatum.* ***Caput** plerisque subretractum.* ***Thorax** brevis convexus, lateribus rotundatis deflexis, antice angustior.* ***Elytra** thorace non angustiora, at longiora, intra angulum apicis exterioris excisa.* ***Abdomen** plerumque sub-conicum.* ***Pedes** plerisque elongati, tenues.* ***Tarsi** graciles, articulo primo insequente nonnihil longiore.*

Ab ὀξὺς i. a. ὠκὺς celer et πούς, ποδὸς pes.

1. RUFICORNIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 422.

Ad Willnäs semel tantum capta.

2. LIVIDIPENNIS *mihi. Fusca, sericeo-pubescens, antennarum basi, pedibus, segmentorum marginibus, ano elytrisque testaceis, his quadratis, circa scutellum infuscatis, thorace vix foveolato, pedibus mediocribus.*

In Finlandiae fungis pluries lecta.

Praecedenti similis, sed differt constanter magnitudine fere triplo minore, thorace vix foveolato, elytris latitudine haud longioribus, circa scutellum semper infuscatis, pedibusque mediocribus; ut species diversa ideoque consideranda.

3. MELANARIA *mihi. Nigra nitida, sub-pubescens, creberrime punctata, elytris pedibusque fusco-testaceis, thorace foveola postica obsoleta impresso.*

Habitat ad Willnäs minus frequens.

Magnitudo et statura praecedentis, sed convexior, nitidior, levius punctata, antennis longioribus, tenuioribus et colore diversa.

4. OPACA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p 423.

In Finlandiae meridionalis fungis sat frequens; Petropoli rarior; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

In Finlandia frequenter obvia.

5. UMBRATA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p 424.

Ad Willnäs rarius.

6. PELLUCIDA *mihi. Piceo-ferruginea, antennis extrorsum abdomineque obscurioribus, thoracis lateribus testaceo-pellucidis, elytrorum angulo exteriore apicis infuscato.*

In fungis ad Willnäs aliquoties capta.

Ox. opacae affinis, sed brevior, latior, caput magis prominulum, pedes postici minus elongati, abdomen perparum attenuatum, nec non color alius.

7. LATERALIS *mihi. Nigra, punctulata, pubescens, antennarum longiorum basi, thoracis lateribus, humeris elytrorum pedibusque rufo-testaceis.*

Habitat in Finlandiae fungis rarius.

Praecedenti simillima; differt autem statura angustiore. antennis thorace cum capite longioribus, pubescentia densiore, elytris obscurioribus, extus evidentius excisis, ano nunquam rufo. *Ox. opacae* etiam affinis, sed caput majus prominulum, pedes postici minus elongati, abdomen perparum tantum attenuatum, etc.

8. ALTERNANS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 419.

In Finlandiae fungis non infrequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

9. PROCERULA *mihi*. *Elongata, fusco-picea, sericeo-pubescens, abdomine nigro, pedibus pallidis, thorace postice rotundato, antennis longis, extrorsum crassioribus.*

Ad Willnäs bis capta.

Praecedente longior, magis linearis, subtilius punctata, sericeo-pubescens; differt praeterea antennis longis, crassis, articulis extrorsum majoribus, ultimo multo majore oblongo-ovato, thorace valde convexo, elytris longioribus, thorace angustioribus et abdomine versus anum vix attenuato.

Obs. A ceteris hujus generis quodammodo recedit, an peculiare constituere possit genus, *Sphenomis* affine?

10. SERICATA *mihi*. *Fusca, opaca, subtiliter punctulata, sericeo-pubescens, antennarum basi, pedibus anoque pallidioribus.*

Petropoli bis capta.

Ox. umbrata quodammodo similis, magnitudine duplo minore, capite vix occulto, antennis longioribus, punctura subtiliore, pubescentia densiore ut et colore diversa.

11. CINGULATA *mihi*. *Livido-testacea, subtilissime punctata, griseo-pubescens, capite abdominisque cingulo nigris, thorace basi foveolato.*

Habitat Petropoli rarius.

Praecedenti iterum statura et magnitudine fere aequalis; antennae vero breviores, articulo ultimo magis globoso, thorax antice angustior, postice foveolatus, et color diversus.

12. OBFUSCATA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 418.

Ad Willnäs semel tantum lecta.

7. MICROCERA *mihi.*

Palpi maxillares elongati, articulo penultimo magno, oblongo-ovato, ultimo tenui, aciculari, exserto. Antennae breves, fractae, articulo primo longiore, subcylindrico, secundo magno globoso, 3-6 minutis subglobosis, 7-10 sensim crassioribus, transversis, cum ultimo magno, rotundato-globoso, clavam formantibus. Corpus anterius attenuatum, postice latius, ano truncato. Caput deflexum. Thorax brevis, valde convexus, elytris multo angustior, lateribus et postice rotundatus. Elytra convexa, pulvinata. Pedes mediocres; tarsorum articulus primus subsequente paullo longior.

A μικρὸς parvus et κέρας cornu.

1. INFLATA *mihi. Fusco-picea, subtilissime punctulata, tenue pubescens, abdomine obscuriore, antennarum basi pedibusque pallidis.*

Petropoli semel capta.

8. OLIGOTA *mihi.*

ALEOCHARA *Grav Gyll.*

Palpi maxillares, articulo penultimo, crassiore, globoso, ultimo minuto acicular. Antennae capite cum thorace fere longiores, sub-fractae, articulo primo longo, crasso, cylindrico, secundo adhuc crassiore globoso, 3-6 minutissimis, globosis, reliquis abrupte crassioribus, latis compressis, cum ultimo maximo rotundato clavam formantibus. Corpus sublineare, depressum. Caput sub thorace haud occultum, thorace angustius. Thorax brevis, transversus, sub-convexus. Pedes breves; tarsorum articuli sub-aequales.

Ab Ὀλιγότης, exiguitas, parvitas.

1. PUSILLIMA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 491.

E Smolandia Sveciae misit D. *Boheman.*

9. TRICHOPHYA *mihi.*

ALEOCHARA *Gyll.*

Palpi maxillares articulo ultimo praecedentibus haud angustiore, extrorsum acuminato. Antennae, articulo primo, magno, crasso, clavato, secundo aeque crasso, sed breviore subgloboso, sequentibus tenuissimis, longitudine aequalibus, pilis longis verticillatis instructis. Corpus subdepressum. Caput rotundatum, haud occultum. Thorax brevis, transversus, tenue marginatus, lateribus et postice rotundatus. Pedes longiores, tarsorum articulis sub-aequalibus.

A *ϑρὶξ, τριχὸς* capillus, pilus et *φύω* produco.

1. PILICORNIS *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 417.

Specimen hujus insecti rarissimi Petropoli a D. *Hummel* captum in Museo meo conservatur.

10. HOMALOTA *mihi.*

ALEOCHARA *Gyll.*

Palpi maxillares articulo penultimo conico, ultimo minutissimo aciculari. Antennae breves, moniliformes, fractae, articulo primo majore, subclavato, secundo parum breviore, globoso, 3-10 sensim paullo majoribus, extrorsum parum incrassatis, subglobosis, ultimo majore ovato. Corpus lineare, valde deplanatum. Thorax elytris parum angustior, basi apiceque sub-truncatus, lateribus rotundatis. Pedes breviusculi; tarsorum articulus ultimus reliquis simul sumtis fere aequalis.

Ab *ʽΟμαλὸτης* planities.

1. PLANA *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 402.

In Finlandia australi aliquoties capta.

Obs. Tarsorum structura et corpore deplanato *Omaliis* quidem affinis, sed antennarum insertione ad *Aleocharides* referenda.

11. GYROPHAENA *mihi.*

ALEOCHARA *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

***Palpi** maxillares brevissimi, articulo penultimo obconico, ultimo parvo extrorsum acuminato. **Antennae** thorace longiores, articulo primo elongato clavato, secundo breviore, obconico,* 3 *et* 4 *brevissimis, minutis,* 5 - 10 *brevibus, transversis, crassis, apice truncatis, longitudine aequalibus, ultimo majore ovato. **Corpus** breve, depressum, insecto terrefacto in globum revolutum. **Thorax** brevissimus, transversus, lateribus et postice rotundatus, margine baseos reflexo. **Pedes** mediocres, tarsorum articuli aequales.*

A *γυρὸς* recurvus, reflexus et *φαίνομαι* videor.

1. NITIDULA *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 413.

E Smolandia Sveciae misit D. *Boheman.*

2. NANA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 414.

Habitat in fungis frequentissima in Finlandia et Svecia; typum communicavit D. *Gyllenhal.*

3. AFFINIS *mihi. Brevis, pallide testacea, capite nigro, elytrorum angulo exteriore apicis cinguloque postico abdominis nigro-fusco, thorace angustiore, punctis plurimis impressis.*

Aleochara nana Var. b.? Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 414.

Cum priore in Finlandia saepius capta.

Praecedente paullo minor, capite thoraceque angustioribus, thoracis seriebus dorsalibus profunde punctatis, punctis plurimis praeterea interjectis nec non colore diversa.

4. POLITA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P II. p 415.

Insectum rarissimum, in Finlandia meridionali bis tantum captum.

12. **Bolitochara** *mihi.*

Aleochara *Knoch, Grav. Gyll.* Staphylinus *Linné, Payk.*

Palpi maxillares elongati, articulo penultimo, longo subclavato, ultimo tenuissimo, subulato; labiales brevissimi, articulis longitudine fere aequalibus, ultimo tenuissimo aciculari. Antennae fractae, articulo baseos longiore, clavato, secundo tertio paullo breviore, reliquis extrorsum latitudine sensim incrassatis, apice truncatis, ultimo plerumque oblongo-ovato. Corpus subdepressum, posterius plerisque sub-lineare. Thorax capite latior, lateribus rotundatus. Tarsorum articulus primus subsequente longior; reliqui longitudine aequales.

A βὸλιτον, βόλιτος stercus, quisquiliae et χάρω χαίρω, delector.

Sectio 1. Thorace subquadrato, vel longitudine vix vel parum latiore; abdomine lineari.

Subdiviso 1. Thorace convexiore.

1. COLLARIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 385.

Specimina ad Yläne Nygord in Finlandia capta communicavit D. *Sahlberg*; etiam e Westrogothia Sveciae a D. *Schönherr* missa.

2. LUNULATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 386.

In Finlandiae et Sveciae fungis sat frequens; typum dedit D. *Gyllenhal.*

3. PROLIXA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 484.

In Scania semel capta.

4. CARBONARIA *mihi. Atra, sub-nitida, griseo-pubescens, thorace rotundato, postice foveolato, pedibus elongatis.*

Ad Willnäs in Finlandia australi semel capta.

Partium formatio omnino hujus sectionis, sed *Bolit. atrae* quodammodo similis, a qua autem thorace breviore, suborbiculato mox distinguenda.

5. CIRCELLARIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 387.

In Finlandia et Svecia aliquoties obvia.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 485.

Cum praecedente rarior; e Svecia communicavit D. *Gyllenhal.*

6. INGUINALIS *mihi*. *Fusco-ferruginea, sub-nitida, capite abdomineque obscurioribus, antennis brevioribus, extrorsum incrassatis, thorace longiore, trifoveolato.*

Ad Willnäs in Finlandia australi semel capta.

Praecedenti simillima; thorace longiore foveola ante scutellum et duabus longitudinalibus impresso, antennis brevioribus, extrorsum multo magis incrassatis ut et colore diversa.

7. TERES *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 390.

In Finlandia et Svecia sub arborum demortuarum cortice rarius lecta.

8. ANNULARIS *mihi*. *Linearis lutea, subnitida, capite abdominisque cingulo piceis, thorace aequali, capite parum latiore, antennis brevibus validis, extrorsum parum incrassatis.*

Petropoli et etiam in Finlandia meridionali rarius obvia.

Bol. circellaris Var. b. similis; differt autem magnitudine duplo minore, corpore magis lineari, thorace breviore, capite parum latiore et antennis brevioribus, validioribus.

9. ANALIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 388.

In Finlandia et Svecia rarius; typum a D. *Gyllenhal* obtinui.

10. REPTANS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 389.

In Finlandia ad Willnäs aliquoties capta; typus e Svecia a D. *Gyllenhal* communicatus.

Var. b. *mihi*. *Rufo-ferruginea, abdominis cingulo postico fusco-piceo.*

Ad Willnäs semel obvia.

11. HAEMORRHOA *mihi*. *Nigra, sub-nitida, subtilissime punctulata, longius pubescens, antennarum basi, pedibus elytrorum apice anoque rufis, antennarum articulo ultimo magno, subgloboso.*

Ad Willnäs bis capta.

Priori statura simillima, sed triplo minor, aliter coloratus, longius pubescens et antennis brevioribus, alio modo constructis.

Subdivisio 2. Thorace subdepresso.

12. CRASSICORNIS *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 486.

E Svecia communicavit D. *Gyllenhal*; in Finlandia mihi semel tantum obvia.

13. LONGIUSCULA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 485.

In Finlandia et Svecia rarius.

14. SERICANS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 404.

Raro occurrit in Finlandia.

Var. b. *Gyll.* l. c.

A D. *Gyllenhal* e Svecia communicata.

15. LURIDIPENNIS *mihi. Linearis, nigropicea, opaca, pubescens, antennarum basi, elytris, pedibus, anoque livido-testaceis, thorace subquadrato, postice foveolato.*

Petropoli bis capta.

Bolit. sociali triplo major, magis pubescens, opaca, thorace longiore, antennis medio haud incrassatis diversa.

16. CASTANOPTERA *mihi. Nigra, nitida, obsolete punctulata, antennarum basi pedibus elytrisque testaceis, angulis apicis scutellique regione infuscatis, thorace subtransverso, postice foveolato.*

Aleochara Boleti Dej. in litteris.

Sequenti valde affinis, sed semper duplo major, nitidior et thorace breviore magis transverso distinguenda.

17. SOCIALIS *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II p. 406.

In Finlandiae fungis frequentissima; typum dedit e Svecia D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 407.

Cum praecedente sat frequens.

18. NIGRITULA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 408.

In Scania rarius lecta, e Westrogothia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Antennis extrorsum nigris, ceterum in omnibus simillima.*

Cum praecedente semel capta.

19. AXILLARIS *mihi*. *Nigro-fusca, nitida, antennarum basi, humeris elytrorum, abdomine antice, ano pedibusque rufis, thorace subquadrato, lateribus rotundato.*

Ad Willnäs rarissima.

Praecedenti subsimilis, parum longior, sed nonnihil latior, thorace convexiore et colore diversa.

20. ATRAMENTARIA *Kirby. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 408.

Petropoli et in Finlandia frequentissima; e Svecia misit D. *Gyllenhal*, e Lapponia D. *Fellman.*

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p 490.

Cum praecedente non infrequens; e Svecia etiam a D. *Gyllenhal* communicata.

Var. c. *mihi. Duplo, imo triplo minor.*

In Finlandia sat frequens; individua Svecana dedit D. *Gyllenhal.*

Obs. *Bol. atramentaria* a sequente, cui admodum affinis, antennis capite cum thorace parum longioribus, extrorsum crassioribus diversa.

21. ATERRIMA *Knoch. Grav. Micr.* p. 83.

Aleochara longicornis. Gyll. Ins. Svec. P. II. p. 405.

Petropoli et in Finlandia ubique frequens; etiam in Svecia aliquoties capta.

Var. b. *mihi. Duplo, imo quadruplo minor.*

Cum priore in Finlandia saepius lecta.

Var. c. *mihi. Elytris pedibusque pallidis.*

Semel capta ad Willnäs.

Obs. Dignoscitur a specie praecedente inprimis antennis longis filiformibus, articulo ultimo tantum distinctius majore.

22. EXCAVATA *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 490.

In Finlandia rarius; typum e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Var. c. *Gyll.* l. c.

In Finlandia cum Var. a. raro occurrunt.

23. BIFOVEOLATA *mihi. Nigro-picea, nitida, tenue pubescens, antennis, thorace, elytris anoque rufescentibus, pedibus pallidis, thorace postice ad scutellum foveolis duabus confluentibus impresso.*

Ad Willnäs rarius; semel etiam in Westrogothia Sveciae capta.

Statura fere *Bol. atramentariae*, sed ejus Var. c. adhuc fere duplo minor, parcius pubescens, thorax latior, postice bi-impressus et aliter coloratus.

Subdivisio 3. Thorace depresso.

24. LINEARIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 392.

Petropoli et in Finlandia saepius capta.

25. ANGUSTULA *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 393.

In Finlandia semel lecta.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 394.

Petropoli et in Finlandia rarius obvia.

Var. d. *Gyll.* l. c.

E Svecia misit D. *Gyllenhal.*

26 ATRA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 395.

In Scania Sveciae duo specimina legi.

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs in quisquiliis e mare rejectis rarius invenitur.

27. ELONGATULA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 396.

In Finlandia meridionali non infrequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

28. OBLONGA *Knoch. Grav. Monogr.* p. 154.

In Finlandia et Svecia sat frequens.

29. COMPLANA *mihi. Lineari-elongata, depressa, nigro-fusca, antennarum basi, pedibus anoque testaceis, antennis longis, thorace postice impresso.*

Ad Willnäs bis capta.

Praecedente parum brevior, sed duplo angustior, magis depressa, fere deplanata.

30. TERMINALIS *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 397.

In Finlandia, Svecia et Germania pluries a me capta, typum communicavit D. *Gyllenhal.*

31. EXILIS *Knoch.* *Elongata, nigra, nitida, antennarum basi pedibus anoque testaceis, thorace obsolete canaliculato.*

Grav. Monogr. p. 153.

In Finlandiae e Sveciae fungis saepius lecta.

Praecedenti statura simillima, differt autem colore, antennis multo crassioribus, nec non thorace per totam longitudinem, etsi obsolete, canaliculato. *Bol. sociali* etiam similis, corpore toto, sed imprimis antennis thorace longioribus distincta.

32. QUISQUILIARUM *Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 398.

In Finlandia et Svecia aliquoties obvia.

33. PLANIUSCULA *mihi.* *Linearis, nigro-fusca, sub-nitida, deplanata, antennarum basi, pedibus anoque testaceis, elytris piceo-ferrugineis, margine obscuriore, thorace evidenter canaliculato.*

In Westrogothia Svecia unicum inveni specimen.

Bol. quisquiliarum quodammodo similis, sed omnino linearis, deplanata, thorace breviore et evidenter canaliculato diversa.

34. DEPRESSIUSCULA *mihi.* *Linearis, elongata, nigro-picea, antennarum, basi, pedibus anoque rufescentibus, thorace brevissimo, postice rotundato, vix angustato, medio longitudinaliter late excavato.*

Ad Willnäs bis capta.

Praecedente quadruplo minor, opaca et thorace per totam longitudinem late excavato facile distinguenda.

35. COMPRESSA *mihi.* *Linearis, elongata, nigro-picea, antennarum basi, pedibus, elytris anoque testaceis, thorace longiore, postice angustiore, basi foveola impresso.*

Ad Willnäs semel obvenit.

Magnitudo praecedentis; statura etiam lineari haud dissimilis; thoracis autem structura, antennis extrorsum magis incrassatis, nec non colore ab illa separanda.

36. TENELLA *mihi. Fusco-picea, linearis, antennis longis, extrorsum vix crassioribus, thorace subquadrato, canaliculato, tibiis tarsisque pallidioribus.*

Ad Willnäs rarius lecta.

Praecedente plusquam duplo minor, minus depressa, thorace latiore subquadrato et colore diversa.

37. EVANESCENS *mihi. Oblonga, fusco-piscea, subnitida, antennarum basi abdomineque postice obscurioribus, thorace latiore, lateribus rotundato, postice foveola impresso.*

Semel capta ad Willnäs in Finlandia.

Magnitudine praecedentis; thoracis structura imprimis distincta.

Sectio II. Thorace transverso, latitudine multo breviore; abdomine lineari.

Subdivisio 1. Thorace depresso.

38. HUMERALIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 399.

Sub lapidibus in Finlandia australi rarius.

Var. b. *Gyll. Ins. Svec,* P. IV. p. 487.

E Svecia misit D. *Schönherr.*

39. LIMBATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 400.

Ad Willnäs semel lecta; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* missa.

Var. b. *mihi. Pallidius testacea, abdominis cingulo fusco.*

Unicum individuum in Finlandia australi captum.

40. FUNESTA *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 488.

Ad Willnäs semel obvia.

41. DEPRESSA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 401.

Specimina plura e Svecia communicarunt DD. *Gyllenhal* et *Schönherr.*

Subdivisio 2. Thorace sub-depresso, aequali.

42. FLAVIPES *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 421.

E Smolandia Sveciae benevole communicavit D. *Boheman.*

43. CINNAMOMEA *Grav Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 412.

In Ostrogothia et Blekingia Sveciae a me rarius lecta.

44. PUMILIO *Grav. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 411.

In Finlandia meridionali rarius; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll.* l. c.

Ad Willnäs semel lecta.

45. ATRATA *mihi. Brevis, lata, depressa, atra, sub-nitida, tarsis piceis, thorace brevi, postice vix sinuato, ante scutellum foveolato.*

Petropoli et ad Willnäs in Finlandia raro obvia.

Praecedente minor, angustior, colore aterrimo et thoracis structura diversa.

46. BOLETI *Linné. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 416.

Ad Willnäs rarissime lecta.

Subdivisio 3. Thorace convexo, fere pulvinato.

47. SUTURALIS *mihi. Nigra nitida, thorace fere pulvinato, antennis, elytrorum sutura et apice, pedibus anoque rufis, elytris apice exteriore profunde exciso.*

Petropoli et ad Willnäs rarissime obvenit.

Caput thorace paullo angustius, nigrum, nitidum, ore rufo. Antennae capite cum thorace parum longiores, apice vix incrassatae, basi rufae, medio nonnihil obscuriores. Thorax brevis, transversus, antice posticeque truncatus, lateribus rotundatis, supra valde convexus, angulis posticis nonnihil prominulis, niger nitidus. Elytra thorace haud latiora, latitudine baseos breviora, gibbosa, apice exteriori profunde excisa, nigra, nitida, sutura margineque apicis rufis. Abdomen nigrum, nitidum, segmentorum marginibus anoque rufescentibus. Pedes mediocres rufi.

48. PULCHELLA *mihi.* *Picea, opaca, confertissime punctulata, antennis, elytris, ano pedibusque rufis, thorace angustiore, convexo, basi foveolato, elytris apice externo profunde excisis.*

Ad Willnäs semel capta.

Praecedente angustior, thorace longiore, angustiore, antennis extrorsum luteis, elytris rufis, margine exteriore et apicis pallidioribus etc. diversa. *Bol. reptanti* etiam colore quodammodo similis, sed thorace latiore et punctura fortiore mox distinguenda.

49. ELEGANTULA *mihi.* *Lineari-elongata, rufa, nitida, capite, antennis extrorsum, thoracis disco abdominisque cingulo nigro-piceis, thorace elytris multo angustiore, basi foveolato, elytris extrorsum profunde excisis.*

Ad Willnäs rarius obvia.

Praecedente multo longior, laevis nitida, aliter colorata, thoraceque elytris angustiore, minus convexo, diversa.

Sectio III. Thorace antice nonnihil angustiore; abdomine versus anum sub-attenuato.

50. LONGICORNIS *Grav. Micr.* p. 83.

Petropoli et in Finlandia sat frequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

Aleochara longicornis Gyll. species distincta ad *Bolit. aterrimam* pertinet.

51. VALIDICORNIS *mihi.* *Brevior, postice attenuata, fusco-testacea, pilosa, creberrime punctulata, pedibus pallidioribus, antennis longis filiformibus, validissimis.*

Ad Willnäs semel capta.

Praecedentis statura, thorace latiore, convexiore, antennis validioribus, nec non colore diversa.

52. FUNGI *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 410.

Habitat in Finlandiae et Sveciae fungis frequens; typum misit D. *Gyllenhal.*

Var. b. *Gyll,* l. c.

Cum praecedente rarior.

53. AGARICOLA *mihi. Brevior, nigra nitida, creberrime punctulata, pilosa, antennis longis, extrorsum crassioribus, his basi, pedibusque testaceis.*

Aleochara fungi Var. d. *Gyll. Ins. Svec.* P. IV. p. 491.

Petropoli et ad Willnäs aliquoties capta.

Statura omnino praecedentis; differt antennis longioribus, extrorsum crassioribus, nigris, dense pilosis, et thorace paullo longiore, convexiore.

54. FUSCULA *mihi. Brevis, nigra obscura, creberrime punctulata, vix pubescens, antennis brevioribus, nigerrimis, thorace transverso, convexiore, aequali.*

Petropoli et ad Willnäs rarissime lecta.

Praecedente paullo minor, brevior, thorace transverso, lateribus rotundato et colore etiam distinguenda.

55. PARVULA *mihi. Nigra, nitida, vix pubescens, antennis tenuioribus, extrorsum haud incrassatis, thorace canaliculato, elytris piceis, pedibus pallidis.*

Ad Willnäs bis capta.

Antennis tenuioribus, extrorsum parum incrassatis, thoraceque canaliculato a praecedente imprimis diversa.

56. PALLIDULA *mihi. Luteo-ferruginea, subnitida, abdominis cingulo obscuro, thorace transverso, gibbo, postice foveolato.*

Ad Willnäs semel lecta.

Praecedente adhuc duplo minor, colore, thoraceque transverso gibbo optime dignoscitur. Colore *Bol. annulari* affinis, sed differt thorace multo breviore, latiore, etc.

Sectio IV. Thorace capite vix latiore, sub-obiculato; abdomine sublineari.

57. IMPRESSIFRONS *mihi. Nigra nitida, pedibus piceis, capite thorace vix angustiore, vertice obsolete foveolato, thorace brevi, rotundato, antennis longis, hirsutis, extrorsum parum crassioribus.*

Petropoli et ad Willnäs rarius occurrit.

Var. b. *Antennarum basi pedibusque testaceis.*

Cum praecedente semel capta ad Willnäs.

Statura fere *Staphylini*, sed ad *Aleocharides* certe pertinet, in hoc genere collocanda. Caput orbiculatum, thorace vix angustius, nigrum nitidum, vertice foveola plus minusve conspicua. Antennae capite cum thorace longiores, extrorsum parum incrassatae, dense pilosae. Thorax longitudine brevior, lateribus valde rotundatus, postice obsolete foveolatus. Elytra thorace nonnihil longiora, subquadrata, creberrime punctulata, tenue pubescentia. Corpus cum pedibus nigrum pilosum.

13. **DRUSILLA** *Leach.*

ALEOCHARA *Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. CANALICULATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 391.

In Finlandia et Svecia non infrequens.

Var. b. *Gyll.* l. c.

In Finlandia, Svecia et Germania a me lecta.

2. EXARATA *mihi.* *Rufo-testacea, subtilissime punctata, sericeo-pubescens, capite abdominisque medio nigro, thorace breviore, levius canaliculato.*

Ad Willnäs in Finlandia semel capta.

Praecedente fere duplo minor, subtilius punctata, sericeo pubescens, thorace breviore, elytris parum angustiore, levius canaliculato, abdomineque postice minus dilatato, facile distinguenda.

14. **CALODERA** *mihi.*

ALEOCHARA *Grav.*

Palpi maxillares, articulo penultimo elongato, subcylindrico, ultimo parvo acuminato, vix conspicuo. Antennae crassae, articulo primo longo crasso, cy-

lindrico, 2 minore etiam crassiusculo, 3 tenui obconico, 4 - 10 brevibus, transversis, sensim crassioribus, ultimo ovato, obtuso. Corpus oblongum. Caput thorace paullo latius, orbiculatum. Thorax basi apiceque latitudine aequalis, lateribus rotundatis. Elytra thorace paullo latiora et longiora, apice exteriori excisa. Tarsi articulis aequalibus.

A καλὸς pulcher et δέρη collum.

1. NIGRITA *mihi. Nigra obscura, dense pubescens, thorace latitudine longior, canaliculato.*

Aleochara aethiops Var. Grav. Monogr. p. 153.

In Svecia australi semel capta.

Aleochara aethiope Grav. paullo major, antennis totis nigris, thorace longiore, medio canaliculato distinguenda.

2. PROTENSA *mihi. Linearis, nigra, griseo-pubescens, thorace elongato, canaliculato.*

E Svecia misit D. *Gyllenhal* ut *Aleochara teres;* deinde ab ill. viro sub nomine *Al. aethiopis* Var. vel nov. sp. D. *Sahlberg* communicata.

Aleochara aethiope Gyll. duplo minor, magis linearis, minus pubescens nec non thorace longiore canaliculato diversa.

3. TESTACEA *mihi. Rufo-testacea, capite abdominisque medio infuscatis, antennis brevibus, thorace orbiculato, aequali.*

Ad Willnäs semel capta.

Calod. nigrita duplo minor; antennis thorace brevioribus, thorace orbiculato, haud canaliculato, nec non colore satis discrepat.

15. FALAGRIA *Leach.*

ALEOCHARA *Knoch, Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Payk.*

1. SULCATA *Payk. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 378.

Petropoli et in Finlandia non infrequens; e Svecia misit D. *Gyllenhal.*

2. OBSCURA *Hellwig. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 379.

Ad Aboam in Finlandia saepius lecta; specimina Svecana communicarunt DD. *Schönherr* et *Boheman.*

3. NIGRA *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 380.

E Sveciae Smolandia misit D. *Boheman.*

4. PICEA *Knoch. Grav. Micr.* p. 75.

Individuum in Svecia captum dedit D. *Gyllenhal.*

16. AUTALIA *Leach.*

ALEOCHARA *Knoch. Grav. Gyll.* STAPHYLINUS *Oliv.*

1. RIVULARIS *Knoch. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 382.

In stercore bovino ad Willnäs in Finlandia australi anno 1825 copiose lecta; e Svecia misit D. *Boheman.*

2. IMPRESSA *Oliv. Gyll. Ins. Svec.* P. II. p. 381.

In fungis arboreis ad Willnäs aliquoties obvia; etiam e Svecia a D. *Gyllenhal* communicata.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

AVIS.

L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg a publié dans le premier siècle de son existence 73 volumes de ses Mémoires. Ce recueil se compose de cinq séries publiées successivement sous les titres suivans: Commentarii Acad. Imp. sc. Petrop. depuis 1726—1747 (14 volumes); Novi Commentarii 1747—1776 (21 volumes); Acta 1776—1783 (12 volumes); Nova Acta 1783—1803 (15 volumes) et Mémoires 1803—1826 (11 volumes). A chacune de ces différentes époques se rattache quelque souvenir remarquable, tels que: en 1726 la première séance publique en présence de S. M. l'Impératrice Catherine I^re^, ou l'époque de l'inaûguration de l'Académie; en 1747 les règlemens donnés à cette société par l'Impératrice Elisabeth fille de Pierre I^r^; en 1776 la célébration solennelle du jubilé semi-séculaire; en 1783 la nomination de M^me^ la Princesse Daschkoff Directeur de l'Académie; en 1803 les nouveaux règlemens donnés par l'Empereur Alexandre; enfin en 1826 la célébration de la fête séculaire honorée de la présence de S. M. l'Empereur NICOLAS I^r^ et de toute Son auguste Famille. Le désir de faciliter le débit de ses Mémoires et d'en accélérer la publication a fait choisir à l'Académie un nouveau mode dans la rédaction de ce recueil dont commence aujourd'hui la sixième série, sous le même titre de *Mémoires*. Cette nouvelle série paraîtra en deux corps d'ouvrage ou sections éparses et indépendantes l'une de l'autre. La première section comprendra les Mémoires de Mathématiques, d'Astronomie, de Physique, de Chimie et des Sciences naturelles; la seconde ceux des Sciences politiques, d'Histoire et de Philologie. Ces deux sections paraîtront par livraisons de 10 à 15 feuilles chacune. Six de ces livraisons formeront un volume, et à la première section sera ajoutée une septième livraison, comme supplément, qui contiendra l'histoire de l'Académie et les rapports lus dans les séances et dont la publication aura été arrêtée. Les mémoires seront placés pèle-mèle dans l'ordre de leur présentation. Les sections seront vendues séparément, mais personne ne pourra acheter des livraisons séparées. En achetant la première livraison on payera le volume entier et on touchera un billet pour recevoir les livraisons suivantes. Les mémoires des savans étrangers seront séparés de ceux de l'Académie et formeront un recueil à part qui se publiera de la même manière, par livraisons de 10 à 15 feuilles imprimées chacune, et dont de même six formeront un volume.

TABLE DES MATIÈRES.

M. le C^{te} Mannerheim, Précis d'un nouvel arrangement de la famille des Brachélytres, de l'ordre des insectes coléoptères 415

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS A

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG

PAR

DIVERS SAVANS,

ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME PREMIER.

6me LIVRAISON.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1831.

Se vend chez GRAEFF, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison
Stcherbakoff N°. 91 et à Leipzic chez CNOBLOCH.

Publié avec l'approbation de l'Académie
En Octobre 1831.

Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

MÉMOIRE

SUR UNE

QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX TACTIONS DES CERCLES;

PAR

M. PAUCKER,

PROFESSEUR AU GYMNASE DE MITAU EN COURLANDE.

(Lue 2 Mai 1827.)

Problème.

Dans un triangle donné abc, inscrire trois circonférences de cercle d, e, f, telles que chacune soit tangente aux deux autres, et à deux côtés du triangle.

Analyse géométrique.

(Fig. 1.) Je suppose que la circonférence du cercle d touche les côtés ab, ca en g, g'; que la circonférence du cercle e touche les côtés bc, ab en h, h', et que la circonférence du cercle f touche les côtés ca, bc en k, k'; de plus que les points l, m, n, soient les contacts des cercles e, f; f, d; d, e; respectivement.

1.

(Fig. 1.) Cela posé, le côté ca étant touché en g', k par les cercles d, f, les rayons dg', fk, seront perpendiculaires à ca. Les prolongemens de ces rayons coupant les cercles en r, t, les angles $g'mr$, kmt seront droits et égaux entre eux.

Si on élève en *m* une perpendiculaire à *fd*, qui coupe le côté *ca* en *p*, cette droite sera la commune tangente intérieure aux deux cercles. Donc *pm*, *pg′*, seront égales entr'elles comme tangentes au cercle *d*, et *pm*, *pk* seront égales entr'elles comme tangentes au cercle *f*. Donc les trois lignes *pm*, *pg′*, *pk*, étant égales entr'elles, *m* sera dans la circonférence d'un cercle du centre *p* et du diamètre *kg′*. Par conséquent l'angle *g′mk* est droit.

Les trois angles *g′mr*, *kmt*, *g′mk* étant droits, il est évident que le contact *m* est l'intersection des droites *kr*, *tg′*, perpendiculaires l'une à l'autre. Il s'ensuit que les triangles *tkg′*, *kg′r* sont semblables, et que, par conséquent, *la commune tangente extérieure kg′ aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre leurs diamètres kt, g′r*.

Les angles *dpm*, *fpm*, étant les moitiés des angles adjacents *g′pm*, *kpm*, leur somme, c'est-à-dire l'angle *dpf*, sera droit, et puisque *mp* est perpendiculaire à *df*, les triangles *dmp*, *pmf*, seront semblables. Par conséquent *la commune tangente intérieure mp aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre leurs rayons dm, fm.*

On démontre de la même manière, par rapport aux deux cercles *e*, *f*, qui se touchent en *l*, et dont on aura mené les diamètres *hs*, *k′t′* perpendiculaires au côté *bc*, que les droites *ht′*, *k′s*, se coupant mutuellement en *l* à angle droit, les triangles *shk′*, *hk′t′*, sont semblables, d'où il suit que *la commune tangente extérieure hk′ aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre leurs diamètres hs, k′t′.*

De plus, la perpendiculaire élevée en *l* sur la ligne des centres, coupant le coté *bc* en *o*, l'angle *eof* est droit, les triangles *elo*, *olf* sont semblables, et *la commune tangente intérieure lo aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre leurs rayons el, fl.*

2.

(Fig. 1.) Joignez les points de contingence *k′m*, et prolongés cette droite, jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence *d* en *w*. L'égalité des angles *fk′m*, *fmk′*, puis des angles fmk', dmw, enfin des angles dmw et dwm fait conclure l'égalité des angles $fk'm$ et dwm. Donc les rayons dw, fk', sont parallèles. Or les rayons fk, eh, sont parallèles, puisqu'ils sont perpendiculaires tous les deux sur bc. Par conséquent les rayons dw, eh, sont parallèles. Donc les angles wdn, hen, sont égaux entr'eux, d'où il suit que les triangles isoscèles wdn, hen, sont semblables, et que par suite les angles dnw, enh sont égaux entr'eux. Or, dne est une ligne droite, donc les points wnh sont en ligne droite. D'où l'on tire la conclusion suivante, savoir que:

Si des deux cercles e, f, *on joint les contacts sur le côté* bc, *avec les contacts sur la circonférence* d, *l'intersection* w *de ces deux droites* $k'm$, hn, *doit se trouver sur la circonférence* d, *telle que le rayon correspondant* dw, *suffisamment prolongé coupe le côté* bc *à angle droit en* α.

On démontre de la même manière que *si des deux cercles* d, f, *on joint les contacts sur le côté* ca, *avec les contacts sur la circonférence* e, *l'intersection* x *de ces deux droites* kl, $g'n$, *doit se trouver sur la circonférence* e, *telle que le rayon correspondant* ex, *prolongé, coupe le côté* ca *à angle droit en* β.

3.

(Fig. 1.) La droite $wd\alpha$ coupant le cercle d en w', les angles wmw' et wnw' sont visiblement droits. Donc les angles $k'\alpha w'$, $h\alpha w'$ étant droits également, les quadrilatères $k'mw'\alpha$, $hnw'\alpha$, sont inscriptibles au cercle, d'où l'on conclut l'égalité des rectangles $k'w\cdot wm$, $\alpha w\cdot ww'$ et celle des rectangles $hw\cdot wn$, $\alpha w\cdot ww'$. Donc les rectangles $k'w\cdot wm$, $hw\cdot wn$, sont égaux entr'eux, c'est-à-dire que *le quadrilatère* $k'hnm$ *est inscriptible au cercle.*

Or le rectangle $k'w\cdot wm$ est égal au carré de la tangente menée du point w à la circonférence f: et le rectangle $hw\cdot wn$ est égal au carré de la tangente menée du point w à la circonférence e. Donc ces deux tangentes sont égales entr'elles. Il s'ensuit que, joignant wl, cette droite touchera les deux cercles. Car si elle coupait la circonférence e en l', et la circonférence f en l'', le rectangle $lw\cdot wl'$ serait égal à $hw\cdot wn$, et le rectangle $lw\cdot wl''$ égal à $k'w\cdot wm$. Donc, les rectangles $k'w\cdot wm$, $hw\cdot wn$ étant égaux entr'eux, les rectangles $lw\cdot wl'$, $lw\cdot wl''$ le seraient pareillement. Par conséquent les distances wl', wl'', seraient égales entr'elles. Or, les circonférences e, f, se touchant en l, les intersections l', l'', auraient nécessairement une situation opposée par rapport au point de contingence l. Il est donc visible que les points l', l'', doivent se confondre avec ce point de contingence. Par conséquent *la droite wl est tangente aux deux cercles ou perpendiculaire sur leur ligne des centres ef, et divise leur tangente extérieure hk' en deux parties égales en o.*

On démontre de la même manière, que la perpendiculaire $xe\beta$ coupant la circonférence e en x', les quadrilatères $klx'\beta$, $g'nx'\beta$, et par suite le quadrilatère $klng'$, sont inscriptibles au cercle, et que *la droite xm est tangente aux deux cercles ou perpendiculaire sur leur ligne des centres fd, et divise leur tangente extérieure kg' en deux parties égales en p.*

4.

(Fig. 1.) Puisque l'angle inscrit à un segment de cercle est égal à l'angle que la corde opposée au sommet forme avec la tangente menée à l'extrémité de la corde, les angles $g'wm$, $kg'm$ et les angles $kk'm$, $g'km$, sont égaux entr'eux. Donc les cordes wg', $k'k$, étant prolongées jusqu'à leur point de recontre en u, les angles uwk', $uk'w$, sont égaux aux angles $mg'k$, mkg', respectivement, d'où l'on conclut que l'angle wuk' est droit, étant égal à $g'mk$. Donc le quadrilatère $kmg'u$ est inscriptible au cercle, ayant ses angles opposés droits kmg', kug'.

Par conséquent l'angle kum ou $k'um$ est égal à $kg'm$, et puisque l'angle $kk'm$ ou $uk'm$ est égal à $g'km$ les triangles muk', $mg'k$, sont semblables. D'où il suit que l'angle $k'mu$ est droit, étant égal à $g'mk$. Les angles $k'mt'$, wmw' sont droits, étant inscrits au demi-cercle. Donc $ut'mw'$ est une ligne droite perpendiculaire à la droite $k'mw$. On en conclut que les triangles mwu, uwk', sont semblables, et que par conséquent le carré de wu est égal au rectangle $k'w \cdot wm$. Or, ce rectangle est égal au carré de la tangente wl. Donc *la commune tangente wl des cercles e, f, est égale à la droite wu, c'est-à-dire à la distance perpendiculaire du point w à la corde de contingence kk'.*

On prouvera de la même manière que les droites kk', xh, se coupant mutuellement en v, les triangles vxk, lhk', sont semblables, que par conséquent, les angles hlk', hvk', étant droits, le quadrilatère $k'lhv$ est iscriptible au cercle, ce qui conduit à la conclusion que les triangles lvk, lhk' sont semblables, d'où il suit que $vtlx'$ est une ligne droite perpendiculaire sur klx, et que les triangles lxv, vxk, sont semblables. Donc, les carrés des lignes xm, xv, étant égaux, chacun, au rectangle $kx \cdot xl$, *si du point* x, *concours des cordes de contingence* kl, $g'n$, *on mène la commune tangente* xm *des cercles* f, d, *elle est égale à la distance perpendiculaire* xv *de cette intersection* x *à la corde de contingence* kk'.

5.

(Fig. 1.) Soit y le point de concours des droites $ug'w$, $vtlx'$, le quadrilatère $kuyl$ est inscriptible au cercle, parce que les angles kuy, kly sont droits. Joignez ky, lu, qui se coupent mutuellement au point γ, les angles lky, luy, ou $lk\gamma$, luw sont égaux entr'eux. Le triangle wlu étant isoscèle, puisque l'on a démontré l'égalité des lignes wl, wu, les angles luw, wlu sont égaux entr'eux. Ce qui prouve que les angles wlu, $lk\gamma$, le sont aussi. Or, la droite wl étant tangente au cercle f, si la droite lu coupait ce cercle en γ', l'angle wlu, et par conséquent l'angle $lk\gamma$, serait égal à $lk\gamma'$. Il suit de là que les intersections γ, γ' doivent se confondre, c'est-à-dire que *les droites* ky, lu, *se coupent mutuellement dans un point* γ, *qui est dans la circonférence du cercle* f, *tel que le rayon correspondant* $f\gamma$ *soit parallèle à la corde de contingence* kk'.

Car, les rayons $f\gamma$, fl, étant égaux entre eux, les angles $f\gamma l$, $fl\gamma$, le sont aussi. Or, la droite lf prolongée rencontrant la corde kk' en ε, les triangles $wl\varepsilon$, $wu\varepsilon$ sont rectangles et égaux entr'eux, donc le triangle $l\varepsilon u$ est isoscèle et semblable au triangle $lf\gamma$, d'où l'on conclut évidemment le parallélisme des lignes $f\gamma$, εu.

Pareillement, les droites vhx, $ut'mw'$, allant concourir en z, il est facile de reconnaître que le quadrilatère $k'vzm$ étant inscriptible au cercle, *l'intersection* δ *des droites* $k'z$, mv, *doit être dans la circonférence du cercle* f, *tellement que le rayon correspondant* $f\delta$ *soit parallèle à la corde de contingence* kk'.

La conclusion immédiate que l'on en va tirer, est que *la ligne* $\gamma\delta$ *qui joint ces intersections est un diamètre du cercle* f, *parallèle à la corde de contingence* kk'.

6.

(Fig. 1.) Le sommet c du triangle abc étant joint avec le centre du cercle f, cette droite cf est visiblement perpendiculaire sur la corde de contingence kk'; et puisque le rayon $f\gamma$ est parallèle à kk', l'angle $cf\gamma$ est droit; d'où il suit que les angles kfc, kcf, valant ensemble un angle droit, les angles $kf\gamma$, kcf sont égaux entr'eux. Or, les droites cf, uy étant perpendiculaires, l'une et l'autre sur la corde kk', et par conséquent parallèles, les angles kfc, $kg'u$ sont égaux entr'eux. Donc les angles $kf\gamma$, $kg'u$, le sont aussi. Or l'angle $kf\gamma$ est double de $g'k\gamma$ ou de $g'ky$. Par conséquent l'angle $kg'u$ est également double de $g'ky$. Il s'ensuit que *le triangle* $kg'y$ *est isoscèle, les côtés* kg', $g'y$ *étant égaux entr'eux.*

On prouvera de la même manière que *le triangle* $k'hz$ *est isoscèle, les côtés* $k'h$, hz, *étant égaux entr'eux.*

Aussi reconnaît-on facilement que les lignes ky, $k'z$, forment avec les côtés ca, bc, des angles égaux, valant chacun le quart de l'angle bca.

7.

(Fig. 1.) Le rayon fl rencontrant la corde de contingence kk' en ε, joignez $\varepsilon\varpi$, qui coupe la droite ky en η. Les quadrilatères $klyu$, $\varepsilon l\varpi u$, sont inscriptibles au cercle. Dans le premier de ces quadrilatères l'angle luy ou $lu\varpi$ est égal à lky ou $lk\eta$; et dans l'autre l'angle $lu\varpi$ est égal à $l\varepsilon\varpi$ ou $l\varepsilon\eta$. Donc les angles $lk\eta$, $l\varepsilon\eta$, sont égaux entr'eux, d'où l'on conclut que le quadrilatère $\varepsilon l\eta k$ est inscriptible au cercle. On tire de-là l'égalité des angles $kl\eta$, $k\varepsilon\eta$. Or, les triangles $\varpi l\varepsilon$, $\varpi u\varepsilon$, étant égaux entr'eux, les angles $k\varepsilon\eta$, $l\varepsilon\eta$, le sont aussi. Donc les angles $kl\eta$, $l\varepsilon\eta$, sont égaux entr'eux. Deplus, l'angle $l\varepsilon\eta$ est égal à $lk\eta$. Par conséquent les angles $kl\eta$, $lk\eta$, sont égaux entr'eux, c'est-à-dire que le triangle $kl\eta$ est isoscèle, ayant ses côtés égaux ηk, ηl. Donc, l'angle kly étant droit, le point η est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $klyu$, c'est-à-dire que la droite ky est divisée en deux parties égales en η.

Actuellement, remarquez que les lignes kg', yg', sont égales entr'elles; par le Nr. 6. Donc, les segmens $k\eta$, $y\eta$, l'étant pareillement, l'angle $k\eta g'$ est droit. Il s'ensuit que le quadrilatère $k\eta g'u$ est inscriptible à un cercle, dont le centre est évidemment en p, milieu de kg', et dont la circonférence va passer par m, puisque l'angle kmg' est droit.

Les droites kg', ky, étant divisées en deux parties égales en p, η, respectivement, la ligne $p\eta$, qui joint ces milieux, est parallèle à $g'y$ et par conséquent à cf. Actuellement, si la tangente lw rencontre le côté ca en λ, il est évident que les tangentes λl, λk sont égales entr'elles, et que, joignant $f\lambda$, cette droite doit être perpendiculaire sur la corde de contingence kl. Or, d'après ce qui précède, les droites ηl, ηk sont égales entr'elles, de même que les rayons fl, fk, d'où il suit que la droite est également perpendiculaire sur kl. Par conséquent *les trois points, savoir le centre du cercle* f, *le centre* η *du cercle circonscrit au quadrilatère* $klyu$, *et l'intersection* λ *de la tangente* olw *sur le côté* ca, *sont en ligne droite laquelle est perpendiculaire sur la corde de contingence* kl, *ou parallèle à la droite* $vtlx'y$.

Le rayon fm rencontrant la corde de contingence kk' en ζ, joignez ζx, qui coupe la droite $k'z$ en ϑ, et qui divise l'angle $v\zeta m$ en deux parties égales. Vous prouverez, comme ci-dessus, que les quadrilatères $k'mzv$, ζmxv étant inscriptibles au cercle, le quadrilatère $\zeta m\vartheta k'$ doit être pareillement inscriptible. Vous en conclurez que les droites $\vartheta k'$, ϑm sont égales entr'elles, et que par conséquent le point ϑ est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $k'mzv$, ce qui fait voir que le point o est le centre du cercle circonscriptible au pentagone $vh\vartheta lk'$, et que les droites $o\vartheta$, cf sont parallèles. De plus, la tangente mx coupant le côté bc en μ, et les lignes μm, $\mu k'$, puis ϑm, $\vartheta k'$, enfin fm, fk', étant égales entr'elles, respectivement, il est évident que *les trois points, savoir le centre du cercle* f, *le centre* ϑ *du cercle circonscrit au quadrilatère* $k'mzv$, *et l'intersection*

μ *de la tangente* xm *par le côté* bc, *sont en ligne droite laquelle est perpendiculaire sur la corde de contingence* $k'm$, *ou parallèle à la droite* $ut'm\varpi'z$.

Puis, les angles kly, $\varepsilon l\varpi$ étant droits, l'angle ϖly est égal à εlk, qui, de son côté, est égal à $\varepsilon\eta k$, ou à $\varpi\eta y$, puisque le quadrilatère $\varepsilon l\eta k$ est inscriptible au cercle. Donc, les angles ϖly, $\varpi\eta y$, étant égaux entr'eux, le quadrilatère $\eta ly\varpi$ est inscriptible au cercle. Par conséquent *l'angle* $\lambda l\eta$ *vaut le quart de l'angle* bca, puisqu'il est égal à ϖly, ou à $\varpi y\eta$, ou à $g'\eta k$, ou à $g'ky$. On prouvera de même que *l'angle* $\mu m\vartheta$ *vaut le quart de l'angle* bca.

Dans le quadrilatère $km\eta g'$ inscriptible au cercle, l'angle $\eta mg'$ est égal à $\eta kg'$ ou au quart de l'angle bca, et par conséquent égal à $\vartheta k'h$ ou à $\delta k'h$, ou à $\delta mk'$. Or, le rayon $f\delta$ étant parallèle à la corde de contingence kk', ou perpendiculaire sur la corde $k't$, la corde $k'\delta$ est égale à δt, et par suite l'angle $\delta mk'$ égal à δmt. Donc l'angle $\eta mg'$ est égal à δmt. Or tmg' est une ligne droite par ce qui a été démontré au Nr. 1. Donc $\delta m\eta$ *ou* $v\delta m\eta$ *est une ligne droite*. Un raisonnement tout-à-fait semblable conduira à conclure *que* $\gamma l\vartheta$ *ou* $u\gamma l\vartheta$ *est une ligne droite.*

8.

(Fig. 1.) Du sommet c, menez une parallèle à la droite ky, qui rencontre la droite $f\lambda$ en E. Cette droite cE divisera évidemment en deux parties égales l'angle fca, puisque l'angle Eca est égal à ykg', ou à la moitié de $kg'u$ ou de fca. Les droites εc, cf, étant parallèles à $k\eta$, ηp, respectivement, on aura les proportions

$$E\lambda : \lambda\eta = c\lambda : \lambda k$$

$$\lambda\eta : \lambda f = p\lambda : c\lambda$$

desquelles on conclut *ex aequo*

$$E\lambda : \lambda f = p\lambda : \lambda k.$$

Donc, joignant Ep, cette droite sera parallèle à fk, et par conséquent perpendiculaire sur le côté ca. Actuellement, remarquez que le point E est l'intersection des droites $f\lambda$, cE, qui divisent en deux parties égales, l'une, l'angle $c\lambda l$, l'autre, l'angle fca. Il est donc évident que *le point* E *est le centre d'un cercle du rayon* Ep, *qui sera tangent aux droites* λlo, cf, ca, *et à celle-ci en* p.

Par un raissonnement semblable on parvient à démontrer qu'ayant mené du sommet c une droite parallèle à $k'z$, qui va rencontrer la droite $f\vartheta\mu$ en D, *ce point* D *doit être le centre d'un cercle du rayon* Do, *qui sera tangent aux droites* μmp, cf, bc, *et à celle-ci en* o.

9.

(Fig. 1.) Le point E, se trouvant dans une droite $f\lambda$ qui coupe la corde kl perpendiculairement en deux parties égales, sera également distant des points k, l. De plus, la droite Ep étant perpendiculaire sur le milieu de la tangente kg', le point E sera également distant des points k, g'. Donc les lignes El, Ek, Eg', sont égales entr'elles, c'est-à-dire que le point E est le centre d'un cercle circonscrit au triangle lkg'. Or il a été démontré au Nr. 3 que le quadrilatère $klng'$ est inscriptible au cercle. Donc le point E est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $klng'$. Il s'ensuit que les quatre lignes En, El, Ek, Eg', sont égales entr'elles.

Actuellement, puisque les lignes En, Eg', et dn, dg', sont égales entr'elles respectivement, il est évident que la droite Ed doit couper perpendiculairement en deux parties égales la corde de contingence ng', que par conséquent cette droite Ed, et la commune tangente intérieure nq aux cercles d, e, vont concourir dans un même point du côté ca, et que, dans ce point de concours, la droite Ed doit couper en deux parties égales l'angle formé par la tangente nq et le côté ca. Donc la perpendiculaire abaissée du point E sur la tangente prolongée nq, est égale à Ep, c'est à dire que *le cercle décrit du centre* E *et du rayon* Ep *touche les quatre lignes suffisamment prolongées* nq, lo, cf, ca.

10.

(Fig. 1.) Nous voilà donc arrivés, par l'enchaînement des conclusions précédentes, à la solution de notre problème, sur lequel plusieurs savans géomètres se sont exercés.

En effet, ayant prouvé au Nr. 8 qu'un cercle qui touche la commune tangente *lo* des cercles *e*, *f*, et qui touche le côté *ca* en *p*, doit toucher aussi la droite *cf*, qui coupe en deux parties égales l'angle *bca*; on fera l'observation que les cercles tangens *f*, *d* ont une situation analogue par rapport au point *p*.

Donc, en substituant le cercle *d*, la tangente *nq*, et l'angle *cab*, à la place du cercle *f*, de la tangente *lo*, et de l'angle *bca*, et réciproquement, on parviendra à prouver, par un raisonnement parfaitement semblable, qu'un cercle qui touche la commune tangente *nq* des cercles *d*, *e*, et qui touche le côté *ca* en *p*, doit toucher aussi la droite *ad*, qui coupe en deux parties égales l'angle *cab*.

Or, par le Nr. 9, le cercle *E* satisfait à la condition de toucher à la fois le côté *ca* en *p*, les tangentes *lo*, *nq*, et la sécante *cf*. Donc ce même cercle *E* doit toucher nécessairement la sécante *ad*.

Actuellement, les sécantes *ad*, *cf*, sont données de position, puisqu'elles divisent en deux parties égales les angles *cab*, *bca*, respectivement. Donc le point *E* est donné, comme centre du cercle inscrit au triangle formé par le côté *ca* et les sécantes *ad*, *cf*. Par conséquent le point *p* est donné, étant le point de contact du cercle inscrit *E*, par le côté *ca*. Les points *q*, *o* sont donnés par un procédé analogue, et ainsi le problème est résolu; ce qui se fera de la manière suivante.

Solution du problème.

(Fig. 2.) Ayant divisé en deux parties égales les trois angles du triangle, par des sécantes qui vont concourir dans un même point *M*, centre du cercle inscrit; vous inscrirez les cercles *D*, *E*, *F*, dans les triangles *Mbc*, *Mca*, *Mab*, respectivement. Soient *o*, *p*, *q*, les contacts de ces cercles sur les côtés *bc*, *ca*, *ab*; et *u*, *v*, *w*, les intersections des lignes des centres *EF*, *FD*, *DE*, par les sécantes *Ma*, *Mb*, *Mc*, respectivement. Joignez les droites *ou*, *pv*, *qw*, qui vont concourir dans un même point *N*, et dont chacune doit toucher les deux adjacens parmi les trois cercles *D*, *E*, *F*. Les quadrilatères *Npaq*, *Nqbo*, *Nocp*, seront circonscriptibles à des cercles; inscrivez-y les cercles d, e, f, respectivement, ils satisferont à la question, savoir d'être tangens deux à deux.

Pour s'en convaincre, il conviendra de démontrer préalablement les propositions suivantes.

11. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle* bca *étant divisé en deux parties égales par la sécante* Mc, *et des cercles tangens* D, E, *étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles* bcM, Mca; *si l'on joint les contacts par une droite* op, *qui coupe les cercles* D, E, *en* x, y, *respectivement, les cordes* ox, py, *seront égales entr'elles.*

Du sommet c abaissez une perpendiculaire $c\alpha$ sur op. Les angles Dop, poc, valant ensemble un droit, et les angles poc, $oc\alpha$ valant ensemble un droit, les angles Dop, $oc\alpha$ seront égaux entr'eux, ce qui donne la proportion

$$1)\quad \tfrac{1}{2}ox : c\alpha = Do : oc.$$

Pareillement, les angles Epo, opc valant ensemble un droit, et les angles opc, $pc\alpha$ valant ensemble un droit, les angles Epo, $pc\alpha$, seront égaux entr'eux, ce qui fournit la proportion

$$2)\quad \tfrac{1}{2}py : c\alpha = Ep : pc.$$

Or, les angles Dco, Ecp étant chacun le quart de l'angle bca, les triangles Doc, Epc sont semblables, et par suite

$$3)\quad Do : oc = Ep : pc.$$

On aura donc

$$\tfrac{1}{2}ox : c\alpha = \tfrac{1}{2}py : c\alpha$$

et de-là

$$ox = py$$

ce qu'il fallait démontrer.

12. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle* bca *étant divisé en deux parties égales par la sécante* Mc, *et des cercles tangens* D, E, *étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles* bcM, Mca, *touchant les côtés* bc, ca, *en* o, p, *et la sécante* Mc *en* o'', p', *respectivement; si l'on joint les contacts réciproques, ces droites* op', po'', *seront égales entr'elles, et vont concourir dans un même point* z *de la ligne des centres* DE *qui est la projection du sommet* c *sur cette ligne des centres.*

Puis, les cercles tangens D, E *étant coupés par la droite* op' *en* t, y', *et par la droite* po'' *en* x', t', *respectivement; la droite* tt' *sera la commune tangente intérieure aux cercles* D, E; *et les quatre cordes* ot, $p'y'$, pt', $o''x'$, *seront égales entr'elles.*

Les angles pco'', EcD, $p'co$, sont égaux entr'eux, étant chacun la moitié de l'angle bca, et sont compris entre des côtés proportionnels, puisque

$$pc : co'' = Ec : cD = p'c : co.$$

Par conséquent les triangles pco'', EcD, $p'co$ sont semblables, d'où il suit que les angles $co''p$, cDE, cop', et les angles cpo'', cED, $cp'o$ sont égaux entr'eux. De plus, les côtés cp, cp' et co'', co, étant égaux entr'eux respectivement, comme tangentes aux mêmes cercles, les triangles cpo'', $cp'o$ sont égaux entr'eux, et par conséquent $po'' = op'$.

Soit z l'intersection des droites op', DE les angles coz, cDz sont égaux entr'eux, par conséquent le quadrilatère $coDz$ est inscriptible au cercle, d'où il suit que l'angle coD étant droit, l'angle czD est pareillement droit, c'est-à-dire que cz est perpendiculaire sur DE.

Soit z' l'intersection des droites po'', DE, le quadrilatère $cDo''z'$ sera inscriptible au cercle, puisque les angles $co''z'$, cDz', sont égaux entr'eux. Donc, l'angle $co''D$ étant droit, l'angle $cz'D$ sera droit aussi, c'est-à-dire que cz' est perpendiculaire sur DE. Or la droite cz est également perpendiculaire sur DE. Donc les intersections z, z', se doivent nécessairement confondre.

De cette manière il est facile de reconnaître que les pentagones $coDo''z$, $cp'Ezp$ sont inscriptibles à des cercles, dont les diamètres sont cD, cE, respectivement.

Dans le premier de ces pentagones, les angles Dco, Dco'', Dzo, Dzo'', sont égaux entr'eux, et valent chacun le quart de l'angle bca; d'où il suit que l'angle ozo'', formé par les droites op', po'', dans leur point de concours z, est divisé en deux parties égales par la ligne des centres DE. Soit donc ϖ l'intersection de cette ligne des centres par la sécante Mc, il est évident que les triangles zEp', zEt'; les triangles $z\varpi p'$, $z\varpi t'$; les triangles zEp, zEy'; les triangles zDo, zDx'; sont égaux entr'eux respectivement, ce qui entraîne l'égalité des cotés $\varpi p'$, $\varpi t'$, et ϖt, $\varpi o''$, des segmens zp', zt'; et zp, zy'; zt, zo''; et zo, zx'; et tp', $t'o''$; et oy', px'; puis l'égalité des cordes $p'y'$, pt'; et ot, $o''x'$, et des quatre angles $E\varpi p'$, $E\varpi t'$, $D\varpi t$, $D\varpi o''$. Donc la droite $p'\varpi o''$ étant tangente aux cercles D, E, la droite $t\varpi t'$ qui lui est égale et également placée par rapport à la ligne des centres, doit être pareillement tangente aux cercles D, E, en t, t'.

Du sommet c abaissez la perpendiculaire $c\beta$ sur la droite $otp'zy'$; les angles Dot, βoc, réunis ensemble, de même que les angles βoc, βco, réunis ensemble, valant un droit, les angles Dot, βco sont égaux entr'eux, d'où l'on conclut la proportion

$$\tfrac{1}{2}ot : \beta c = Do : oc.$$

Pareillement, les angles $Ep'y'$, $y'p'z$, réunis ensemble, valant un droit, les angles $Ep'y'$, $\beta cp'$ sont égaux entr'eux, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}p'y' : c\beta = Ep' : p'c.$$

Or,

$$Do : oc = Ep' : p'c,$$

donc

$$\tfrac{1}{2}ot : c\beta = \tfrac{1}{2}p'y' : c\beta,$$

d'où il résulte

$$ot = p'y'$$

et par suite

$$ot = p'y' = pt' = o''x',$$

ce qu'il fallait démontrer.

13. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc, et des cercles tangens D, E étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca; les deux tangentes or, ps', menées de chaque contact au cercle opposé, sont égales entr'elles.*

Joignez op, qui coupe les cercles D, E, en x, y, le carré de la tangente or sera égal au rectangle $po \cdot oy$, et le carré de la tangente ps' sera égal au rectangle $op \cdot px$. Or, par le théorème Nr. 11, les cordes ox, py sont égales entr' elles. On en conclut l'égalité des segmens oy, px, et par suite celle des rectangles $po \cdot oy$, $op \cdot px$. Par conséquent la tangente or est égale à la tangente ps'.

Ou bien, joignez les contacts réciproques op', po''; le carré de la tangente or est égal au rectangle $p'o \cdot oy'$ et le carré de la tangente ps' est égal au rectangle $o''p \cdot px'$. Or, par le théorème Nr. 12, les segmens $p'o$, $o''p$ sont égaux entr' eux, et pareillement les cordes $p'y'$, $o''x'$. En réunissant, on en conclut l'égalité des segmens oy', px', et par suite celle des rectangles $po \cdot oy'$, $o''p\, px$. Donc la la tangente or est égale à ps'.

14. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc, et des cercles tangens D, E, étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca, touchant les côtés bc, ca, en o, p, et la sécante Mc, en o'', p'; le carré de chacune des deux tangentes or, ps', qu'on aura menées de chaque contact au cercle opposé, est équivalent au double du rectangle des cordes de contingence oo'', pp', plus le carré de la commune tangente intérieure $o''p'$ ou tt' aux cercles D, E.*

Le carré de la tangente ps' est équivalent au rectangle $o''p \cdot px'$. Le segment px' est composé des deux cordes $''ox'$, pt' égales entr'elles par le théorème du Nr. 12, et du segment $o''t'$. On aura donc

$$cr^2 = ps'^2 = 2x'o'' \cdot o''p + t'o'' \cdot o''p.$$

Les triangles $t'o''p'$, $p'o''p$, étant semblables, le carré de la tangente $o''p'$ est égal au rectangle $t'o''\cdot o''p$. Donc

$$or^2 = ps'^2 = 2x'o''\cdot o''p^2 + t'o''\cdot o''p.$$

Par le contact o'' menez la corde $o''\gamma$ parallèle à la corde de contingence pp'. Il est évident alors que les angles $pp'o''$, $p'o''\gamma$, $o''x'\gamma$ sont égaux entr'eux, et que les angles $p'po''$, $x'o''\gamma$ le sont pareillement. Donc les triangles $o''x'\gamma$, $pp'o''$ sont semblables, ce qui donne

$$pp' : o''p = x'o'' : o''\gamma.$$

Or, puisque $o''\gamma$ est parallèle à pp', l'angle $Mo''\gamma$ est égal à $cp'p$, ou à $co''o$. Donc les cordes oo'', $o''\gamma$ sont égales, étant également inclinées vers la tangente co''. On aura donc

$$pp' : o''p = x'o'' : oo''$$

ou

$$x'o''\cdot o''p = oo''\cdot pp'.$$

Donc

$$or^2 = ps'^2 = 2oo''\cdot pp' + o''p'^2$$

ce qu'il fallait démontrer.

15. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle* bca *étant divisé en deux parties égales par la sécante* Mc, *et des cercles tangens* D, E *étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles* bcM, Mca, *touchant les côtés* bc, ca, *en* o, p, *et la secante* Mc *en* o'', p'; *le double carré de la ligne qui joint les contacts réciproques* op' *ou* po'', *est égal à la somme des carrés faits sur la tangente* or *ou* ps', *menée d'un contact au cercle opposé, et sur la commune tangente intérieure* $o''p'$ *des cercles.*

On a par le théorème Nr. 14

$$2oo''\cdot pp' + o''p'^2 = or^2$$

donc

$$2oo''\cdot pp' + 2o''p'^2 = or^2 + o''p'^2.$$

Or par le même théorème on aura

$$oo''\cdot pp' = x'o''\cdot o''p,\ o''p'^2 = t'o''\cdot o''p.$$

Additionnant, on trouve

$$oo''\cdot pp' + o''p'^2 = x't'\cdot o''p = o''p'$$

substituant, on obtient

$$2op'^2 = 2po''^2 = or^2 + o''p'^2 = ps'^2 + o''p'^2.$$

16. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc, et des cercles tangens D, E étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca, touchant les côtés bc, ca, en o, p; si de ces contacts on mène aux cercles opposés, et dans le même sens par rapport aux centres, des tangentes or, ps', qui se coupent mutuellement en N, le quadrilatère $Nocp$ sera circonscriptible à un cercle f tel, que la double distance du sommet de l'angle c aux points de contingence de ce cercle sur les côtés de l'angle bca, est égale à la somme des tangentes oc, cp, diminuée de la tangente or ou ps'.*

Supposons que le cercle f soit tangent aux côtés No, oc, pc, en l, k, k', respectivement, on aura

$$oc = ok' + ck',\ cp = ck + kp,\ ck = ck'$$

et puisque lr, kp sont les communes tangentes extérieures aux cercles E, f, on aura

$$ok' + kp = ol + lr = or.$$

Il suit de-là d'abord

$$1)\quad 2ck = oc + cp - or.$$

Supposons qu'il soit possible de décrire un second cercle f', qui satisfasse à la condition d'être tangent aux côtés oc, cp, pN, en k''', k'', m respectivement, on aura

$$oc = ok''' + ck''',\quad cp = ck'' + pk'',$$
$$ck''' = ck'',\quad pk'' = mp$$

et puisque ms', ok''', sont les communes tangentes extérieures des cercles D, f, on aura

$$ok''' + pk'' = ms' + mp = ps'$$

ce qui donne

$$2)\quad 2ck'' = oc + cp - ps'.$$

Or, par le théorème Nr. 13, les tangentes or, ps' sont égales entr'elles. Par conséquent il résulte des deux équations indiquées, que les tangentes ck, ck'', sont égales entr'elles; c'est-à-dire que les cercles f, f', ont les mêmes contacts sur les côtés bc, ca. Il s'ensuit que les cercles f, f', doivent nécessairement se confondre. Donc le quadrilatère $Nocp$ est circonscriptible à un cercle f, qui touche les côtés No, oc, cp, pN, en l, k', k, m, respectivement, de sorte que

$$2ck' = 2ck = oc + cp - or$$

$$\text{ou } 2ck' = 2ck = oc + cp - ps'.$$

17. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc, et des cercles tangens D, E, étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca, touchant les côtés bc, ca, en o, p; puis de ces contacts étant menées aux cercles opposés, et dans le même sens par rapport aux centres, des tangentes or, ps', qui se coupent mutuellement en N; et dans le quadrilatère $Nocp$ étant inscrit un cercle f, qui touche le côté ca en k; si du sommet c et dans le sens du côté ca, on porte un segment cG égal à la somme des tangentes oc, cp; le rectangle $cf \cdot Gk$ est équivalent au rectangle des tangentes oc, cp.*

Soit λ l'intersection de la tangente or par le côté ca, le cercle f sera inscrit au triangle $oc\lambda$, et ainsi les angles de ce triangle seront divisés en deux parties égales par les lignes fo, fc, $f\lambda$. Les cercles E, f, étant tangens aux droites $o\lambda$, $c\lambda$, la ligne $fE\lambda$ sera droite. Il suit de-là que l'angle Efp' est égal à la somme des angles $fc\lambda$, $f\lambda c$, ou à la demi-somme des angles $oc\lambda$, $c\lambda o$, c'est-à-dire égal à l'excès d'un droit sur la moitié de l'angle $co\lambda$. D'où il suit que l'angle fEp' est égal à la moitié de l'angle $co\lambda$. Donc, la perpendiculaire $c\delta$ étant abaissée sur of prolongée, les triangles $Ep'f$, $o\delta c$ sont semblables, d'où l'on tire la proportion

$$1)\quad fp' : Ef = c\delta : oc.$$

Observons de plus que, l'angle Efp' valant la somme de $fc\lambda$, $f\lambda c$, ou de fco, $f\lambda k$, et ce même angle Efp' étant égal à $oc\delta$, ou à la somme de fco, $fc\delta$, les angles $f\lambda k$, $fc\delta$, doivent être égaux entr'eux, et que, par conséquent, les triangles rectangles $f\lambda k$, $fc\delta$, sont semblables, ce qui donne la proportion

$$f\lambda : \lambda k = cf : c\delta$$

ou

$$2)\quad Ef : kp = cf : c\delta.$$

Les deux proportions 1. 2. donnent *ex aequo*

$$fp' : kp = cf : oc$$

$$cf + fp' = cp' = cp, \quad oc + kp = Gp + kp = Gk$$

donc

$$cp : Gk = cf : oc$$

ou

$$3)\quad cf \cdot Gk = oc \cdot cp.$$

18. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc; des cercles tangens D, E, étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca, touchant les côtés bc, ca, en o, p, et la sécante Mc en o″, p′; de ces contacts étant menées aux cercles opposés, et dans le même sens par rapport aux centres, des tangentes or, ps′, qui se coupent mutuellement en N; dans le quadrilatère Nocp étant inscrit un cercle f, tangent aux côtés No, oc, cp, pN, en l, k′, k, m, respectivement; cela posé:*

Parmi les deux tangentes lo, mp, celle qui est la plus grande sera égale à la demi-somme des tangentes or, o″p′; et l'autre sera égale à la demi-différence de or, o″p′.

Le rectangle de ces tangentes lo, mp, est égal à la moitié du rectangle des cordes de contingence oo″, pp′.

La somme des carrés des mêmes tangentes lo, mp, est égale au carré de la droite op′ ou po″, qui joint les contacts réciproques.

Si des contacts de la sécante Mc *on abaisse des perpendiculaires* $p'\varepsilon$, $o''\zeta$, *sur les côtés, le segment* kp *est divisé en* ε *dans le même rapport qne la tangente* co *en* k'; *et le segment* $k'o$ *est divisé en* ζ *dans le même rapport que la tangente* cp *en* k.

Enfin, la commune tangente intérieure tt' *aux cercles* D, E, *va passer par l'intersection* N *des tangentes* or, ps'.

Pour démontrer ces différentes propositions, on reconnaît d'abord que,

$$or = lo + lr = lo + kp = lo + mp$$

$$o''p' = o''c - cp' = oc - cp = ok' - kp = lo - mp.$$

Additionnant et retranchant, on obtient

$$1)\quad \begin{cases} 2lo = or + o''p' \\ 2mp = or - o''p'. \end{cases}$$

Puis, le théorème Nr. 17 donnait la proportion

$$fp' : kp = cf : oc.$$

Les droites $p'\varepsilon$, fk, étant perpendiculaires sur ca, donnent la proportion

$$k\varepsilon : fp' = ck : cf.$$

On en conclut *ex aequo*

$$k\varepsilon : kp = ck : oc = ck' : oc$$

dividendo

$$2)\quad k\varepsilon : \varepsilon p = ck' : k'o.$$

On aura pareillement les proportions, par le Nr. 17

$$fo'' : k'o = cf : cp$$

$$k'\zeta : fo'' = ck' : cf$$

qui donnent *ex aequo*

$$k'\zeta : k'o = ck' : cp = ck : cp$$

et *dividendo*

$$3)\quad k'\zeta : \zeta o = ck : kp.$$

Puis, reprenant la proportion

$$k\varepsilon : kp = ck' : oc$$

elle donne *dividendo*

$$\varepsilon p : kp = k'o : oc$$

on a aussi

$$pp' : \varepsilon p = oc : \tfrac{1}{2}oo''$$

donc *ex aequo*

$$pp' : kp = k'o : \tfrac{1}{2}oo''$$

ou

$$pp' : mp = lo : \tfrac{1}{2}oo''$$

ce qui donne, conformément à l'énoncé du théorème,

$$4)\quad lo\cdot mp = \tfrac{1}{2}oo''\cdot pp'.$$

Ensuite le théorème Nr. 14 donnait l'équation

$$or^2 = 2oo''\cdot pp' + o''p'^2.$$

Substituant la valeur du rectangle $oo''\cdot pp'$, on aura

$$or^2 = 4lo\cdot mp + o''p'^2.$$

Or puisque

$$or = lo + mp$$

on aura

$$or^2 = lo^2 + mp^2 + 2lo\cdot mp.$$

Substituant, et effaçant ce qui se détruit, on obtient

$$lo^2 + mp^2 = 2lo\cdot mp + o''p'^2.$$

Substituant la valeur du rectangle

$$2lo\cdot mp = \tfrac{1}{2}or^2 - \tfrac{1}{2}o''p'^2$$

on aura

$$lo^2 + mp^2 = \tfrac{1}{2}or^2 + \tfrac{1}{2}o''p'^2\,;$$

le théorème Nr. 15 donne,

$$or^2 + o''p'^2 = 2op'^2$$

donc, conformément à l'énoncé

$$5)\quad lo^2 + mp^2 = op'^2 = po''^2.$$

En considérant les deux tangentes Ns', Nr, on reconnaît facilement que

$$Ns' = ms' - Nm = ok' - Nm$$
$$Nr = lr - Nl = kp - Nl$$
$$Nl = Nm$$

donc

$$Ns' - Nr = ok' - kp = oc - cp$$

ou

$$6)\quad Ns' - Nr = o''c - cp' = o''p' = tt'.$$

Actuellement supposons que la tangente tt' n'aille pas passer par N, mais qu'elle coupe la tangente or en N'. S'il était possible que N' fût entre les points o, N, on aurait Ns' plus grand que $N't$, et Nr moindre que $N't'$; donc $Ns' - Nr$ plus grand que $N't - N't'$, c'est-à-dire plus grand que tt', ce qui est contraire à l'équation 6. Si N' était entre les points N, r, on aurait Ns' moindre que $N't$, et Nr plus grand que $N't$, par conséquent $Ns' - Nr$ moindre que $N't - N't'$, c'est-à-dire moindre que tt', ce qui est pareillement contraire à l'équation 6. Donc les points N, N', doivent nécessairement se confondre, c'est-à-dire que la tangente tt' suffisamment prolongée va passer par l'intersection N des tangentes or, ps'.

19. *Théorème.*

(Fig. 3.) *L'angle bca étant divisé en deux parties égales par la sécante Mc; et des cercles tangens* **D**, *E, étant inscrits comme on voudra dans les demi-angles bcM, Mca, touchant les côtes bc, ca, en o, p, et la sécante Mc en* o'', p'; *la distance de ces contacts* $o''p'$ *est divisée harmoniquement, ou en segmens proportionnels par le sommet c et la ligne des centres* **DE**; *de sorte que, w étant l'intersection de la ligne des centres avec la sécante Mc, la distance cw soit la moyenne harmonique entre les tangentes oc, cp.*

Cela veut dire que la moyenne proportionnelle entre les tangentes oc, cp, est aussi moyenne proportionnelle entre les moyennes harmoniques et arithmétiques de ces tangentes oc, cp.

En effet, l'angle du triangle DcE étant divisé en deux parties égales par $c\varpi$, on aura

$$D\varpi : \varpi E = Dc : cE$$

les triangles rectangles semblables $D\varpi o''$, $E\varpi p'$, donnent

$$D\varpi : \varpi E = o''\varpi : \varpi p'.$$

Les triangles rectangles semblables $Do''c$, $Ep'c$, donnent

$$Dc : cE = o''c : cp'.$$

De ces trois proportions on conclut sur le champ

$$1)\quad \begin{cases} o''\varpi : \varpi p' = o''c : cp' \\ \varpi o'' : o''c = \varpi p' : p'c. \end{cases}$$

L'énoncé de ces proportions est que la tangente $o''p'$ est divisée intérieurement en ϖ dans le même rapport qu'extérieurement en c; ou que $c\varpi$ est divisée intérieurement en p', dans le même rapport qu'extérieurement en p'; ce qui constitue la nature de la *section harmonique*.

La proportion précédente se présente sous la forme

$$oc - c\varpi : c\varpi - cp = oc : cp.$$

Retranchant le premier membre du troisième, et le second du quatrième, on obtient

$$c\varpi : 2cp - c\varpi = oc : cp$$

et de là

$$c\varpi : 2cp = oc : oc + cp$$

ou

$$2)\quad c\varpi : cp = oc : \frac{oc + cp}{2}.$$

Soit P la moyenne proportionnelle entre les tangentes oc, cp, on aura

$$cp : P = P : oc$$

et *ex aequo*

$$3)\quad c\varpi : P = P : \frac{oc + cp}{2}$$

ce qu'il fallait démontrer.

20. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle* abc *étant inscrit un cercle* M, *qui touche les côtés* bc, ca, ab *en* A, B, C, *respectivement, qui coupe les sécantes prolongées* Ma, Mb, Mc *en* x, y, z, *respectivement, et dont le rayon est désigné par la lettre* ϱ, *pour abréger. Des cercles* D, E, F, *étant inscrits dans les triangles* Mbc, Mca, Mab, *de sorte que le cercle* D *soit tangent à* bc, Mb, Mc *en* o, o', o''; *le cercle* E *à* ca, Mc, Ma *en* p, p', p''; *le cercle* F *à* ab, Ma, Mb *en* q, q', q''.

Cela posé, la tangente menée du point o *au cercle* E, *ou du point* p *au cercle* D, *est égale à* xq' *ou à* yq''. *La tangente menée du point* p *au cercle* F, *ou du point* q *au cercle* E, *est égale à* yo' *ou à* zo''. *La tangente menée du point* q *au cercle* D, *ou du point* o *au cercle* F, *est égale à* zp' *ou à* xp''.

Démonstration.

Prenons d'abord sur les côtés ca, ab, les segmens $\alpha a = \alpha' a = Ma$, sur les côtés ab, bc, les segmens $\beta b = \beta' b = Mb$, sur les côtes bc, ca, les segmens $\gamma c = \gamma' c = Mc$. On obtient par là

$$\gamma c = Mc, \quad oc = o''c, \quad \text{donc } \gamma o = Mo''$$
$$\beta' b = Mb, \quad ob = o'b, \quad \text{donc } \beta' o = Mo'.$$

Or les deux tangentes Mo', Mo'', sont égales; donc les quatre lignes sont égales entr'elles, savoir:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} Mo' = Mo'' = \gamma o = \beta' o \\ Mp' = Mp'' = \alpha p = \gamma' p \\ Mq' = Mq'' = \beta q = \alpha' q. \end{array} \right.$$

Il suit de là qu'on obtient facilement les contacts o, p, q, en fixant d'abord les points α, α', β, β', γ, γ', et en divisant ensuite les segmens $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$ en deux parties égales en o, p, q.

Puisque

$$bo = b\beta' - \beta' o = Mb - \beta' o$$
$$oc = \gamma c - \gamma o = Mc - \gamma o.$$

On conclura par les équations 1. les suivantes:

$$2)\ \left\{\begin{array}{ll} bo - oc = Mb - Mc, & bo + oc = bc \\ cp - pa = Mc - Ma, & cp + pa = ca \\ aq - qb = Ma - Mb, & aq + qb = ab. \end{array}\right.$$

Additionnant et retranchant, on obtient

$$3)\ \left\{\begin{array}{ll} 2bo = bc + Mb - Mc, & 2oc = bc + Mc - Mb \\ 2cp = ca + Mc - Ma, & 2pa = ca + Ma - Mc \\ 2aq = ab + Ma - Mb, & 2qb = ab + Mb - Ma. \end{array}\right.$$

Puisque

$$Mb + Mc = Mo' + Mo'' + bo' + o''c$$

et que

$$Mo' = Mo'', \quad bo' + o''c = bo + oc = bc$$

on en conclura

$$Mb + Mc = 2Mo' = bc$$

d'où l'on tire les équations suivantes:

$$4)\ \left\{\begin{array}{l} 2Mo' = 2Mo'' = Mb + Mc - bc \\ 2Mp' = 2Mp'' = Mc + Ma - ca \\ 2Mq' = 2Mq'' = Ma + Mb - ab. \end{array}\right.$$

En traitant de la même manière les contacts A, B, C, du cercle inscrit M, on obtient

$$5)\ \left\{\begin{array}{l} 2Ab = 2cB = bc + ca - ab \\ 2Ba = 2aC = ca + ab - bc \\ 2Cb = 2bA = ab + bc - ca. \end{array}\right.$$

Pour la commune tangente intérieure $o''p'$ aux cercles D, E, on aura:

$$o''p' = o''c - cp', \qquad 2o''p' = 2oc - 2cp$$

les équations 3 donnent

$$2oc = bc + Mc - Mb$$
$$2cp = ca + Mc - Ma.$$

On aura donc

$$2o''p' = Ma + bc - (Mb + ca).$$

Pour la commune tangente extérieure Cq aux cercles M, F, on aura

$$2Cq = 2aq - 2aC.$$

Les équations 3), 5) donnent

$$\begin{aligned} 2aq &= ab + Ma - Mb \\ 2aC &= ca + ab - bc \end{aligned}$$

on aura donc

$$2Cq = Ma + bc - (Mb + ca).$$

Comparant les valeurs trouvées de $o''p'$ et Cq, on est conduit à la conclusion importante que *la commune tangente intérieure $o''p'$ aux cercles D, E, est égale à la commune tangente extérieure aux cercles M, F. Et ainsi des autres.*

En conséquence de cela on aura les équations:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} 2o''p' &= 2Cq = Ma + bc - (Mb + ca) \\ 2p''q' &= 2Ao = Mb + ca - (Mc + ab) \\ 2q''o' &= 2Bp = Mc + ab - (Ma + bc) \end{aligned}\right.$$

qui supposent que aq soit plus grand que aC; bo plus grand que bA; cp plus grand que cB. Si le contraire avait lieu, il faudrait changer les signes des termes du second membre de ces équations.

Joignant $M\gamma$, $M\gamma'$, et achevant les parallélogrammes $Mo''od$, $Mp'pe$, il est évident que les segmens Md, Me, sont égaux aux cordes de contingence oo'', pp', respectivement, et que les triangles γod, $\gamma' pe$, semblables aux triangles $Mc\gamma$, $Mc\gamma'$, sont isoscèles. Or les points o, p, sont les milieux des segmens $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$. Donc, les lignes do, γo, $\beta' o$, et ep, $\gamma' p$, αp, étant égales entr'elles, les lignes $\beta' d$, αe, sont perpendiculaires sur $M\gamma$, $M\gamma'$, respectivement, ou parallèles aux lignes Dc, Ec.

Dans le cercle M, inscrit au triangle abc, menez un diamètre GH perpendiculaire sur la sécante Mc: vous aurez les angles

$$GM\gamma = AM\gamma = HM\gamma' = BM\gamma' = \frac{c}{4}$$

et les rayons

$$MG = MA = MH = MB.$$

Il suit de là que les quatre triangles $MG\gamma$, $MA\gamma$, $MH\gamma'$, $MB\gamma'$, sont égaux entr'eux, et que si l'on élève des perpendiculaires GO, HP, sur le diamètre GH, elles vont passer par les points γ, γ'. On en conclura encore que, joignant Gd, Ad, He, Be, les triangles MGd, MAd, de même que les triangles MHe, MBe, sont égaux entr'eux.

Le quadrilatère $MdA\beta'$ étant inscriptible au cercle à cause des angles droits $MA\beta'$, $Md\beta'$, on aura les angles

$$Ad\beta' = AM\beta' = \tfrac{b}{4}$$

donc

$$MdG = MdA = 90^\circ + \tfrac{b}{4}.$$

Si la droite prolongée Gd rencontre la ligne des centres MD en f, on aura l'angle $bMc = 180^\circ - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$ l'angle $DMc = 90^\circ - \frac{b}{4} - \frac{c}{4}$, l'angle $cM\gamma' = 90^\circ - \frac{c}{4}$, et par suite l'angle $DM\gamma' = dMf = \frac{b}{4}$, ce qui donne

$$MdG = 90^\circ + dMf.$$

Par conséquent l'angle MfG est droit. On parvient à démontrer, par un raisonnement analogue que, la ligne prolongée He rencontrant la ligne des centres ME en g, l'angle MgH est droit.

Prenez les perpendiculaires GO, HP, égales au rayon du cercle inscrit M; joignez MO, MP, qui sont coupées en Q, R, par les droites prolongées Gdf, Heg. On aura alors les angles

$$\begin{aligned} GMO = HMP &= 45^\circ = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} \\ GMd = HMe &= \frac{c}{4} \\ dMf = CM\beta &= \frac{b}{4} \\ eMg = CM\alpha' &= \frac{a}{4}. \end{aligned}$$

Il suit delà que les angles

$$\begin{aligned} fMQ = CM\alpha' = eMg &= \frac{a}{4} \\ gMR = CM\beta = dMf &= \frac{b}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent les triangles rectangles dMf, $AM\beta'$, $CM\beta$, gMR, sont semblables. Pareillement les triangles rectangles gMe, $BM\alpha$, $CM\alpha'$, fMQ, sont semblables. En les combinant deux à deux, on reconnaît encore que les triangles dMQ, RMe, $\beta M\alpha'$, sont semblables. Les deux premiers de ces triangles donnent

$$Md : QM = MR : Me.$$

Elevez en Q, R, des perpendiculaires sur MO, MP, qui rencontrent le diamètre prolongé GH en K, L, les triangles rectangles MQK, MRL, étant isoscèles, donnent la proportion

$$QM : KM = ML : 2MR$$

ces deux proportions donnent *ex aequo*

$$Md : KM = ML : 2Me$$

ou

$$oo'' : KM = ML : 2pp'$$

ou

$$7)\ 2oo''\cdot pp' = KM\cdot ML.$$

Les quadrilatères $KGQO$, $LHRP$, sont inscriptibles au cercle à cause des angles droits KGO, KQO, et LHP, LRP. On aura donc les angles

$$KOG = KQG = fMQ = CM\alpha' = \frac{a}{4}$$

$$LPH = LRH = gMR = CM\beta = \frac{b}{4}$$

$$GO = HP = MC.$$

Il suit de là que les triangles rectangles OGK, $MC\alpha'$, et PHL, $MC\beta$, sont égaux entr'eux, ce qui donne

$$GK = C\alpha' = q\alpha' + Cq = Mq' + o''p'$$

$$LH = C\beta = q\beta - Cq = Mq' - o''p'$$

et puisque

$$MG = MH = Mx = My$$

on aura

$$KM = Mx + Mq' + o''p' = xq' + o''p'$$

$$ML = Mx + Mq' + o''p' = xq' + o''p'$$

par conséquent le rectangle

$$KM \cdot ML = xq'^2 - o''p'^2.$$

Substituant dans l'équation 7., on obtient

$$2 \cdot oo'' \cdot pp' = xq'^2 - o''p'^2$$

donc

$$xq'^2 = 2 \cdot oo'' \cdot pp' + o''p'^2.$$

Or, on a par le théorème No. 14.

$$or^2 = ps'^2 = 2 \cdot oo'' \cdot pp' + o''p'^2.$$

D'où l'on tire

$$8) \quad or = ps' = xq' = yq'' = \varrho + Mq' = \varrho + Mq''$$

conformément à l'énoncé du théorème, puisque *or* est la tangente menée du point *o* au cercle *E*, et *ps'* la tangente menée du point *p* au cercle *D*. Pour les autres tangentes, on se convaincra par un procédé analogue que celle qu'on mène de *p* au cercle *F*, ou de *q* au cercle *E*, doit être égale à $\varrho + Mo' = \varrho + Mo''$, et que celle qu'on mène de *q* au cercle *D*, ou de *o* au cercle *F*, est égale à $\varrho + Mp' = \varrho + Mp''$.

21. Théorème.

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits des cercles D, E, F, et les lignes des centres EF, FD, DE, coupant les sécantes Ma, Mb, Mc en u, v, w; si l'on joint les droites ou, pv, qw, chacune d'elles sera tangente aux deux cercles adjacents parmi les trois cercles D, E, F.*

Du contact *o* soient menées les tangentes *or*, *or'*, aux cercles *E*, *F*, et on aura par le théorème No. 20

$$or = \varrho + Mq' = xq', \quad or' = \varrho + Mp'' = xp''$$

d'où l'on conclut

$$1) \quad \begin{cases} Eo^2 = xq'^2 + Ep''^2 \\ Fo^2 = xp''^2 + Fq'^2, \end{cases}$$

Abaissant la perpendiculaire oh sur la ligne des centres EF, on aura les équations connues:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} Eo^2 = ou^2 + Eu^2 - 2Eu\cdot uh \\ Fo^2 = ou^2 + Fu^2 - 2Fu\cdot uh. \end{array}\right.$$

La substitution donne:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} ou^2 + Eu^2 - 2Eu\cdot uh = xq'^2 + Ep''^2 \\ ou^2 + Fu^2 + 2Fu\cdot uh = xp''^2 + Fq'^2. \end{array}\right.$$

On aura encore à cause des angles droits $Ep''u$, $Fq'u$,

$$Eu^2 = Ep''^2 + up''^2$$
$$Fu^2 = Fq'^2 + uq'^2.$$

Substituant et effaçant ce qui se détruit, on obtient

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} ou^2 + up''^2 - 2Eu\cdot uh = xq'^2 \\ ou^2 + uq'^2 + 2Fu\cdot uh = xp''^2. \end{array}\right.$$

Prenant la différence de ces équations, on trouve

$$2\cdot EF\cdot uh - up''^2 + uq'^2 = xp''^2 - xq'^2.$$

Puisque

$$up''^2 - uq'^2 = (up'' + uq')\ (up'' - uq') = p''q'.\ (up'' - uq')$$
$$xp''^2 - xq'^2 = (xp'' - xq')\ (xp'' + xq') = p''q'.\ (xp'' + xq').$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente donne

$$5)\quad 2\cdot EF\cdot uh = p''q'\cdot\ (xp'' - uq' + xq' + up'').$$

Or puisque

$$xp'' = xq' + uq' + up''$$

on aura

$$xp'' - uq' = xq' + up''$$

et par conséquent,

$$xp'' - uq' + xq' + up'' = 2\,(xq' + up'').$$

Substituant et effaçant les facteurs égaux, on trouve

$$6)\quad EF\cdot uh = p''q'\cdot(xq' + up'')$$

ou

$$p''q' : EF = uh : xq' + up''.$$

Prenant le segment $p''k = xq$, on aura $xq' + up'' = uk$ et la proportion devient

$$p''q' : EF = uh : uk.$$

Menant El parallèle à la sécante Mc, et rencontrant en l le rayon prolongé Fp', il est évident que dans le rectangle $Ep''q'l$, on aura $p''q' = El$; et la proportion deviendra

$$7)\ El : EF = uh : uk.$$

Cette proportion fait reconnaître que les triangles FEl, kuh, sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal $FEl = kuh$ (à cause des parallèles El, uk), compris entre deux côtés proportionnels FE, El, et ku, uh. Donc joignant kh, l'angle khu est égal à l'angle droit FlE. Or la droite oh a été menée perpendiculairement sur EF. Donc *les lignes* oh, hk, *étant perpendiculaires, chacune sur* EF, *ne font qu'une seule et même droite* ohk.

Le segment kp'' est tangent au cercle E en p'', et égal au segment xq', tangent au cercle F en q', et égal par le théorème No. 20, à la tangente or menée du point o au cercle E. Donc les triangles rectangles $kp''E$, orE, sont égaux entr'eux, parce que leurs côtés le sont. Par conséquent leurs hypoténuses Ek, Eo, sont égales entr'elles, c'est-à-dire que le triangle kEo est isoscèle. Donc la base de ce triangle, étant perpendiculaire sur Eh, est divisée en deux parties égales en h. Donc, cette même base étant perpendiculaire sur uh, le triangle kuo sera isoscèle pareillement. Il suit de là que l'angle au sommet kuo est divisé en deux parties égales par la ligne des centres EF, c'est-à-dire que les droites xu, ou, sont également inclinées, de part et d'autre, vers la ligne des centres EF. Or la droite xu touche les deux circonférences E, F. Par conséquent *la droite* ou *sera pareillement tangente aux deux circonférences* E, F; ce qu'il fallait démontrer.

De la même manière on parvient à démontrer *que* pv *est tangente aux cercles* F, D, *et que* qw *est tangente aux cercles* D, E.

22. *Démonstration de la solution contenue dans le No.* 10.

(Fig. 2.) On a divisé en deux parties égales les angles du triangle *abc*, par les sécantes *Ma*, *Mb*, *Mc;* et dans les triangles *Mbc, Mca*, *Mab*, on a inscrit les cercles *D*, *E*, *F*, tangens aux côtés *bc*, *ca*, *ab*, en *o*, *p*, *q*. Les lignes des centres *EF*, *FD*, *DE*, étant coupées par les sécantes *Ma*, *Mb, Mc,* en *u*, *v*, *w*, on a joint les droites *ou*, *pv*, *qw*.

Cela posé, le théorème No. 21 fait d'abord reconnaître que la droite *ou* doit être tangente aux cercles *E*, *F*; la droite *pv* aux cercles *F*, *D;* et la droite *qw* aux cercles *D*, *E*.

Ensuite, puisque les droites *ou*, *pv*, sont tangentes aux cercles *E*, *D*, respectivement, et que *qw* est la commune tangente intérieure de ces cercles, on conclura par le théorème No. 18, que *qw* doit passer par l'intersection des *ou*, *pv*, et que par conséquent les trois droites *ou, pv*, *qw*, doivent se couper mutuellement dans un même point *N*.

Puis, par le théorème No. 16, les trois quadrilatères *Nocp*, *Npaq*, *Nqbo*, seront circonscriptibles à des cercles.

Reste donc à prouver que, si on leur inscrit les cercles *f, d*, *e*, chacune des droites *ou*, *pv*, *qw*, soit tangente, dans un seul et même point, à deux cercles adjacents, parmi les trois *d*, *e*, *f*.

Pour cela, supposons que le cercle *D* touche les sécantes *Mb*, *Mc*, en o', o''; le cercle *E* les sécantes *Mc*, *Ma* en p', p''; le cercle *F* les sécantes *Ma*, *Mb*, en q', q''; le cercle *M* les côtés *bc*, *ca*, *ab*, en *A*, *B*, *C*; que le rayon de ce cercle *M* soit désigné par la lettre ϱ.

Si l'on mène la tangente *or* au cercle *E*, et que le cercle *f* inscrit dans le quadrilatère *Nocp* touche les côtés *No*, *Np*, en *l*, *m*, on aura par le théorème No. 18

$$2lo = or + o''p'$$

$$2mp = or - o''p'$$

et par le théorème No. 20·

$$or = \varrho + Mq'$$

$$\begin{gathered}
2Mq' = Ma + Mb - ab \\
2o''p' = Ma + bc - (Mb + ca) \\
2Mq' + 2o''p' = 2Ma - (ca + ab - bc) \\
2Mq' - 2o''p' = 2Mb - (ab + bc - ca) \\
2Ba = ca + ab - bc \\
2Cb = ab + bc - ca \\
Mq' + o''p' = Ma - Ba \\
Mq' - o''p' = Mb - Cb
\end{gathered}$$

d'où l'on déduit les équations

$$1)\quad \begin{cases} 2lo = \varrho + Ma - Ba \\ 2mp = \varrho + Mb - Cb. \end{cases}$$

Si l'on mène la tangente ps au cercle F, et que le cercle d inscrit dans le quadrilatère $Npaq$ touche les côtés Np, Nq, en m', n, on aura par le théorème No. 18:

$$\begin{gathered}
2m'p = ps + p''q' \\
2nq = ps - p''q'
\end{gathered}$$

et par le théorème No. 20:

$$\begin{gathered}
ps = \varrho + Mo' \\
2Mo' = Mb + Mc - bc \\
2p''q' = Mb + ca - (Mc + ab) \\
2Mo' + 2p''q' = 2Mb - (ab + bc - ca) \\
2Mo' - 2p''q' = 2Mc - (bc + ca - ab) \\
2Cb = ab + bc - ca \\
2Ac = bc + ca - ab \\
Mo' + p''q' = Mb - Cb \\
Mo' - p''q' = Mc - Ac
\end{gathered}$$

d'où l'on déduit les équations:

$$2)\quad \begin{cases} 2m'p = \varrho + Mb - Cb \\ 2nq = \varrho + Mc - Ac. \end{cases}$$

Si l'on mène la tangente qt au cercle D, et que le cercle e inscrit dans le quadrilatère $Nqbo$ touche les côtés Nq, No, en n', l', on aura par le théorème No. 18

$$2 \cdot n'q = qt + q''o'$$
$$2\,l'o = qt - q''o'$$

et par le théorème No. 20,

$$qt = \varrho + Mp'$$
$$2Mp' = Mc + Ma - ca$$
$$2q''o' = Mc + ab - (Ma + bc)$$
$$2Mp' + 2q''o' = 2Mc - (bc + ca - ab)$$
$$2Mp' - 2q''o' = 2Ma - (ca + ab - bc)$$
$$2Ac = bc + ca - ab$$
$$2Ba = ca + ab - bb$$
$$Mp' + q''o' = Mc - Ac$$
$$Mp' - q''o' = Ma - Ba$$

d'où l'on déduit les équations:

$$3)\ \left\{\begin{array}{l} 2\,n'q = \varrho + Mc - Ac \\ 2\,l'o = \varrho + Ma - Ba. \end{array}\right.$$

On aura donc les équations

$$4)\ \left\{\begin{array}{l} 2lo = 2l'o = \varrho + Ma - Ba \\ 2mp = 2m'p = \varrho + Mb - Cb \\ 2np = 2n'q = \varrho + Mc - Ac \end{array}\right.$$

qui font reconnaître que les contacts l, l', se confondent, de même que les contacts m, m', et les contacts n, n', ce qu'il fallait démontrer.

Les valeurs des doubles tangentes qu'on vient de trouver, conduisent immédiatement à un théorème, dû à Mr. *Tedenat*, et qui s'énonce comme il suit.

23. *Théorème.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc étant inscrits trois cercles tangens d, e, f, qui se touchent en l, m, n, et qui touchent les côtés du triangle en g, g', h, h',*

k, k'; si l'on inscrit dans le même triangle un cercle M qui en touche les côtes en A, B, C, et qui coupe les sécantes prolongées Ma, Mb, Mc, en x, y, z; et si l'on prend sur les sécantes Ma, Mb, Mc, les ségmens Ra, Sb, Tc réspectivement égaux aux tangentes Ba, Cb, Ac; cela posé, les communes tangentes extérieures des cercles d, e, f, savoir hk', kg', gh', sont égales aux ségmens Rx, Sy, Tz, respectivement.

Les points o, p, q, étant les milieux des tangentes extérieures hk', kg', gh', si l'on joint les tangentes intérieures lo, mp, nq, qui en sont les moitiés, on aura, par la démonstration donnée dans le No. 22, les équations:

$$2lo = hk' = \varrho + Ma - Ba$$
$$2mp = kg' = \varrho + Mb - Cb$$
$$2nq = gh' = \varrho + Mc - Ac.$$

Or, par la construction, on a,

$$\varrho = Mx = My = Mz$$
$$Ma - Ba = MR,\ Mb - Cb = MS,\ Mc - Ac = MT.$$

Substituant, on obtient

$$2lo = hk' = Mx + MR = Rx$$
$$2mp = kg' = My + MS = Sy$$
$$2nq = gh' = Mz + MT = Tz.$$

Remarque.

Il est facile de déduire de ce théorème une solution de notre problème, indépendante de la description des cercles D, E, F.

En effet, ayant pris $\alpha a = \alpha' a = Ma$, $\beta b = \beta' b = Mb$, et $\gamma c = \gamma' c = Mc$, on divisera en deux parties égales les segmens $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, en o, p, q; on prendra sur les sécantes Ma, Mb, Mc, les rayons du cercle M, Mx, My, Mz, et les segmens $Ra = Ba$, $Sb = Cb$, $Tc = Ac$. On obtient par là les segmens Rx, Sy, Tz; et des points o, p, q, on prendra les segmens $oh = ok' = \frac{1}{2}Rx$, $pk = pg' = \frac{1}{2}Sy$, $qg = qh' = \frac{1}{2}Tz$. Ayant déterminé de cette manière les ontacts g, h', h, k', k, g', on y élévera des perpendiculaires sur les côtés, qui se coupent deux à deux dans les sécantes *Ma*, *Mb*, *Mc*, en des points *d*, *e*, *f*, qui seront les centres des cercles demandés. Joignant ces centres, les droites *de*, *ef*, *fd*, doivent être tangentes aux cercles décrits des centres *q*, *o*, *p*, et des diamètres *Rx*, *Sy*, *Tz*, en des points *n*, *l*, *m*, qui sont les points de contingence des cercles *d*, *e*, *f*.

24. *Théorème.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc étant inscrits trois cercles tangens d, e, f, qui se touchent en l, m, n, et les côtés en g, h′, h, k′, k, g′; et un cercle M qui touche les côtés en A, B, C, et qui coupe les prolongemens des sécantes Ma, Mb, Mc, en x, y, z; et ayant décrit des cercles des centres a, b, c, et des rayons Ba, Cb, Ac, qui coupent les sécantes Ma, Mb, Mc, en R, S, T, et leurs prolongemens en R′, S′, T′; cela posé:*

> *la double distance du contact g ou g′ au sommet de l'angle a, est égale à l'excès du segment R′x sur la somme des segmens Sy, Tz; ou bien égale au demi-contour du triangle abc, plus la sécante Ma, moins les sécantes Mb, Mc, et le rayon ρ du cercle M.*

Puis, le double de la commune tangente extérieure Bg′ ou gC, des cercles M, d, est égal à l'excès de la somme des segmens Sy, Tz, sur le segment Rx.

La démonstration du théorème No. 20, donne:

$$2aq = ab + Ma - Mb$$

ou

$$2aq = Ba + Cb + Ma - Mb$$

ou

$$2aq = (\rho + Ma + Ba) - (\rho + Mb - Cb)$$

ou

$$2aq = R'x - Sy$$

le théorème No. 23 donne,

$$2nq = 2gq = Tx.$$

Retranchant, on conclura, puisque $aq - gq = ag$

$$1)\quad \begin{cases} 2ag = 2ag' = R'x - Sy - Tz \\ 2bh = 2bh' = S'y - Tz - Rx \\ 2ck = 2ck' = T'z - Rx - Sy. \end{cases}$$

Ou bien, puisque

$$2aq = Ba + Cb + Ma - Mb$$

et

$$2nq = 2gq = \varrho + Mc - Ac$$

on trouve en retranchant

$$2ag = Ac + Ba + Cb + Ma - Mb - \varrho$$

La somme $Ac + Ba + Cb = \frac{1}{2}U$, étant égale au demi-contour du triangle abc, on obtient:

$$2)\quad \begin{cases} 2ag = \frac{1}{2}U + Ma - Mb - Mc - \varrho \\ 2bh = \frac{1}{2}U + Mb - Mc - Ma - \varrho \\ 2ck = \frac{1}{2}U + Mc - Ma - Mb - \varrho. \end{cases}$$

Ensuite, remarquant que

$$Cg + gq - Cq = nq - Cq$$
$$Ch' + h'q + Cq = nq + Cq$$

et que par le théorème Nr. 20

$$Cq = o''p' = oc - cp$$

ou

$$Cq = k'o - kp = lo - mp$$

on conclura sans peine

$$Bg = gC = mp + nq - lo$$
$$Ch' = hA = nq + lo - mp$$
$$Ak' = kB = lo + mp - nq.$$

Substituant les valeurs du théorème No. 23, on a

$$3)\quad \begin{cases} 2Bg' = 2gC = Sy + Tz - Rx \\ 2Ch' = 2hA = Tz + Rx - Sy \\ 2Ak' = 2kB = Rx + Sy - Tz. \end{cases}$$

Remarque.

Par le moyen des équations de ce théorème, on peut déterminer les contacts g, h', h, k', k, g', sans l'intervention des milieux o, p, q.

25. *Théoreme.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc étant inscrits trois cercles tangens d, e, f, qui se touchent en l, m, n, et les côtes en g, h', h, k', k, g'; et un cercle M, qui touche les côtés en A, B, C, et qui coupe les prolongemens des sécantes Ma, Mb, Mc, en x, y, z; si l'on mene les communes tangentes intérieures lo, mp, nq, et que l'on décrive des cercles des centres a, b, c, et des rayons Ba, Cb, Ac, qui coupent les sécantes Ma, Mb, Mc, en R, S, T; cela posé:*

> *Le rayon du cercle d est quatrième proportionnelle aux communes tangentes intérieures lo, mp, nq, dont la premiere est opposée au cercle d, et les deux autres sont adjacentes.*

Le diamètre du cercle d est quatrième proportionnelle aux communes tangentes extérieures hk', kg', gk', ou aux droites équivalentes Rx, Sy, Tz, dont la première est opposée au cercle d, et les deux autres sont adjacentes.

Ou, ajoutant la sécante Ma au demi-contour du triangle abc, et retranchant les sécantes Mb, Mc, et le rayon du cercle M, le reste est à la tangente Ba, comme le diamètre du cercle d est au rayon du cercle M.

Cette dernière expression est due à Mr. MALFATTI.

Les triangles rectangles elo, olf, les triangles rectangles fmp, pmd, et les triangles rectangles dnq, qne, étant semblables, on aura les équations

$$2)\quad \left\{ \begin{aligned} eh\cdot fk &= lo^2 \\ fk\cdot dg &= mp^2 \\ dg\; eh &= nq^2. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières donnent la proportion:

$$lo^2 : mp^2 = eh : dg$$

ou

$$lo^2 : mp^2 = dg\cdot eh : dg^2$$

ou

$$lo^2 : mp^2 = nq^2 : dg^2.$$

On aura donc les proportions suivantes:

$$2)\ \left\{\begin{array}{l} lo : mp = nq : dg \\ mp : nq = lo : eh \\ nq : lo = mp : fk. \end{array}\right.$$

Ou, doublant chaque terme de ces proportions

$$3)\ \left\{\begin{array}{l} hk' : kg' = gh' : 2dg \\ kg' : gh' = hk' : 2eh \\ gh' : hk' = kg' : 2fk. \end{array}\right.$$

Substituant les expressions données par le théorème No. 23, on aura

$$4)\ \left\{\begin{array}{l} Rx : Sy = Tz : 2dg \\ Sy : Tz = Rx : 2eh \\ Tz : Rx = Sy : 2fk. \end{array}\right.$$

Les triangles semblables BaM, $g'ad$, donnent

$$ag' : Ba = dg' : \varrho$$

ou

$$2ag : Ba = 2dg : \varrho.$$

Or on a par le théorème No. 24

$$2ag = \tfrac{1}{2}U + Ma - Mb - Mc - \varrho.$$

On obtient par-là les expressions trouvées par Mr. Malfatti

$$5)\ \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}U + Ma - Mb - Mc - \varrho : Ba = 2dg : \varrho \\ \tfrac{1}{2}U + Mb - Mc - Ma - \varrho : Cb = 2eh : \varrho \\ \tfrac{1}{2}U + Mc - Ma - Mb - \varrho : Ac = 2fk : \varrho. \end{array}\right.$$

26. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc, étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C; dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles D, E, F, qui touchent les côtés bc, ca, ab, en o, p, q; et de ces points étant menées les tangentes or, ps, qt, aux cercles E, F, D, respectivement; le contour* *du triangle* MAc *est égal à la somme des tangentes* or, oc, cp; *le contour du triangle* Mba *égal à la somme des tangentes* ps, pa, aq; *et le contour du triangle* MCb *égal à la somme des tangentes* qt, qb, bo.

On a par la démonstration du théorème No. 20

$$1)\quad\left\{\begin{aligned} 2\cdot Mq' &= Ma + Mb - ab \\ 2\cdot oc &= bc + Mc - Mb \\ 2\cdot cp &= ca + Mc - Ma \\ bc + ca - ab &= 2Ac. \end{aligned}\right.$$

Additionnant ces quatre équations, effaçant les termes qui se détruisent, et divisant par 2, on obtient l'équation

$$Mq' + oc + cp = Mc + Ac$$

ou

$$\varrho + Mq' + oc + cp = Mc + Ac + MA.$$

Or, par le théorème du No. 20, on sait que

$$\varrho + Mq' = or.$$

On obtient donc les équations suivantes, qu'il fallait démontrer

$$2)\quad\left\{\begin{aligned} or + oc + cp &= Mc + Ac + MA \\ ps + pa + aq &= Ma + Ba + MB \\ qt + qb + bo &= Mb + Cb + MC. \end{aligned}\right.$$

27. *Problème.*

(Fig. 4.) *Un angle donné* bca *étant divisé en deux parties égales par la sécante* Mc, *et dans les demi-angles* bcM, Mca, *étant inscrits comme on voudra des cercles tangens* D, E, *qui touchent les côtés* bc, ca, *en* o, p; *achever le triangle* a, b, c, *tel que si l'on divise les angles* a, b, *en deux parties égales par les sécantes* Ma, Mb, *elles soient tangentes aux cercles donnés* E, D.

Analyse.

La question proposée revient évidemment à trouver le centre du cercle inscrit M. Or le contour du triangle rectangle MAc est donné, puisque, par le le théorème No. 26, il est égal à la somme des tangentes or, oc, cp, qui sont données par l'hypothèse. Donc, les angles du triangle MAc étant connus, on en pourra construire les côtés.

Le cercle décrit du centre c et du rayon $Ac = cB$ coupant la sécante Mc en T, et son prolongement en T'; le cercle M coupant la sécante Mc en z', et son prolongement en z; on aura:

$$Tz = MB + Mc - cB$$
$$T'z = MB + Mc + cB$$

donc la droite

$$T'z = or + oc + cp$$

est donnée

$$\tfrac{1}{2}T'z - Tc = \tfrac{1}{2}MB + \tfrac{1}{2}MC + \tfrac{1}{2}cB - cB$$
$$cz - \tfrac{1}{2}T'z = MB + MC - \tfrac{1}{2}MB - \tfrac{1}{2}Mc - \tfrac{1}{2}cB$$

ou

$$\tfrac{1}{2}T'z - Tc = \tfrac{1}{2}MB + \tfrac{1}{2}Mc - \tfrac{1}{2}cB$$
$$cz - \tfrac{1}{2}T'z = \tfrac{1}{2}MB + \tfrac{1}{2}Mc - \tfrac{1}{2}cB$$

donc

$$\tfrac{1}{2}T'z - Tc = cz - \tfrac{1}{2}T'z$$

si l'on prend le segment

$$em = \tfrac{1}{2}T'z$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}T'z - Tc = cm - Tc = Tm$$
$$cz - \tfrac{1}{2}T'z = cz - cm - mz$$

et par conséquent

$$Tm = mz = \tfrac{1}{2}Tz.$$

Les triangles semblables MTB, MBT', donnent

$$MT : MB = MB : MT'$$

donc

$$MT + MB : MB + MT' = MT : MB$$

ou

$$Tz : T'z = MT : MB.$$

Les triangles semblabes MTB, MBT' donnent encore

$$MT : TB = MB : BT'$$

alternando

$$MT : MB = TM : BT'$$

donc

$$Tz : T'z = TB : BT'.$$

Élevant en m une perpendiculaire sur cm, qui rencontre en n la droite prolongée cE, on aura

$$TB : BT' = mn : cm$$

donc

$$Tz : T'z = mn : cm$$

ou

$$\tfrac{1}{2}Tz : \tfrac{1}{2}T'z = mn : cm$$

donc

$$mn = \tfrac{1}{2}Tz = Tm = mz.$$

Il s'ensuit que l'angle Tnz est droit, et que les angles Tnm, znm, sont de 45°.

On peut remarquer encore que $nz = Tn$, $Tn = Bn$, donc $zn = Bn$. Or $Mz = MB$, donc la droite Mn, est perpendiculaire sur Bz ou parallèle à Bz', et divise l'angle BMz en deux parties égales. Or l'angle $BMz = 90° + \frac{c}{2}$, donc $BMn = zMn = 45° + \frac{c}{4}$. Or l'angle $zMc = Mnc + \frac{c}{4}$. Donc l'angle $Mnc = 45°$.

Élevant des perpendiculaires sur cM, cn, qui se coupent mutuellement en δ, le quadrilatère $cMn\delta$ sera inscriptible au cercle, donc l'angle $c\delta M = Mnc = 45°$, et l'angle $Mc\delta = 45°$.

De plus, puisque l'angle $Tnm = 45°$, et $Mnc = 45°$, on aura $Tnm = Mnc$, donc l'angle $Mnm = Tnc$, donc l'angle $nMm = nTB = nBT$, ce qui fait reconnaître que le quadrilatère $MTBn$ est inscriptible au cercle.

De tout ce qu'on vient d'expliquer, il est facile de tirer la solution suivante.

Solution du problème.

Du contact o, menez la droite or tangentiellement au cercle E. Faites la somme des tangentes or, oc, cp. Sur la sécante qui divise l'angle bca en deux parties égales, portez le segment *cm* égal à la moitié de cette somme. Élevez une perpendiculaire *mn* sur *cm*, qui rencontre la droite prolongée *cE* en *n*. Portez la perpendiculaire *mn* en *mT* et *mz*. Prenez la distance *nB* égale à *nT* ou à *uz*. Élevez sur *cB* une perpendiculaire, qui coupe la sécante *cm* en *M*.

Ou joignez *Bz*, et du point *n* abaissez une perpendiculaire sur *Bz* qui coupe la sécante *cM* en *M*.

Ou appliquez à la sécante *cm* un angle $mc\delta = 45°$, élevez une perpendiculaire sur *cn*, qui rencontre la droite $c\delta$ en δ, et du point δ abaissez une perpendiculaire sur la sécante *cm*, qui la coupe en *M*.

Du point *M* trouvé, menez des droites $Mp''a$, $Mo'b$, tangentiellement aux cercles *E*, *D*, qui rencontrent les côtés de l'angle donné en *a*, *b*.

:28. *Theorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C, qui coupe la sécante Mc en z', et son prolongement en z; du centre c et du rayon $Ac = cB$ étant décrit un cercle, qui coupe la sécante Mc en T, et son prolongement en T'.*

Cela posé, les distances Tz, T'z, et Tz', T'z', d'une intersection de la première circonférence aux deux intersections de la seconde circonférence, seront entr'elles, comme les cathètes d'un triangle rectangle, dont l'angle aigu est quart de l'angle bca.

Et les distances Tz, Tz', et T'z, T'z', d'une intersection de la seconde circonférence aux deux intersections de la première, sont entr'elles comme les cathètes d'un triangle rectangle, dont les angles aigus sont égaux à la somme, et à la différence de 45° et du quart de l'angle bca.

Joignant *BT*, *BT'*, on aura les angles

$$cBT' = BT'c = \tfrac{1}{2} BcM = \tfrac{c}{4}.$$

Les angles *MBc*, *TBT'*, étant droits, si l'on retranche de part et d'autre l'angle commun *TBc*, les angles restans seront égaux, savoir

$$MBT = cBT = \tfrac{c}{4}.$$

Si l'on prolonge la corde BT, qui rencontre en G la circonférence M, et que l'on joigne MG, on aura les angles

$$MGB = MBT = \tfrac{c}{4} = MT'B.$$

Il s'ensuit que le quadrilatère $MGT'B$ est inscriptible au cercle. Partant l'angle GMT' est égal à l'angle droit GBT', c'est à dire que le rayon MG est perpendiculaire sur la sécante Mc. Joignant BT', qui rencontre la circonférence M en H, l'angle GBH est droit, donc GH est un diamètre coïncidant avec le rayon MG, et par suite perpendiculaire sur la sécante Mc. Il en résulte que le quadrilatère $GzHz'$ est un carré, et que les angles $GBz' = GBz = HBz = 45°$, c'est-à-dire que *l'angle TBT', et son adjacent sont divisés en deux parties égales par les cordes Bz', Bz.* On en conclura sur le champ, par un théorème connu, les proportions:

$$1)\quad \begin{cases} Tz' : T'z' = BT : BT' \\ Tz \,;\, T'z = BT : BT. \end{cases}$$

où BT, BT', sont visiblement les cathètes d'un triangle rectangle, dont l'angle aigu $BT'T = \frac{c}{4}$.

Abaissant les perpendiculaires $z\varepsilon$, $z'\varepsilon'$, sur la corde BG, on aura

$$Tz : Tz' = z\varepsilon : z'\varepsilon'$$
$$T'z : T'z' = B\varepsilon : B\varepsilon'.$$

Les triangles rectangles isoscèles et semblables $B\varepsilon z$, $B\varepsilon' z'$, donnent

$$z\varepsilon : z'\varepsilon' = B\varepsilon : B\varepsilon' = Bz : Bz'$$

donc

$$2)\quad \begin{cases} Tz : Tz' = Bz : Bz' \\ T'z : T'z' = Bz : Bz'. \end{cases}$$

ce qui, du reste, se conclut encore de ce que *l'angle droit zBz', et son adjacent sont divisés en deux parties égales par les droites BT, BT'.*

Les cordes Bz, Bz', sont les cathètes d'un triangle rectangle, dont les angles aigus sont

$$Bzz' = HBz - BT'z = 45° - \tfrac{c}{4}$$
$$Bz'z = T'Bz' + BT'z' = 45° + \tfrac{c}{4}.$$

Corollaire.

Il est facile, maintenant, d'indiquer les valeurs trigonométriques des segmens Tz, Tz', $T'z$, $T'z'$.

En effet, les triangles rectangles semblables $Gz\varepsilon$, $z'G\varepsilon'$, $z'zB$, donnent les proportions:

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} Tz : z\varepsilon = TT' : BT' = 1 : \cos.\ \tfrac{c}{4} \\ z\varepsilon : Gz = Bz\ : zz' = \sin.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : 1 \\ ex\ aequo\ \ Tz : Gz = \sin.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : \cos.\ \tfrac{c}{4}. \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{l} Tz' : z'\varepsilon' = TT' : BT' = 1 : \cos.\ \tfrac{c}{4} \\ z'\varepsilon' : Gz' = Bz' : zz' = \cos.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : 1 \\ ex\ aequo\ \ Tz' : Gz' = \cos.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : \cos.\ \tfrac{c}{4}. \end{array}\right.$$

Ensuite, puisque $B\varepsilon = z\varepsilon$, $B\varepsilon' = z'\varepsilon'$, on aura

$$3)\ \left\{\begin{array}{l} T'z : B\varepsilon = TT' : BT = 1 : \sin.\ \tfrac{c}{4} \\ z\varepsilon\ : Gz = Bz'\ : zz' = \sin.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : 1 \\ ex\ aequo\ \ T'z\ : Gz = \sin.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : \sin.\ \tfrac{c}{4}. \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{l} T'z' : B\varepsilon' = TT' : BT = 1 : \sin.\ \tfrac{c}{4} \\ z'\varepsilon'\ : Gz' = Bz'\ : zz' = \cos.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : 1 \\ ex\ aequo\ \ T'z' : Gz' = \cos.\ (45 + \tfrac{c}{4}) : \sin.\ \tfrac{c}{4}. \end{array}\right.$$

Désignant le rayon du cercle inscrit M par la lettre ϱ, on aura les cordes $Gz = Gz' = \varrho \cdot \sqrt{2}$, et on en conclura les valeurs suivantes:

$$5)\ \left\{\begin{array}{l} Tz = \varrho + Mc - Ac = \varrho \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sin.\ (45 + \frac{c}{4})}{\cos.\ \frac{c}{4}} \\ Tz' = \varrho - Mc + Ac = \varrho \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos.\ (45 + \frac{c}{4})}{\cos.\ \frac{c}{4}} \\ T'z = Mc + Ac + \varrho = \varrho \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sin.\ (45 + \frac{c}{4})}{\sin.\ \frac{c}{4}} \\ T'z' = Mc + Ac - \varrho = \varrho \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos.\ (45 + \frac{c}{4})}{\cos.\ \frac{c}{4}}. \end{array}\right.$$

29. *Problème.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc étant inscrits trois cercles tangens d, e, f, indiquer les expressions trigonométriques des tangentes et des diamètres.*

Les valeurs des tangentes s'obtiennent sans peine des théorèmes No. 23 et 28.

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} 2lo &= hk' = Rx = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{a}{4})}{\cos.\,\frac{a}{4}} \\ 2mp &= kg' = Sy = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{b}{4})}{\cos.\,\frac{b}{4}} \\ 2nq &= gh' = Tz = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{c}{4})}{\cos.\,\frac{c}{4}} \end{aligned}\right.$$

Pour les diamètres, on fera usage du théorème No. 25.

$$2\,dg = \frac{Sy\cdot Tz}{Rx} = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{b}{4})\ \sin.\,(45+\frac{c}{4})\ \cos.\,\frac{a}{4}}{\cos.\,\frac{b}{4}\cdot\cos.\,\frac{c}{4}\cdot\sin.\,(45+\frac{a}{4})}$$

$$2\,eh = \frac{Tz\cdot Rx}{Sy} = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{c}{4})\ \sin.\,(45+\frac{a}{4})\ \cos.\,\frac{b}{4}}{\cos.\,\frac{c}{4}\cdot\cos.\,\frac{a}{4}\cdot\sin.\,(45+\frac{b}{4})}$$

$$2\,fk = \frac{Rx\cdot Sy}{Tz} = \varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin.\,(45+\frac{a}{4})\ \sin.\,(45+\frac{b}{4})\ \cos.\,\frac{c}{4}}{\cos.\,\frac{a}{4}\cdot\cos.\,\frac{b}{4}\cdot\sin.\,(45+\frac{c}{4})}$$

30. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit le cercle M, et dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles D, E, F; la double distance des centres M, F est au rayon du cercle M, comme l'unité est au produit des cosinus des quarts des angles adjacents du triangle abc.*

Ayant pris $\alpha a = \alpha' a = Ma$, $\beta b = \beta' b = Mb$, on aura les triangles

$$MFa = \alpha' Fa,\quad MFb = \beta Fb$$

donc

$$\alpha' F = \beta F = MF.$$

Par conséquent la circonférence qu'on décrira du centre F et du rayon MF, va passer par les points α', β, et si elle coupe la droite prolongée MF en ζ, les angles $M\alpha'\zeta$, $M\beta\zeta$, sont droits, et les droites $\alpha'\zeta$, $\beta\zeta$, sont parallèles à aF, bF, respectivement, partant les angles

$$\alpha' M\zeta = \alpha'\beta\zeta = abF = \tfrac{b}{4} = CM\beta$$

$$\beta M\zeta = \beta\alpha'\zeta = baF = \tfrac{a}{4} = CM\alpha'.$$

Il s'ensuit que les triangles $M\alpha'\zeta$, $MC\beta$, bqF, sont semblables, et que les triangles $M\beta\zeta$, $MC\alpha'$, aqF sont semblables, ce qui donne

$$M\zeta : M\alpha' = M\beta : MC$$

ou

$$2MF : M\alpha' = M\beta : \varrho.$$

En prenant de même $\gamma c = \gamma' c = Mc$, on déduira les équations suivantes

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} 2MF\cdot\varrho = M\alpha\cdot M\beta \\ 2MD\cdot\varrho = M\beta\cdot M\gamma \\ 2ME\cdot\varrho = M\gamma\cdot M\alpha. \end{array}\right.$$

et puisque $M\alpha = \dfrac{\varrho}{\cos.\frac{a}{4}}$; $M\beta = \dfrac{\varrho}{\cos.\frac{b}{4}}$; $M\gamma = \dfrac{\varrho}{\cos.\frac{c}{4}}$, elles deviennent;

$$2)\ \left\{\begin{array}{l} 2\,MF : \varrho = 1 : \cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ 2\,MD : \varrho = 1 : \cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ 2\,ME : \varrho = 1 : \cos.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4} \end{array}\right.$$

31. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle* **M**, *et dans les triangles* **Mbc**, **Mca**, **Mab**, *étant inscrits les cercles tangens* **D**, **E**, **F**; *si l'on applique aux sécantes* **Ma**, **Mb**, **Mc**, *des angles* $aMV' = aMW = bMW' =$

$bMU = cMU' = cMV = 45^\circ$, et qu'on élève en D, E, F, des perpendiculaires sur MD, ME, MF, qui rencontrent les côtés de ces angles en U, U', V, V', W, W'; ces six points seront dans la circonférence d'un cercle du centre, M, et d'un rayon R, qui est au rayon ρ du cercle inscrit M, comme l'unité au double produit des trois cosinus des quarts des angles du triangle abc.

Le rectangle des rayons R, ρ, des deux cercles concentriques est égal au double rectangle de deux distances des centres, comme MD, ME, multiplié par le cosinus du quart de l'angle opposé c du triangle abc.

Le double produit des trois distances des centres MD, ME, MF, est égal au produit du rayon du cercle inscrit ρ, par le carré du rayon R du cercle concentrique.

Le carré de la distance des centres D, E est égal au produit du carré du rayon R du cercle concentrique, par le carré du sinus de la somme des quarts des angles adjacents du triangle abc; plus un rectangle invariable, fait entre le rayon ρ du cercle inscrit et le côté du carré inscrit au cercle concentrique.

Parmi les trois distances des centres DE, EF, FD, la différence des carrés de deux quelconques comme EF, FD, est au rectangle du rayon du cercle F et de la commune tangente extérieure Cq des cercles M, F, comme l'unité au carré du cosinus du quart de l'angle opposé du triangle abc.

La ligne MD divisant en deux parties égales l'angle bMc, on aura les angles

$$bMD = cMD = 90^\circ - \frac{b}{4} - \frac{c}{4} = = 45^\circ + \frac{a}{4}.$$

Or on a, par construction, les angles

$$bMU = cMU' = 45^\circ$$

par conséquent les angles $DMU = DMU' = \frac{a}{4}$ et puisque la droite UDU' est perpendiculaire sur MD, on en conclura que $MU = MU' = \dfrac{MD}{\cos.\frac{a}{4}}$.

Or par le théorème No. 30, on a $MD = \dfrac{\rho}{2\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4}}$.

Il en résulte donc l'équation:

$$1)\left\{ MU = MU' = MV = MV' = MW = MW' = R = \frac{\varrho}{2\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4}}.\right.$$

Le même théorème No. 30. donne

$$2\,MD = \frac{\varrho}{\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4}},\; ME\cdot\cos.\frac{c}{4} = \frac{\varrho}{2\cos.\frac{a}{4}}.$$

Multipliant ces valeurs, on trouve

$$2)\left\{\begin{aligned} &2\,MD\cdot ME\cdot\cos.\frac{c}{4} = 2ME\cdot MF\cdot\cos.\frac{a}{4} = 2\,MF\cdot MD\cdot\cos.\frac{b}{4} = \\ &= \varrho\cdot\frac{\varrho}{2\cos.\frac{a}{4}\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}} = \varrho\cdot R.\end{aligned}\right.$$

Multipliant les trois proportions du théorème No. 30, on aura

$$8\,MD\cdot ME\cdot MF : \varrho^3 = 1 : \cos.^2\frac{a}{4}\cos.^2\frac{b}{4}\cos.^2\frac{c}{4}$$

ou

$$3)\left\{\; 2\,MD\cdot ME\cdot MF = \varrho\cdot R^2.\right.$$

Élevant une perpendiculaire MX sur MD, et abaissant une perpendiculaire VX sur MX, on aura les angles

$$cMD = 45^\circ + \frac{a}{4},\; cME = 45^\circ + \frac{b}{4},$$

donc

$$DME = 90^\circ + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 135^\circ - \frac{c}{4}$$

et

$$EMX = DME - 90^\circ = \frac{a}{4} + \frac{b}{4}$$

$$EMV = cME - 45^\circ = \frac{b}{4}$$

donc

$$VMX = EMX - EMV = \frac{a}{4} = DMU'.$$

Il s'ensuit que les triangles rectangles VMX, $U'MD$, sont égaux entr'eux, donc $MX = MD$, c'est-à-dire que le triangle rectangle DMX est isoscèle. Sur la droite prolongée DX abaissant la perpendiculaire EX, prenant le segment $YZ = XY$, et achevant le parallélogramme $DZES$, on aura:

$$DE^2 - EX^2 = DY^2 - YX^2 = XD \cdot DZ.$$

Or puisque les angles $DSE = DZE$, $DZE = ZXE$, on aura les angles $SDX = EXD$, et puisque les angles $MDX = MXD$, on en conclut que les angles $MDS = MXE$, c'est-à-dire que S est dans le prolongement de la droite cD; or les côtés $DS = EZ = EX$, $MD = MX$, donc les triangles MDS, MXE, sont égaux entr'eux, partant $MS = ME$. Il suit de là qu'abaissant la perpendiculaire MN sur ES, on aura

$$DZ = ES = 2EN,$$

donc

$$DE^2 - EX^2 = 2DX \cdot EN.$$

Puisque l'angle $MXD = 45^\circ$, et EN parallèle à DX, il est évident que l'angle $MEN = 45^\circ - EMX = 45^\circ - \frac{a}{4} - \frac{b}{4} = \frac{c}{4}$. Donc $EN = ME \cdot \cos. \frac{c}{4}$. Or l'équation 2^{me}, donne $2MD \cdot ME \cdot \cos. \frac{c}{4} = \varrho \cdot R$. On aura par conséquent

$$2MD \cdot EN = \varrho \cdot R.$$

Les triangles rectangles isoscèles et semblables DMX, $U'MV$, donnent

$$DX : MD = U'V : R$$

ou

$$2DX \cdot EN : 2MD \cdot EN = U'V : R.$$

Substituant les valeurs des deux rectangles, on obtient

$$DE^2 - EX^2 : \varrho \cdot R = U'V : R$$

ou

$$DE^2 - EX^2 = \varrho \cdot U'V.$$

Or à cause des angles droits MEV, MXV, le quadrilatère $MEVX$ est inscriptible à un cercle du diamètre MV, donc $EX = MV \cdot \sin. EMX$ ou $EX = R \cdot \sin. \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}\right)$. Et puisque $U'V = R \cdot \sqrt{2}$, on trouve les équations

$$4)\ \left\{\begin{aligned} DE^2 &= R^2 \cdot \sin.^2 (\tfrac{a}{4} + \tfrac{b}{4}) + \varrho \cdot R \cdot \sqrt{2} \\ EF^2 &= R^2 \cdot \sin.^2 (\tfrac{b}{4} + \tfrac{c}{4}) + \varrho \cdot R \cdot \sqrt{2} \\ FD^2 &= R^2 \cdot \sin.^2 (\tfrac{c}{4} + \tfrac{a}{4}) + \varrho \cdot R \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

On déduit de ces équations, en rétranchant

$$FD^2 - EF^2 = R\cdot^2 \sin.^2 (\tfrac{c}{4} + \tfrac{a}{4}) - R^2 \sin.^{2'} (\tfrac{b}{4} + \tfrac{c}{4}).$$

Un procédé trigonométrique fort simple fait reconnaître que

$$\sin.^2 (\tfrac{c}{4} + \tfrac{a}{4}) - \sin.^2 (\tfrac{b}{4} + \tfrac{c}{4}) = \sin. (\tfrac{a}{4} - \tfrac{b}{4}) \cdot \sin. (45 + \tfrac{c}{4}).$$

On aura donc

$$5)\ \left\{\begin{aligned} FD^2 - EF^2 &= R^2 \cdot \sin. (\tfrac{a}{4} - \tfrac{b}{4}) \cdot \sin. (45 + \tfrac{c}{4}) \\ EF^2 - DE^2 &= R^2 \cdot \sin. (\tfrac{c}{4} - \tfrac{a}{4}) \cdot \sin. (45 + \tfrac{b}{4}) \\ DE^2 - FD^2 &= R^2 \cdot \sin. (\tfrac{b}{4} - \tfrac{c}{4}) \cdot \sin. (45 + \tfrac{a}{4}). \end{aligned}\right.$$

Substituant les valeurs trigonométriques des rayons Do, Ep, Fq, et des tangentes Ao, Bp, Cq, qu'on va obtenir par le théorème No. 33, on trouve

$$6)\ \left\{\begin{aligned} FD^2 - EF^2 : Fq \cdot Cq &= 1 : \cos.^2 \tfrac{c}{4} \\ EF^2 - DE^2 : Ep \cdot Bp &= 1 : \cos.^2 \tfrac{b}{4} \\ DE^2 - FD^2 : Do \cdot Ao &= 1 : \cos.^2 \tfrac{a}{4}. \end{aligned}\right.$$

32. *Théorème.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc, étant inscrits un cercle* **M** *et trois cercles tangens d, e, f, qui se touchent en l, m, n; dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles* **D**, **E**, **F**, *qui touchent les côtés bc, ca, ab, en o, p, q; le carré de la distance des centres* **DE** *est à la somme des carrés des communes tangentes intérieures adjacentes lo, mp, comme l'unité est au carré du cosinus du quart de l'angle opposé c du triangle abc.*

(Fig. 2. Fig. 3.) Les cercles D, E, touchant la sécante Mc en o'', p' on aura par le théorème No. 18

$$op'^2 = po''^2 = lo^2 + mp^2.$$

Les triangles pco'', $E'cD$, $p'co$, étant semblables par le théorème No. 12, on aura

$$DE : op' = cD : oc = 1 : \cos. \frac{c}{4}$$

d'où l'on conclut les équations:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} DE^2 : lo^2 + mp^2 = 1 : \cos.^2 \frac{c}{4} \\ EF^2 : mp^2 + nq^2 = 1 : \cos.^2 \frac{a}{4} \\ FD^2 : nq^2 + lo^2 = 1 : \cos.^2 \frac{b}{4}. \end{array} \right.$$

Substituant les valeurs des tangentes données par le théorème No. 29, on obtient:

$$2) \left\{ \begin{array}{l} DE^2 = \dfrac{\varrho^2}{2 \cos.^2 \frac{c}{4}} \left[\dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{a}{4})}{\cos.^2 \frac{a}{4}} + \dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{b}{4})}{\cos.^2 \frac{b}{4}} \right] \\ EF^2 = \dfrac{\varrho^2}{2 \cos.^2 \frac{a}{4}} \left[\dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{b}{4})}{\cos.^2 \frac{b}{4}} + \dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{c}{4})}{\cos.^2 \frac{c}{4}} \right] \\ FD^2 = \dfrac{\varrho^2}{2 \cos.^2 \frac{b}{4}} \left[\dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{c}{4})}{\cos.^2 \frac{c}{4}} + \dfrac{\sin.^2 (45 + \frac{a}{4})}{\cos.^2 \frac{a}{4}} \right] \end{array} \right.$$

33. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C; et dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles D, E, F, qui en touchent les côtés en o, o', o''; p, p', p''; q, q', q''; le rayon du cercle F est à celui du cercle M, comme le sinus de 45° plus le quart de l'angle opposé c, est au double produit des cosinus des quarts des angles adjacents a, b.*

Le rectangle fait entre le rayon du cercle **M**, *et l'excès de ce rayon sur le diamètre du cercle* **F**, *est équivalent au rectangle fait entre les excès des sécantes adjacentes Ma, Mb, sur les tangentes Ba, Cb.*

La tangente Mq′ ou Mq″ est au rayon du cercle **M**, *comme le cosinus de 45° plus le quart de l'angle opposé c, est au double produit des cosinus des quarts des angles adjacents a, b.*

La distance du contact q à l'une des extrémités du côté ab, est au rayon du cercle **M**, *comme le sinus de 45° plus le quart de l'angle opposé c, est au double produit du sinus du quart de l'angle adjacent à cette extrémité, par le cosinus du quart de l'angle adjacent à l'autre extrémité.*

Parmi les trois cordes de contingence du cercle **F**, *savoir qq′, qq″, q′q″, l'une des deux premières est au rayon du cercle* **M**, *comme le sinus de 45° plus le quart de l'angle opposé c, est au cosinus du quart de l'angle adjacent à celle des extrémités du côté ab, qui est opposée à la corde en question.*

La troisième corde de contingence q′q″ est au rayon du cercle **M**, *comme le cosinus de la moitié de l'angle opposé c est au double produit des cosinus des quarts des angles adjacents a, b.*

La commune tangente extérieure Cq des cercles **M**, **F**, *est au rayon du cercle* **M**, *comme le sinus de la différence des quarts des angles adjacents a, b, est au double produit des cosinus des quarts des angles adjacents a, b.*

La droite MF divisant en deux parties égales l'angle aMB, qui est égal à $180° - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, on aura les angles $FMq' = FMq'' = 90° - \frac{a}{4} - \frac{b}{4} = 45° + \frac{c}{4}$, ce qui donne

$$Fq' \text{ ou } Fq'' \text{ ou } Fq : MF = \sin.\,(45 + \tfrac{c}{4}) : 1$$

$$Mq' \text{ ou } Mq'' : MF = \cos.\,(45 + \tfrac{c}{4}) : 1$$

et par la valeur de MF, du théorème No. 30, on trouve

$$1)\left\{\begin{array}{l} Fq : \varrho = \sin.\left(45+\frac{c}{4}\right) : 2\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ Do : \varrho = \sin.\left(45+\frac{a}{4}\right) : 2\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ Ep : \varrho = \sin.\left(45+\frac{b}{4}\right) : 2\cos.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4} \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} Mq' \text{ ou } Mq'' : \varrho = \cos.\left(45+\frac{c}{4}\right) : 2\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ Mo' \text{ ou } Mo'' : \varrho = \cos.\left(45+\frac{a}{4}\right) : 2\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ Mp' \text{ ou } Mp'' : \varrho = \cos.\left(45+\frac{b}{4}\right) : 2\cos.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4} \end{array}\right.$$

Ajoutons que les triangles aqF, bqF, donnent les proportions:

$$aq : Fq = \cos.\frac{a}{4} : \sin.\frac{a}{4}$$

$$qb : Fq = \cos.\frac{b}{4} : \sin.\frac{b}{4}.$$

On aura donc

$$3)\left\{\begin{array}{l} aq : \varrho = \sin.\left(45+\frac{c}{4}\right) : 2\sin.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ bo : \varrho = \sin.\left(45+\frac{a}{4}\right) : 2\sin.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ cp : \varrho = \sin.\left(45+\frac{b}{4}\right) : 2\sin.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4} \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{l} qb : \varrho = \sin.\left(45+\frac{c}{4}\right) : 2\sin.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4} \\ oc : \varrho = \sin.\left(45+\frac{a}{4}\right) : 2\sin.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ pa \,.\, \varrho = \sin.\left(45+\frac{b}{4}\right) : 2\sin.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4}. \end{array}\right.$$

Les triangles isoscèles Fqq', Fqq'', $Fq'q''$, donnent les proportions:

$$qq' : Fq = 2\cos.\frac{a}{4} : 1$$

$$qq'' : Fq = 2\cos.\frac{b}{4} : 1$$

$$q'q'' : Fq = 2\cos.\left(45+\frac{c}{4}\right) : 1.$$

Et observant que $2\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)\cdot\cos.\left(45+\frac{c}{4}\right)=\sin.\left(90^\circ+\frac{c}{2}\right)=\cos.\frac{c}{2}$, on trouve

$$5)\begin{cases} qq' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{c}{4}\right) : \cos.\frac{b}{4} \\ oo' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{a}{4}\right) : \cos.\frac{c}{4} \\ pp' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{b}{4}\right) : \cos.\frac{a}{4} \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} qq'' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{c}{4}\right) : \cos.\frac{a}{4} \\ oo'' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{a}{4}\right) : \cos.\frac{b}{4} \\ pp'' : \varrho = \sin.\left(45+\frac{b}{4}\right) : \cos.\frac{c}{4} \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} q'q'' : \varrho = \cos.\frac{c}{2} : 2\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ o'o'' : \varrho = \cos.\frac{a}{2} : 2\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ p'p'' : \varrho = \cos.\frac{b}{2} : 2\cos.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4}. \end{cases}$$

Remarquant que $Cr = MF\cdot\sin.\,CMF$, que l'angle $aMF = 90^\circ-\frac{a}{4}-\frac{b}{4}$, l'angle $aMC = 90^\circ-\frac{a}{2}$, partant l'angle $CMF = aMF - aMC = \frac{a}{4}-\frac{b}{4}$, et substituant la valeur de MF, on obtient

$$8)\begin{cases} Cq : \varrho = \sin.\frac{a-b}{4} : 2\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4} \\ Ao : \varrho = \sin.\frac{b-c}{4} : 2\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4} \\ Bp : \varrho = \sin.\frac{c-a}{4} : 2\cos.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4}. \end{cases}$$

Il résulte de ces proportions que si l'angle a est plus grand que b, la tangente aq surpassera aC, et réciproquement. Si le triangle abc est isoscèle, de sorte que les angles a, b, sont égaux entr'eux, les points de contingence C, q, doivent nécessairement se confondre.

Le cercle M coupant la sécante Mc et son prolongements en z', z, et le cercle décrit du centre c, et du rayon Ac la coupant en T et son prolongement en T', on aura

$$Mq' : Fq = Bz' : Bz = cz' : cB = Tz' : Tz = T'z' : T'z.$$

De cette manière s'obtiennent les proportions:

$$9)\left\{\begin{aligned}
Mq' : Fq &= Mc - \varrho : Ac = Ac : Mc + \varrho \\
&= \varrho - Mc + Ac : \varrho + Mc - Ac \\
&= Mc + Ac - \varrho : Mc + Ac + \varrho \\
Mo' : Do &= Ma - \varrho : Ba = Ba : Ma + \varrho \\
&= \varrho - Ma + Ba : \varrho + Ma - Ba \\
&= Ma + Ba - \varrho : Ma + Ba + \varrho \\
Mp' : Dp &= Mb - \varrho : Cb = Cb : Mb + \varrho \\
&= \varrho - Mb + Cb : \varrho + Mb - Cb \\
&= Mb + Cb - \varrho : Mb + Cb + \varrho.
\end{aligned}\right.$$

On a reconnu, par la démonstration du théorème No. 30, qu'ayant pris $\alpha'a = Ma$, $\beta b = Mb$, $F\zeta = MF$, le quadrilatère $M\alpha'\zeta\beta$ est inscriptible au cercle, les côtés $\alpha'\zeta$, $\beta\zeta$, étant parallèles à aF, bF, respectivement. Abaissant les perpendiculaires $\alpha'\eta$, $\beta\vartheta$, sur $M\beta$, $M\alpha'$, leur commune intersection λ se trouve évidemment dans le rayon perpendiculaire MC. Donc le quadrilatère $\alpha'\zeta\beta\lambda$ est un parallélogramme, dont les diagonales $\alpha'\beta$, $\zeta\lambda$, se coupent mutuellement en deux parties égales. Or le point de contingence q est le milieu de $\alpha'\beta$, partant ce point q doit se trouver dans la droite $\zeta\lambda$, et en sera le milieu. Par conséquent $M\lambda = 2Fq$ est égale au diamètre du cercle F, et les triangles semblables $\alpha'C\lambda$, $MC\beta$, donnent l'équation

$$MC \cdot C\lambda = \alpha'C \cdot C\beta$$

substituant les valeurs convenables, on obtient:

$$10)\left\{\begin{aligned}
\varrho\,(\varrho - 2Fq) &= (Ma - Ba)\cdot(Mb - Cb) \\
\varrho\,(\varrho - 2Do) &= (Mb - Cb)\cdot(Mc - Ac) \\
\varrho\,(\varrho - 2Ep) &= (Mc - Ac)\cdot(Ma - Ba).
\end{aligned}\right.$$

34. *Théorème.*

(Fig. 4.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C; et dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles D, E, F, qui touchent les côtés en o, p, q; la quatrième proportionnelle à la moitié de la sécante Mc et les tangentes oc, cp, est égale à l'excès de la somme de ces tangentes oc, cp, sur le rayon du cercle F.*

La ligne des centres DE étant coupée en ϖ par la sécante Mc, la quatrième proportionnelle à la sécante Mc, son segment $M\varpi$, et la somme des tangentes oc, cp, est égale au rayon du cercle F.

Le diamètre GH perpendiculaire sur Mc, étant coupé en π par la sécante Dc, l'aire du triangle DME est la moitié du rectangle fait entre le segment $M\pi$ et le rayon du cercle F.

On trouve, dans la démonstration du théorème No. 20. les équations:

$$2oc = bc + Mc - Mb = (Mc + Ac) - (Mb - Cb)$$
$$2cp = ca + Mc - Ma = (Mc + AC) - (Ma - Ba)$$
$$2Mq' = Ma + Mb - ab = (Mb - Cb) + (Ma - Ba)$$

ce qui donne

$$4oc \cdot cp = (Mc + Ac)^2 - 2(Mc + Ac) \cdot Mq' + (Ma - Ba) \cdot (Mb - Cb).$$

Le théorème No. 33. donne $\varrho^2 - 2\varrho \cdot Fq = (Ma - Ba) \cdot (Mb - Cb)$ partant

$$4oc \cdot cp = Mc^2 + Ac^2 + 2Mc \cdot Ac - 2(Mc + Ac) \cdot Mq' + \varrho^2 - 2\varrho \cdot Fq$$
$$Ac^2 + \varrho^2 = Mc^2,$$

donc

$$2oc \cdot cp = Mc^2 + Mc \cdot Ac - (Mc + Ac) \cdot Mq' - \varrho \cdot Fq.$$

On a encore, par le théorème No. 33.

$$Mq' : Fq = Mc - \varrho : Ac$$

et de là

$$Ac \cdot Mq' = Mc \cdot Fq - \varrho \cdot Fq$$

substituant, il vient

$$2\,oc \cdot cp = Mc \cdot (Mc + Ac - Mq' - Fq)$$

le théorème No. 26. donne $Mq' + oc + cp = Mc + Ac$ par conséquent on aura

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2\,oc \cdot cp = Mc \cdot (oc + cp - Fq) \\ \tfrac{1}{2}Mc : oc = cp : oc + cp - Fq \end{array} \right.$$

le théorème No. 19. donne

$$oc : \tfrac{1}{2}c\varpi = oc + cp : cp$$

donc *ex aequo*

$$Mc : c\varpi = oc + cp : oc + cp - Fq$$

d'où l'on conclut

$$2)\quad \left\{ \begin{array}{l} Mc : M\varpi = oc + cp : Fq \\ Ma : Mu = pa + aq : Do \\ Mb : Mv = qb + bo : Ep. \end{array} \right.$$

Les triangles semblables $cM\pi$, $co''D$, $cp'E$, donnent

$$oc : Mc = Do'' : M\pi$$

$$cp : Mc = Ep' : M\pi$$

donc

$$oc + cp : Mc = Do'' + Ep' : M\pi$$

et puisque

$$oc + cp : Mc = Fq : M\varpi.$$

on en conclura que

$$3)\quad \left\{ \begin{array}{r} Do'' + Ep' : M\pi = Fq : M\varpi \\ M\varpi \cdot (Do'' + Ep') = M\pi \cdot Fq \\ \Delta DME = \tfrac{1}{2}M\pi \cdot Fq. \end{array} \right.$$

Corollaire.

Substituant les expressions trigonométriques du théorème No. 33, dans l'équation 1), divisant par ϱ^2, et multipliant par $4\,\sin.^2 \frac{c}{4} \cdot \cos. \frac{a}{4} \cdot \cos. \frac{b}{4} \cdot \cos. \frac{c}{4}$, on obtient les équations suivantes qu'il est facile de vérifier:

$$
4)\left\{
\begin{aligned}
&2\sin.(45+\tfrac{a}{4})\sin.(45+\tfrac{b}{4})\cos.\tfrac{c}{4}=\sin.(45+\tfrac{a}{4})\cos.\tfrac{a}{4}+\sin.(45+\tfrac{b}{4})\cos.\tfrac{b}{4}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\sin.(45+\tfrac{c}{4})\sin.\tfrac{c}{4}\\
&2\sin.(45+\tfrac{b}{4})\sin.(45+\tfrac{c}{4})\cos.\tfrac{a}{4}=\sin.(45+\tfrac{b}{4})\cos.\tfrac{b}{4}+\sin.(45+\tfrac{c}{4})\cos.\tfrac{c}{4}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\sin.(45+\tfrac{a}{4})\sin.\tfrac{a}{4}\\
&2\sin.(45+\tfrac{c}{4})\sin.(45+\tfrac{a}{4})\cos.\tfrac{b}{4}=\sin.(45+\tfrac{c}{4})\cos.\tfrac{c}{4}+\sin.(45+\tfrac{a}{4})\cos.\tfrac{c}{4}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\sin.(45+\tfrac{b}{4})\sin.\tfrac{b}{4}.
\end{aligned}
\right.
$$

35. *Théorème.*

(Fig. 4). *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C; et dans les triangles Mbc, Mca, Mab, étant inscrits les cercles D, E, F, qui touchent les côtés en o, p, q.*

La ligne des centres MF divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon de contingence MC et le prolongement de la sécante Mc.

Le rayon de contingence Fq rencontre la sécante Mc dans un point φ qui est également distant des centres M, F.

La ligne des centres DE coupant la sécante Mc en ϖ, si l'on joint $q\varpi$; l'unité plus les cosinus des demi-angles a, b, sera au nombre 2, comme la droite $q\varpi$ est à la troisième proportionnelle de la somme des rayons des cercles D, E, et la distance de leurs centres;

ou comme la perpendiculaire abaissée du point q sur la ligne des centres est à cette ligne des centres DE.

Si l'on mène du centre F une parallèle à la sécante Mc, qui rencontre la droite $q\varpi$ en ξ, et qu'on abaisse une perpendiculaire $\xi\varrho$ sur la ligne des centres DE, cette perpendiculaire est la moitié de la ligne des centres.

Le cercle *M* coupant la sécante prolongée *Mc* en *z*, on a les angles $aMz = \frac{a}{2}+\frac{c}{2} = 90^\circ - \frac{b}{2}$, et $aMC = 90^\circ - \frac{a}{2}$, donc $CMz = aMz - aMC$

$= \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Or les angles $aMb = 180° - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, $aMF = \frac{1}{2}aMb = 90° - \frac{a}{4} - \frac{b}{4}$, $CMF = aMF - aMC = \frac{a}{4} - \frac{b}{4}$. Par conséquent les angles $CMF = zMF = \frac{a}{4} - \frac{b}{4}$ sont la moitié de l'angle CMz. La ligne $F\varphi$ étant parallèle à MC, on aura l'angle $\varphi FM = CMF$, et partant $\varphi FM = \varphi MF$, donc $M\varphi = F\varphi$.

La ligne des centres MF rencontrant le côté ab en μ, si l'on joint μz, les triangles μMz, μMC, seront égaux entr'eux, ayant deux côtés et l'angle compris égaux. Par conséquent la droite $\mu z = \mu C$ est tangente au cercle M en z.

Si l'on mène par le centre F une parallèle à la sécante Mc, qui rencontre la tangente μz en x, et la droite $q\varpi$ en ξ, les triangles μFx, μFq, sont égaux entr'eux, ayant deux côtés et l'angle compris égaux, par conséquent $\mu x = \mu q$ est tangente aux cercle F en x. De plus, les communes tangentes extérieures Cq, zx, des cercles M, F, sont égales entr'elles.

Puisque les angles $\varphi Fq' = \frac{a}{2}$, et $aM\varphi = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 90° - \frac{b}{2}$, on aura évidemment

$$Fq' = F\varphi \cdot \cos.\frac{a}{2} + M\varphi \cdot \cos.\frac{b}{2}$$

ou

$$Fq = F\varphi\ (\cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2})$$

ou

$$q\varphi = F\varphi\ (1 + \cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2})$$

ce qui donne la proportion, abaissant la perpendiculaire $q\sigma$ sur Mz

$$\tfrac{1}{2}q\varphi : F\varphi = \tfrac{1}{2}q\sigma : zx = 1 + \cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2} : 2.$$

Par le théorème No. 21, on a les angles $E\varpi q = E\varpi c$ ou $E\varpi q = D\varpi z$. Donc, si l'on élève la perpendiculaire $\varpi\tau$ sur DE, on a les angles $q\varpi\tau = \sigma\varpi\tau$. Abaissant la perpendiculaire $q\tau$ sur $\varpi\tau$, le quadrilatère $q\varpi\sigma\tau$ sera inscriptible au cercle, et ainsi les angles $q\sigma\tau = q\varpi\tau$, $\sigma q\tau = \sigma\varpi\tau$, partant $q\sigma\tau = \sigma q\tau$, c'est-à-dire que le triangle $q\tau\sigma$ est isoscèle.

Elevant une perpendiculaire $E\psi$ sur DE, qui rencontre le rayon prolongé Do'' en ψ, les triangles rectangles $DE\psi$, $\varpi\tau q$, sont semblables. On a donc les proportions:

$$q\varpi : q\tau = DE : o''p'$$

$$q\tau : \tfrac{1}{2}q\sigma = D\psi : DE$$

ex aequo

$$1) \left\{ \begin{array}{l} q\varpi : \frac{1}{2}q\sigma = D\psi : o''p' \\ q\varpi : D\psi = \frac{1}{2}q\sigma : o''p'. \end{array} \right.$$

Or, par la démonstration du théorème No. 20, la commune tangente intérieure $o''p'$ des cercles D, E, est égale à la commune tangente extérieure Cq ou zx des cercles M, F. Partant

$$2) \left\{ q\varpi : D\psi = \varpi\tau : DE = 1 + \cos.\frac{a}{2} + \cos.\frac{b}{2} : 2. \right.$$

Ici $\varpi\tau$ est évidemment égale à la perpendiculaire abaissée de q sur DE; et $D\psi$ est la troisième proportionnelle à la somme des rayons Do'', Ep', et la distance des centres, de sorte que

$$3) \quad D\psi \cdot (Do + Ep) = DE^2.$$

Il convient de remarquer que les équations 2. 3. fournissent un moyen facile, pour parvenir à la valeur numérique de la droite $q\varpi$.

La droite $xF\xi$ étant parallèle à Mz, on aura:

$$q\varpi : \tfrac{1}{2}q\sigma = 2\xi\varpi : zx = 2\xi\varpi : o''p'.$$

Or la proportion 1., donne

$$q\varpi : \tfrac{1}{2}q\sigma = D\psi : o''p'.$$

Par conséquent

$$D\psi = 2\xi\varpi$$

et si l'on abaisse la perpendiculaire $\xi\varrho$ sur DE, les triangles $\xi\varpi\varrho$, $D\psi E$, sont semblables, d'où il suit que

$$4) \quad DE = 2\xi\varrho.$$

36. *Théorème.*

(Fig. 2.) *Dans un triangle abc étant inscrits trois cercles tangens d, e, f, qui se touchent en l, m, n, et dont les communes tangentes intérieures sont lo, mp,* *nq; si l'on joint les centres, chaque côté du triangle def est à la commune tangente des deux cercles correspondans, comme la somme des carrés des deux autres tangentes est à leur rectangle.*

Le carré de l'aire du triangle def est équivalent à la somme des carrés des rectangles faits entre les tangentes deux à deux.

Les trois tangentes lo, mp, nq, vont concourir dans un même point N, qui est le centre du cercle inscrit au triangle def, d'un rayon égal au produit des trois tangentes, divisé par l'aire du triangle.

Par le théorème No. 25, on a les équations

$$eh \cdot fk = lo^2,\ fk \cdot dg = mp^2$$

et puisque

$$eh + dg = en + dn = de$$

on conclut

$$de \cdot fk = lo^2 + mp^2$$

le théorème No. 25. donne encore

$$nq \cdot fk = lo \cdot mp$$

d'où l'on tire les équations:

$$1)\ \left\{\begin{aligned} de : nq &= lo^2 + mp^2 : lo \cdot mp \\ ef : lo &= mp^2 + nq^2 : mp \cdot nq \\ fd : mp &= nq^2 + lo^2 : nq \cdot lo \end{aligned}\right.$$

qu'on peut présenter sous cette forme:

$$2)\ \left\{\begin{aligned} de \cdot lo \cdot mp \cdot nq &= mp^2 \cdot nq^2 + nq^2 \cdot lo^2 \\ ef \cdot lo \cdot mp \cdot nq &= nq^2 \cdot lo^2 + lo^2 \cdot mp^2 \\ fd \cdot lo \cdot mp \cdot nq &= lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2. \end{aligned}\right.$$

Additionnant ces trois équations, on obtient:

$$3)\ \left\{\begin{aligned} &(de + ef + fd) \cdot lo \cdot mp \cdot nq = 2\,(lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2 + nq^2 \cdot lo^2) \\ &\text{ou}\ (dg + eh + fk) \cdot lo \cdot mp \cdot nq = lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2 + nq^2 \cdot lo^2. \end{aligned}\right.$$

Additionnant deux équations, et retranchant la troisième, on aura:

$$4)\ \left\{\begin{aligned} (de + ef - fd) \cdot mp &= 2\,eh \cdot mp = 2\,nq \cdot lo \\ (ef + fd - de) \cdot nq &= 2\,fk . nq = 2\,lo \cdot mp \\ (fd + de - ef) \cdot lo &= 2\,dg \cdot la = 2\,mp \cdot nq. \end{aligned}\right.$$

Multipliant les équations 3. 4., et effaçant les communs facteurs on trouve:

$$5)\quad \left\{ \begin{aligned} &(dg + eh + fk) \cdot dg \cdot eh \cdot fk = lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2 + nq^2 \cdot lo^2 \\ &\text{ou}\quad (\Delta def)^2 = lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2 \cdot + nq^2 \cdot lo^2. \end{aligned} \right.$$

Le rayon du cercle inscrit au triangle *def* est

$$6)\quad \left\{ \begin{aligned} Nl = Nm = Nn = \frac{\Delta def}{dg + eh + fk} = \frac{dg \cdot eh \cdot fk}{\Delta def} = \sqrt{\left(\frac{dg \cdot eh \cdot fk}{dg + eh + fk}\right)} = \frac{lo \cdot mp \cdot ng}{\Delta def} \\ = \frac{lo \cdot mp \cdot nq}{\sqrt{(lo^2 \cdot mp^2 + mp^2 \cdot nq^2 + nq^2 \cdot lo^2)}}. \end{aligned} \right.$$

37. *Théorème.*

(Fig. 1.) *Dans un angle bca = c étant inscrits un cercle tangent f, et deux autres cercles e, d, tangens au premier f en l, m, et qui se touchent en n; si l'on forme un rectangle entre le rayon du cercle touché f, et la somme de ce rayon multiplié par le cosinus de $\frac{c}{2}$, plus les deux communes tangentes intérieures lo, mp, multipliées chacune par le sinus de $\frac{c}{2}$; ce rectangle est à celui des tangentes lo, mp, comme l'unité augmentée du cosinus de $\frac{c}{2}$, est à l'unité.*

D'après ce qui vient d'être prouvé dans l'Analyse du problème, les lignes *tmg'*, *ut'mw'z*, sont droites, le quadrilatère *kmg'u* est inscriptible au cercle et *kt'* est perpendiculaire sur la corde de contingence *kk'*. Par conséquent les triangles rectangles semblables *g'kt*, *uvz*, *ukt'*, donnent les analogies:

$$\left\{ \begin{aligned} kg' : kt &= uv : vz \\ kg' : kt &= uk : kt' \end{aligned} \right.$$

partant

$$kg' : kt = kv : vz - kt'$$

substituant les valeurs

$$kg' = 2mp,\quad kt = 2fk,\quad kt' = 2fk \cdot \sin.\frac{c}{2}$$

$$kv = kk' + k'v = 2fk, \cdot \cos.\frac{c}{2} + 2\,lo \cdot \sin.\frac{c}{2}$$

$$vz = vh + hz = 2\,lo \cdot \cos.\frac{c}{2} + 2\,lo.$$

On obtient:

$$mp : fk = fk \cdot \cos.\frac{c}{2} + lo \cdot \sin.\frac{c}{2} : lo\left(1 + \cos.\frac{c}{2}\right) - fk \cdot \sin.\frac{c}{2}$$

ou

$$mp \cdot \sin.\frac{c}{2} : fk \cdot \sin.\frac{c}{2} = fk \cdot \cos.\frac{c}{2} + lo \cdot \sin.\frac{c}{2} : lo\left(1 + \cos.\frac{c}{2}\right) - fk \cdot \sin.\frac{c}{2}$$

ou réunissant ensemble le premier avec le troisième et le second avec le quatrième, on conclut

$$mp : fk = fk \cdot \cos.\frac{c}{2} + (lo + mp)\sin.\frac{c}{2} : lo\left(1 + \cos.\frac{c}{2}\right)$$

ou

$$fk \cdot \left(fk \cdot \cos.\frac{c}{2} + lo \cdot \sin.\frac{c}{2} + mp \cdot \sin.\frac{c}{2}\right) : lo \cdot mp = 1 + \cos.\frac{c}{2} : 1$$

ce qu'il fallait démontrer.

38. *Théorème.*

(Fig. 1.) *Dans un angle $bca = c$, étant inscrits un cercle tangent f, et deux autres cercles e, d, tangens au premier en l, m, et qui se touchent en n; le rectangle des deux excès de chacune des deux communes tangentes intérieures lo, mp, multipliées par le cosinus de $\frac{c}{4}$, sur le rayon du cercle touché f, multiplié par le sinus de $\frac{c}{4}$, est équivalent à la moitié du carré de ce rayon.*

Les droites $fE\eta\lambda$, $vtlx'y$, étant perpendiculaires sur kl, et par conséquent parallèles, les triangles $\eta\gamma f$, ykv, sont semblables. Puis, dans le quadrilatère $klyu$, inscriptible au cercle, les angles $lyk = luk$, la ligne $u\gamma l\vartheta$ est droite, et les angles $uk'\vartheta = ykv$. Il s'ensuit que les triangles ykv, $uk'\vartheta$, $\gamma\delta\vartheta$, sont semblables. Par conséquent les triangles $\eta\gamma f$, $\gamma\delta\vartheta$, sont semblables. On prouvera de même la similitude des triangles $\vartheta\delta f$, $\delta\gamma\eta$.

On aura donc la proportion

$$\eta\gamma : \gamma f = \gamma\delta : \delta\vartheta$$

et substituant les valeurs

$$\eta\gamma = k\eta - k\gamma = 2\,mp \cdot \cos.\frac{c}{4} - 2fk \cdot \sin.\frac{c}{4}$$

$$\delta\vartheta = \vartheta k' - k'\delta = 2\,lo \cdot \cos.\frac{c}{4} - 2fk \cdot \sin.\frac{c}{4}$$

$$\gamma f = fk,\ \gamma\delta = 2fk$$

on obtient l'équation

$$\left(lo \cdot \cos. \frac{c}{4} - fk \cdot \sin. \frac{c}{4}\right) \cdot \left(mp \cdot \cos. \frac{c}{4} - fk \cdot \sin. \frac{c}{4}\right) = \frac{1}{2}\, fk^2$$

conformément à l'énoncé du théorème.

39. *Théorème.*

(Fig. 1.) *Dans un angle* $bca = c$, *étant inscrits un cercle tangent* f, *et deux autres cercles* e, d, *tangens au premier en* l, m, *et qui se touchent en* n; *et étant menées les deux communes tangentes intérieures* lo, mp, *qui coupent les côtés en* o, p; *le rectangle entre les excès des distances des intersections* o, p, *au sommet* c, *sur la distance du centre* f *au sommet* c, *est au carré de cette distance, comme le double carré du sinus de* $\frac{c}{4}$, *est à l'unité.*

Ensuite, les cercles f, d, *touchant l'un des côtés de l'angle en* k, g', *et la tangente* lo *le coupant en* λ, *si l'on prend les points* π, ϱ, σ, *tels que les segmens* $c\pi$, $c\varrho$, $p\sigma$, *soient respectivement égaux à* cf, co, $p\pi$; *le point* π *divisera en segmens proportionnels les lignes* $c\varrho$, pk, *et les lignes* cp, ϱk. *Puis, joignant* $f\sigma$, *l'angle* $\lambda f\sigma$ *sera égal au quart de l'angle* c.

Les droites fp, tmg', sont perpendiculaires sur km, et par conséquent parallèles. Donc les angles $fp\pi = mg'k$. Dans le quadrilatère $kmg'u$ inscriptible au cercle, on a les angles $mg'k = muk$. Donc les angles $fp\pi = muk = zuk'$. De plus, les angles $f\pi p = zk'u = 90^\circ + \frac{c}{4}$. Par conséquent les triangles $f\pi p$, $zk'u$, sont semblables, ce qui donne:

$$1)\ \begin{cases} f\pi : \pi p = zk' : k'u \\ \text{ou } \tfrac{1}{2} f\pi : \pi p = \vartheta k' : k'u. \end{cases}$$

Prenant $c\varphi = c\pi = cf$, on aura les angles $f\varphi o = \vartheta k'u = 90^\circ + \frac{c}{4}$. Les droites fo, hll', étant perpendiculaires sur $k'l$, et par conséquent parallèles, on aura les angles $fo\varphi = lhk'$. Dans le quadrilatère $k'lh\vartheta$ inscriptible au cercle, on a les angles $lhk' = l\vartheta k' = u\vartheta k'$. Donc l'angle $fo\varphi = u\vartheta k'$. Par conséquent les triangles $fo\varphi$, $u\vartheta k'$, sont semblables, ce qui donne

$$2.)\ \vartheta k' : k'u = o\varphi : f\varphi.$$

On tire des proportions 1. 2. la suivante

$$\tfrac{1}{2} f\pi : \pi p = o\varphi : f\varphi$$

ou

$$\pi p \cdot o\varphi = \tfrac{1}{2} f\pi \cdot f\varphi$$

substituant les valeurs

$$f\pi = f\varphi = 2cf \cdot \sin.\tfrac{c}{4}$$

$$o\varphi = oc - cf,\ \pi p = cp - cf,$$

on obtient:

$$3)\ \left\{\begin{array}{l} (oc - cf) \cdot (cp - cf) = 2cf^2 \cdot \sin.^2 \tfrac{c}{4} \\ \text{ou}\ (oc - cf) \cdot (cp - cf) : cf^2 = 2 \sin.^2 \tfrac{c}{4} : 1. \end{array}\right.$$

La sécante Ec perpendiculaire sur $f\pi$, la coupant en deux parties égales en τ, donne le quadrilatère $cf\tau k$ inscriptible au cercle, et partant l'équation

$$\tfrac{1}{2} f\pi \cdot f\varphi = f\pi \cdot \pi\tau = k\pi \cdot \pi c$$

et puisque $c\varrho = oc$, $o\varphi = \varrho\pi$, on aura:

$$4)\ \left\{\begin{array}{l} \varrho\pi \cdot \pi p = k\pi \cdot \pi c \\ \text{ou}\ c\pi : \pi\varrho = p\pi : \pi k \\ \text{ou}\ c\pi : \pi p = \varrho\pi : \pi k. \end{array}\right.$$

Joignant $p\tau$, on aura $f\tau = \tau\pi$, $\pi p = p\sigma$, et par conséquent $p\tau$ parallèle à $f\sigma$, qui coupe la sécante Ec en ψ. Donc les angles $f\psi\tau = p\tau\psi = E\tau p$. Le quadrilatère $Ep\pi\tau$, inscriptible au cercle à cause des angles droits $Ep\pi$, $E\tau\pi$, donne l'angle $E\tau p = E\pi p = cE\pi + Ec\pi$. Donc l'angle $f\psi\tau = cE\pi + Ec\pi$. Or l'angle $f\psi\tau = cEf + Ef\psi = cE\pi + \lambda f\sigma$. Par conséquent l'angle $\lambda f\sigma = Ec\pi = \frac{c}{4}$, ce qu'il fallait démontrer.

40. *Théorème.*

(Fig. 5.) *Dans un triangle abc étant inscrits un cercle M et trois cercles tangens d, e, f, dont l'un seulement, savoir le cercle f, est touché par les deux autres, en l, m; ayant mené les communes tangentes intérieures lo, mp, qui coupent les côtés en o, p; et ayant joint les droites fo, fp; si on les projette sur les sécantes Mb, Mc, les projections st, ru, sont égales entr'elles.*

D'abord, le quadrilatère $Mrfs$ est inscriptible au cercle, à cause des angles droits Mrf, Msf. Partant les angles $Mrs = Mfs$, $Msr = Mfr$. Or les angles $Mfs + fMs = 90°$, $Mab + Mbc + Mcb = 90°$, et l'angle $fMs = Mbc + Mcb$, donc l'angle $Mfs = Mab$, donc $Mrs = Mab$. Par conséquent, joignant rs, cette droite est parallèle au côté ab, d'où l'on conclut:

$$Ma : ar = Mb : bs.$$

Abaissant les perpendiculaires MB, rx, sur ca et MA, sy, sur bc, on aura

$$Ma : ar = MB : rx$$

$$Mb : bs = MA : sy$$

partant

$$MB : rx = MA : sy.$$

Or les perpendiculaires MA, MB, sont égales entr'elles, comme rayons du cercle inscrit M. On conclut donc cette première équation:

$$1.) \quad rx = sy.$$

Ensuite, le quadrilatère $fpdr$ étant inscriptible au cercle à cause des angles droits fpd, frd, on a l'angle $fpr = fdr = mdu$. Dans le quadrilatère $dump$ inscriptible à cause des angles droits dmp, dup, on a les angles $mdu = mpu$. Donc l'angle $fpr = mpu$, partant $fpr + rpm = rpm + mpu$, ou $fpm = rpu$. Dans le quadrilatère $rupx$ inscriptible à cause des angles droits rup, rxq, on a l'angle $rpu = rxu$. Donc l'angle $fpm = rxu$, ou $fpk = rxu$. Abaissant la perpendiculaire fv sur pu, le quadrilatère $fvpk$ inscriptible à cause des angles droits fvp, fkp, donne l'angle $fpk = fvk$, et par conséquent l'angle $rxu = fvk$. Les lignes fk, fv, étant parallèles à rx, ru, respectivement, on aura l'angle $urx = kfv$. Donc les triangles urx, kfv, sont semblables, ce qui donne la proportion:

$$2.) \quad rx : ru = fv : fk.$$

Pareillement, de l'autre côté, abaissant la perpendiculaire fw sur ot, on fera les conclusions suivantes:

le quadr. inscript. $foes$ donne l'angle $fos = fes = let$
le quadr. inscript. $etlo$ donne l'angle $let = lot$

donc l'angle $fos = lot$
partant l'angle $fol = sot$
ou l'angle $fok' = sot$
le quadr. inscript. $stoy$ donne l'angle $sot = syt$
le quadr. inscript. $fwok'$ donne l'angle $fok' = fwk'$
partant l'angle $syt = fwk'$
fk', fw, parallèles à sy, st, donnent l'angle $tsy = k'fw$.

Par conséquent les triangles tsy, $k'fw$, sont semblables, d'où l'on déduit la proportion:

$$3.)\quad st : sy = fk' : fw.$$

Or les rayons $fk = fk'$, et par l'équation 1) $rx = sy$. Donc, des proportions 2. 3. on tire *ex aequo*

$$4.)\quad st : ru = fv : fw.$$

Or, dans les rectangles $fruv$, $fstw$, on a les côtés opposés $ru = fv$, et $st = fw$. Par conséquent

$$5.)\quad st = ru$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire.

Si l'on préfère les expressions trigonométriques, on trouve

$$ru = fk \cdot \sin \tfrac{a}{2} + pk \cdot \cos. \tfrac{a}{2} = \sqrt{fk} \cdot \left[\sqrt{fk} \cdot \sin. \tfrac{a}{2} + \sqrt{dg} \cdot \cos. \tfrac{a}{2}\right]$$

$$st = fk' \cdot \sin. \tfrac{b}{2} + ok' \cdot \cos. \tfrac{b}{2} = \sqrt{fk} \cdot \left[\sqrt{fk} \cdot \sin. \tfrac{b}{2} + \sqrt{eh} \cdot \cos. \tfrac{b}{2}\right]$$

et puisque $ru = st$, par le théorème ci-dessus démontré, on obtient l'équation

$$6)\ \sqrt{fk} \cdot \sin. \tfrac{a}{2} + \sqrt{dg} \cdot \cos. \tfrac{a}{2} = \sqrt{fk} \cdot \sin. \tfrac{b}{2} + \sqrt{eh} \cdot \cos. \tfrac{b}{2}.$$

Cette équation, développée d'une manière différente par deux Géomètres de Berlin, *MM. Crelle* et *Lehmus*, leur a donné lieu à la solution trigonométrique qu'ils ont publiée à ce sujet, et que je vais présenter avec des modifications convenables.

41. *Solution trigonométrique du problème.*

(Fig. 1.) Le cercle d étant touché par les cercles e, f, en n, m, si l'on mène les communes tangentes intérieures nq, mp, le théorème No. 40. donne l'équation

$$1)\quad dg \cdot \sin.\frac{b}{2} + nq \cdot \cos.\frac{b}{2} = dg \cdot \sin.\frac{c}{2} + mp \cdot \cos.\frac{c}{2}.$$

Le cercle e étant touché par les cercles f, d en l, n, si l'on mène encore la commune tangente intérieure lo, on aura par le même théorème

$$2.)\quad eh \cdot \sin.\frac{c}{2} + lo \cdot \cos.\frac{c}{2} = eh \,.\, \sin.\frac{a}{2} + nq \cdot \cos.\frac{a}{2}.$$

Multipliant ces équations par lo, mp, respectivement, et observant que, par le théorème No. 25.

$$3.)\quad dg \cdot lo = mp \cdot nq,\ eh \cdot mp = nq \cdot lo:$$

il viendra:

$$mp \cdot np \,.\, \sin.\frac{b}{2} + nq \cdot lo \cdot \cos.\frac{b}{2} = mp \cdot nq \cdot \sin.\frac{c}{2} + lo \cdot mp \cdot \cos.\frac{c}{2}$$

$$nq \cdot lo \,.\, \sin.\frac{c}{2} + lo \cdot mp \cdot \cos.\frac{c}{2} = nq \cdot lo \cdot \sin.\frac{a}{2} + mp \cdot nq \cdot \cos.\frac{a}{2}.$$

Réunissant ensemble, et effaçant les termes qui se détruisent et les communs facteurs, on obtient

$$4.)\quad lo \cdot \left(\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \sin.\frac{a}{2}\right) = mp \cdot \left(\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \sin.\frac{b}{2}\right).$$

Pour réduire les coëfficiens, on aura d'abord

$$\cos.\frac{b}{2} - \sin.\frac{a}{2} = 2\sin.\left(45 - \frac{a+b}{4}\right)\sin.\left(45 - \frac{a-b}{4}\right) = 2\sin.\frac{c}{4} \cdot \sin.\left(45 - \frac{a-b}{4}\right)$$

$$\cos.\frac{a}{2} - \sin.\frac{b}{2} = 2\sin.\left(45 - \frac{a+b}{4}\right)\sin.\left(45 + \frac{a-b}{4}\right) = 2\sin.\frac{c}{4} \cdot \sin.\left(45 + \frac{a-b}{4}\right)$$

et puisque

$$\sin.\frac{c}{2} = 2\sin.\frac{c}{4} \cdot \cos.\frac{c}{4}$$

on aura

$$\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \sin.\frac{a}{2} = 2\sin.\frac{c}{4} \cdot \left(\cos.\frac{c}{4} + \sin.\left(45 - \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

$$\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \sin.\frac{b}{2} = 2\sin.\frac{c}{4} \cdot \left(\cos.\frac{c}{4} + \sin.\left(45 + \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

ou

$$\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \sin.\frac{a}{2} = 4\cdot\sin.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{a}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)$$

$$\sin.\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \sin.\frac{b}{2} = 4\cdot\sin.\frac{c}{4}\cdot\cos.\frac{b}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)$$

Substituant dans l'équation 4., et réduisant, on obtient

$$5)\left\{\begin{array}{l} lo = mp\cdot\dfrac{\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cdot\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)} \\ \text{ou} \\ nq = dg\cdot\dfrac{\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cdot\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)} \end{array}\right.$$

et par un procédé analogue

$$6)\left\{ mp = dg\cdot\frac{\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cdot\cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)}\right.$$

Multipliant les équations 5., 6., on aura

$$7)\left\{ lo = dg\cdot\frac{\sin.^2\left(45+\frac{a}{4}\right)\cdot\cos.\frac{b}{4}\cdot\cos.\frac{c}{4}}{\cos.^2\frac{a}{4}\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)}.\right.$$

Le cercle M, du rayon ϱ, touchant les côtés du triangle en A, B, C, donne

$$2\cdot Ba = 2\,\varrho\cdot\cot.\frac{a}{2} = ca + ab - bc$$

$$ca = ck + ag + 2\,mp$$

$$ab = ag + bh + 2\,nq$$

$$bc = bh + ck + 2\,lo$$

$$ca + ab - bc = 2\,ag + 2\,mp + 2\,nq - 2\,lo$$

donc

$$8)\quad \varrho\cdot\cot.\frac{a}{2} = dg\cdot\cot.\frac{a}{2} + mp + nq - lo$$

Substituant les valeurs de *mp*, *nq*, *lo*, multipliant par tg. $\frac{a}{2}$, et observant que

$$\text{tg.}\,\frac{a}{2}\cdot\text{cot.}\,\frac{a}{2}=1,\quad \text{tg.}\,\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)}{\cos.\,\frac{a}{4}}=\frac{\sin.\,\frac{a}{4}}{\cos.\left(45+\frac{a}{4}\right)}$$

on parvient à l'équation finale:

$$9)\left\{\varrho=dg+dg\cdot\sin.\frac{a}{4}\cdot\frac{\left[\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)\cos.\frac{a}{4}\cos.\frac{b}{4}+\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)\cos.\frac{c}{4}\cos.\frac{a}{4}-\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}\right]}{\cos.\frac{a}{4}\cdot\cos.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)}.\right.$$

Pour la réduire, on fera usage des deux formules

$$2\cos.\alpha\cdot\cos.\beta=\cos.(\alpha+\beta)+\cos.(\alpha-\beta)$$
$$2\sin.\alpha\cdot\cos.\beta=\sin.(\alpha+\beta)+\sin.(\alpha-\beta)$$

qui donnent le moyen de développer le produit de trois sinus ou cosinus

$$4\cdot\sin.\,m\cdot\cos.\,n\cdot\cos.\,p=\left\{\begin{matrix}\sin.\,(m+n+p)+\sin.\,(m+n-p)\\+\sin.\,(m-n+p)+\sin.\,(m-n-p)\end{matrix}\right\}.$$

En y faisant les substitutions convenables, on trouve

$$10)\left\{\begin{aligned}&4\cdot\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)\cos.\frac{a}{4}\cos.\frac{b}{4}=1+\cos.\frac{a}{2}+\cos.\frac{b}{2}+\sin.\frac{c}{2}\\&4\cdot\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)\cos.\frac{c}{4}\cos.\frac{a}{4}=1+\cos.\frac{c}{2}+\cos.\frac{a}{2}+\sin.\frac{b}{2}\\&4\cdot\sin.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}=1+\cos.\frac{b}{2}+\cos.\frac{c}{2}+\sin.\frac{a}{2}\\&4\cdot\cos\left(45+\frac{a}{4}\right)\sin.\left(45+\frac{b}{4}\right)\sin.\left(45+\frac{c}{4}\right)=1-\sin.\frac{a}{2}+\sin.\frac{b}{2}+\sin.\frac{c}{2}\\&4\cdot\cos.\left(45+\frac{a}{4}\right)\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}=\cos.\frac{a}{2}+\cos.\frac{b}{2}+\sin.\frac{c}{2}.\end{aligned}\right.$$

L'équation 9., deviendra donc:

$$\varrho=dg+dg\cdot\frac{\sin.\frac{a}{4}\left(1+2\cos.\frac{a}{2}-\sin.\frac{a}{2}+\sin.\frac{b}{2}+\sin.\frac{c}{2}\right)}{\cos.\frac{a}{4}\left(1-\sin.\frac{a}{2}+\sin.\frac{b}{2}+\sin.\frac{c}{2}\right)}$$

$$\varrho = dg \cdot \frac{2\,\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{2} + \left(\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4} + \mathrm{cos.}\,\frac{a}{4}\right)\left(1 - \mathrm{sin.}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{b}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{c}{2}\right)}{\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4}\left(1 - \mathrm{sin.}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{b}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{c}{2}\right)}$$

Or

$$2\,\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{2} = 2\,\mathrm{sin}\,\frac{a}{4}\left(\mathrm{cos}\,\frac{a}{4} + \mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\right)\left(\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} - \mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\right)$$

$$2\,\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{2} = \left(\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} + \mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\right) \cdot \left(2\,\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\,\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} - 2\,\mathrm{sin}\cdot^{2}\frac{a}{4}\right)$$

$$2\,\mathrm{sin.}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} = \left(\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} + \mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\right) \cdot \left(\mathrm{sin.}\,\frac{a}{2} + \mathrm{cos.}\,\frac{a}{2} - 1\right).$$

Donc

$$\varrho = dg \cdot \frac{\left(\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} + \mathrm{sin.}\,\frac{a}{4}\right)\left(\mathrm{cos.}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{b}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{c}{2}\right)}{\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} \cdot \left(1 - \mathrm{sin.}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{b}{2} + \mathrm{sin.}\,\frac{c}{2}\right)}$$

$$\varrho = dg \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{a}{4}\right) \cdot 4 \cdot \mathrm{cos.}\left(45 + \frac{a}{4}\right) \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{b}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{c}{4}}{\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} \cdot 4 \cdot \mathrm{cos.}\left(45 + \frac{a}{4}\right) \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{b}{4}\right) \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)}$$

$$\varrho = dg \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{a}{4}\right) \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{b}{4}\;\mathrm{cos.}\,\frac{c}{4}}{\mathrm{cos.}\,\frac{a}{4}\;\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)\;\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)}$$

On conclut de là, en renversant:

$$11)\begin{cases} dg = \varrho \cdot \dfrac{\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{b}{4}\right) \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{c}{4}\right) \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{4}}{\sqrt{2} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{b}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{c}{4} \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)} \\[2ex] eh = \varrho \cdot \dfrac{\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{c}{4}\right) \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{a}{4}\right) \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{b}{4}}{\sqrt{2} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{c}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)}, \\[2ex] fk = \varrho \cdot \dfrac{\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)\;\mathrm{sin.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)\;\mathrm{cos.}\,\frac{c}{4}}{\sqrt{2} \cdot \mathrm{cos}\,\frac{a}{4} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{b}{4} \cdot \mathrm{sin.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)}. \end{cases}$$

conformément au problème No. 29.

42. *Théorème.*

(Fig. 6.) *Une droite* ac *étant divisée harmoniquement ou en segmens proportionnels en* b, d; *les droites menées aux points de division d'un point quelconque* e, *coupent harmoniquement ou en segmens proportionnels toute autre droite* fh, *située dans le même plan.*

Je pourrais renvoyer, pour la démonstration, à celle que Mr. *de Carnot* a publiée dans son *Essai sur la théorie des transversales* (Paris 1806. Théorème VII.) Mais comme l'illustre auteur fait usage d'expressions trigonométriques, un procédé de simple Géométrie doit paraître plus naturel.

La division harmonique de la droite $abcd$ donne:

$$1)\quad \left\{ \text{ou}\quad \begin{array}{l} ab : bc = ad : dc \\ bc : cd = ba : ad. \end{array}\right.$$

Les sécantes ea, eb, ec, ed, coupant l'autre droite en f, g, h, k, respectivement, on mènera d'abord aw, cx, parallèles à ebg, ce qui donne

$$ab : bc = wg : gx$$

et menant ensuite ay, cz, parallèles à edk, on aura

$$ad : dc = yk : kz$$

d'où l'on conclut par la proportion 1.

$$2)\quad wg : gx = yk : kz$$

cx parallèle à ebg donne $ec : eh = gx : gh$

cz parallèle à edk donne $ec : eh = kz : kh$

aw parallèle à ebg donne $ef : ea = fg : wg$

ay parallèle à edk donne $ef : ea = fk : yk.$

On aura donc

$$gx : gh = kz : kh$$
$$fg : wg = fk : yk$$

et puisque

$$wg : gx = yk : kz$$

on conclut *ex aequo*

$$fg : gh = fk : kh$$

ce qu'il fallait démontrer.

43. *Théorème.*

(Fig. 7.) *Dans un triangle abc étant inscrits un cercle M, qui touche les côtés en A, B, C, et deux cercles tangens d, e, qui se touchent en n, et qui sont tangens à la base ab en g, h', et aux côtés ca, bc, en g', h.*

Si l'on joint les extrémités de la base ab au contact n, les droites an, bn, vont couper la circonférence M en r, s, ensorte que la corde rs est un diamètre; et elles divisent harmoniquement les sécantes Ma, Mb, en u, v.

Puis, joignant les intersections s, r, avec les centres d, e, les droites sd, re, se coupent mutuellement dans un point f de la base ab, tel que si t est l'intersections de la base par le diamètre prolongé rs, elle soit divisée harmoniquement dans les points f, t.

D'abord, les triangles semblables agd, aCM, donnent

$$1)\ \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} ad : dg = aM : MC \\ ad : dn = aM : Mr. \end{array} \right.$$

Les triangles semblables $bh'e$, bCM, donnent

$$2)\ \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} be : eh' = bM : MC \\ be : en = bM : Ms. \end{array} \right.$$

Donc, si parmi les deux intersections de la circonférence M par chacune des droites an, bn, on choisit celles, pour lesquelles l'angle arM est de la même espèce avec and; et l'angle bsM avec bne, les proportions 1. 2. indiquent que les rayons Mr, Ms, sont parallèles à la ligne des centres de, d'où il résulte que rs est un diamètre du cercle M.

On en conclut que, les points u, v, étant les intersections des droites Mda, Meb, par bn, an, respectivement, on aura

$$Mu : ud = Ms : dn$$
$$Ma : ad = Mr : dn$$

$$Mv : ve = Mr : en$$
$$Mb : be = Ms : en$$

d'où l'on tire les proportions

$$3)\ \begin{cases} Mu : ud = Ma : ad \\ Mv : ve = Mb : be \end{cases}$$

qui indiquent la *section harmonique* de Md en u, a; et de Me en v, b.

Cela prouvé, le théorème du No. 42 fait reconnaître que, le diamètre rs coupant la base en t, si les lignes sd, re, la coupent en f, f', elle doit être divisée harmoniquement en t, f, et en t, f', de sorte qu'on ait

$$af : fb = af' : f'b = at : tb.$$

Par conséquent ces deux intersections sont nécessairement identiques.

44. *Théorème.*

(Fig. 5.) *Dans un triangle abc étant inscrits un cercle* **M**, *et trois cercles tangens d, e, f, dont l'un seulement, savoir le cercle f, est touché par les deux autres en l, m; si l'on joint ces contacts avec les extrémités de la base ab, les droites am, bl, vont concourir dans un même point z de la sécante Mc, et la distance des centres Mf est divisée harmoniquement en z, c.*

Car, supposons que la sécante Mc soit coupée par les droites am, bl, en z, z', on aura par le théorème No. 43, les proportions

$$Mz : zf = Mc : cf$$
$$Mz' : z'f = Mc : cf$$

d'où l'on conclura évidemment que les intersections z, z', sont identiques.

45. *Problème.*

(Fig. 8.) *Dans un triangle abc inscrire deux cercles tangens d, e, ou* **D**, **E**, *tels que la ligne qui joint leurs centres, soit parallèle à une droite fk donnée de position.*

Inscrivez au triangle donné le cercle M, et menez son diamètre rs parallèle à fk. Joignez ar, bs, qui se coupent en n; et as, br, qui se coupent en N. Ces intersections n, N, seront les contacts demandés. Menez par ces points de contact des droites parallèles à fk, qui coupent les sécantes Ma, Mb, en d, e, et D, E, centres des cercles demandés.

46. *Théorème.*

(Fig. 7.) *Dans un triangle abc étant inscrits un cercle M, et deux cercles tangens d, e; si l'on prend sur leur commune tangente intérieure nq, et en sens contraire, un segment nw égal à la tangente au cercle M, Ac ou Cb; le rectangle des segmens de la tangente nq, qw, est au rectangle des segmens de la base aq, qb, comme la tangente Ac ou cB, est à la base ab.*

Si l'on abaisse sur l'une des sécantes Ma, Mb, une perpendiculaire qL, qui rencontre l'autre sécante en O, le rectangle des segmens de cette perpendiculaire $Lq \cdot qo$, est égal au rectangle des segmens de la tangente $nq \cdot qw$.

Joignant le contact M aux deux extrêmités de la base ab, et l'intersection q de la tangente par la base, aux deux centres d, e; si les droites an, qe, se coupent mutuellement en x, et bn, qd en y; et qu'on joigne ay, bx, ces droites vont concourir dans le point w de la tangente, déterminé comme on vient de le dire.

Abaissant les perpendiculaires bH, aK, sur les sécantes Ma, Mb, elles vont concourir dans un point G de la perpendiculaire MC. On aura donc

$$ag : dg = GC : Cb$$

$$h'b : eh' = Cb : MC$$

donc *ex aequo*

$$ag \cdot h'b : dg \cdot eh' = GC : MC$$

ou

$$ag \cdot h'b : nq^2 = GC : MC.$$

Or, puisque

$$ag = aq - nq, \; bh' = bq - nq$$

on aura

$$ag \cdot bh' = aq \cdot qb - ab \cdot nq + nq^2$$

donc, substituant cette valeur

$$aq \cdot qb - ab \cdot nq + nq^2 : nq^2 = GC : MC$$

dividendo

$$1.) \quad aq \cdot qb - ab \cdot nq : nq^2 = GM : MC.$$

*

Puisque les angles $Mab + Mba + Mcb = 90°$, $Mcb + AMc = 90°$, $Mab + Mba = HMb$, on aura l'angle $HMb = AMc$, donc les triangles rectangles HMb, AMc, sont semblables; et puisque les triangles rectangles bHa, MHG, sont pareillement semblables, on conclut les proportions

$$Ac : Hb = MA : MH$$

$$Hb : ab = MH : GM$$

ex aequo

$$2.)\quad ab : Ac = GM : MC$$

Les proportions 1. 2. donnent évidemment

$$aq \cdot qb - ab \cdot nq : nq^2 = ab : Ac$$

ou

$$aq \cdot qb - ab \cdot nq : nq^2 = ab : nw$$

et puisque

$$nq^2 : ab \cdot nq = nq : ab$$

on a *ex aequo*

$$aq \cdot qb - ab \cdot nq : ab \cdot nq = nq : nw$$

componendo

$$aq \cdot qb : ab \cdot nq = qw : nw$$

et puisque

$$ab \cdot nq : nq \cdot qw = ab : qw$$

on a *ex aequo*

$$3.)\quad aq \cdot qb : nq \cdot qw = ab : nw = ab : Ac.$$

La droite qL perpendiculaire sur Mb, rencontrant Ma en O, on a les angles $qaO = MGb = Mac$, et $aOq = GbM = acM$, donc les triangles aqO, GMb, aMc, sont semblables, et donnent

$$aq : qO = GM : Mb$$

$$qb : Lq = Mb : MC$$

donc *ex aequo*

$$4.)\quad aq \cdot qb : Lq \cdot qO = GM : MC.$$

L'accord des proportions 2. 3. 4. donne

$$5.)\quad nq \cdot qw = Lq \cdot qO.$$

Du point b menant une parallèle à la tangente nq, qui coupe les droites $anxr$, qex, en R, S, on conclura les proportions

$$aq : nq = ab : bR$$

ou

$$aq \cdot qb : nq \cdot qb = ab : bR$$

la proportion 3. donne

$$nq \cdot qw : aq \cdot qb = nw : ab$$

ex aequo

$$qw : qb = nw : bR$$

$qb = bS$, donc

$$qw : bS = nw : bR$$

alternando

$$qw : nw = bS : bR$$

dividendo

$$nq : nw = RS : Rb.$$

Par conséquent les points b, x, w, sont en ligne droite.

Du point a menant une parallèle à la tangente nq, qui coupe les droites $bnsy$, qdy, en U, V, on aura:

$$bq : nq = ab : Ua$$

ou

$$bq \cdot qa : nq \cdot qa = ab : Ua$$

la proportion 3. donne

$$nq \cdot qw : bq \cdot qa = nw : ab$$

ex aequo

$$qw : qa = nw : Ua$$

$qa = Va$, donc

$$qw : nw = Va : Ua$$

dividendo

$$nq : nw = UV : Ua.$$

Par conséquent les points a, y, w, sont en ligne droite.

47. *Problème.*

(Fig. 9.) *Dans un triangle abc inscrire deux cercles tangens d, e, ou D, E, tels que la commune tangente intérieure nq ou Nq, qu'on leur aura menée, coupe la base ab dans un point donné q.*

Inscrivez dans le triangle donné le cercle M, qui touche le côté bc en A. Joignez Ma, Mb, et du point donné q abaissez une perpendiculaire qL sur l'une des sécantes, qui coupe l'autre en O. Décrivez un cercle R, dont la circonférence passe par les points L, O, et dont le diamètre soit égal à la tangente Ac. Du centre q décrivez deux circonférences concentriques et tangentes à la circonférence R. Ces deux circonférences vont couper la base, l'une en g, h', l'autre en G, H', points de contact de la base par les cercles demandés. Élevez des perpendiculaires sur ces points, qui rencontrent les sécantes Ma, Mb, dans les centres des cercles demandés.

Cette solution est tirée du théorème No. 46, qui donne les relations entre les tangentes Nq, nq, savoir

$$Nq - nq = Ac$$

$$nq \cdot qN = Lq \cdot qO.$$

48. *Problème.*

(Fig. 10.) *Dans un triangle abc inscrire trois cercles tangens d, e, f, ou D, E, F, tels que les contacts des deux premiers par les côtés bc, ca, se confondent avec les contacts du troisième cercle par les mêmes côtés.*

D'abord, inscrivant le cercle M qui touche les côtés en A, B, C, il est évident que si les cercles d, e, touchent les côtés ca, bc, en g', h, les perpendiculaires élevées sur ces points, doivent concourir dans un même point f de la sécante Mc, qui sera le centre du troisième cercle.

Par conséquent les tangentes Bg', Ah, doivent être égales entr'elles. Or si les cercles d, e, touchent la base ab en g, h', on a $Bg' = Cg$, et $Ah = Ch'$. Il suit de-là que les tangentes Cg, Ch', doivent être égales entr'elles, c'est-à-dire que C doit être le milieu de la tangente gh'.

Or la commune tangente intérieure des cercles d, e, menée par leur contact n, coupe la tangente extérieure gh' en deux parties égales. Donc cette tangente intérieure doit couper la base ab dans le point donné C. Cette question se pourra donc résoudre comme le problème No. 47. Mais, puisqu'elle n'en est qu'un cas particulier, la solution en doit être rendue plus simple.

En effet, on reconnaîtra sur le champ que

$$cg'^2 = cd^2 - dg'^2 = cd^2 - dn^2$$
$$ch^2 = ce^2 - eh^2 = ce^2 - en^2.$$

Or on a trouvé que $cg' = ch$.

On conclura donc que $cd^2 - dn^2 = ce^2 - en^2$, c'est-à-dire que la droite cn doit être perpendiculaire sur la ligne des centres de. Or Cn est perpendiculaire sur cette ligne des centres. Par conséquent *la droite Cc doit être tangente aux cercles d, e.*

Le problème se résoudra donc de la manière suivante:

Ayant inscrit le cercle M, qui touche les côtés en A, B, C, joignez Cc, et divisez l'angle aCc en deux parties égales par une droite qui coupe les sécantes Ma, Mb, en d, E; ensuite, divisez l'angle bCc en deux parties égales par une droite qui coupe les sécantes Mb, Ma, en e, D. Joignez de, DE, qui coupent la droite Cc en n, N, de sorte que $Nn = Ac = cB$.

J'invite le lecteur à comparer cette solution avec celle que Mr. *Lehmus* a publiée sur le même problème dans le II^{me} Volume de sa Géométrie. Appendice, § 8. 9. (Berlin 1820.)

49. *Théorème.*

(Fig. 11.) *Dans un triangle abc étant inscrit un cercle M, qui en touche les côtés en A, B, C; sur le contact C de la base étant élevé un diamètre perpendiculaire CD, et l'extrémité D de ce diamètre étant jointe avec le sommet c par une droite qui coupe la base en E; cette intersection E, et le contact C, sont également distants des extrémités de la base ab.*

Par le point D menant une parallèle à la base, qui coupe les côtés ca, bc, en h, k, les triangles hDM, MCa, et kDM, MCb, sont semblables, donc

$$Dh : MD = MC : Ca$$

$$MD : Dk = Cb : MC$$

ex aequo

$$Dh : Dk = Cb : Ca$$

De plus

$$Dh : Dk = Ea : Eb$$

donc

$$Cb : Ca = Ea : Eb$$

componendo

$$ab : Ca = ab : Eb$$

donc

$$Ca = Eb,\ Cb = Ea$$

ce qu'il fallait démontrer.

50. *Théorème.*

(Fig. 11.) *Deux droites parallèles GH, NO, et un cercle M tangent à l'une d'elles en C, étant donnés; si d'un point c pris à volonté dans l'autre parallèle, on mène des tangentes cA, cB, au cercle, qui rencontrent la base en a, b; l'aire du rectangle des distances de ces intersections au contact C, est invariable, quelle que soit la position du point c. Et le rapport du contour du triangle tangent abc à la base ou à la tangente Ac, est pareillement invariable.*

Élevez sur le contact un diamètre perpendiculaire CD qui coupe la parallèle NO en d, joignez cD qui coupe la base en E, et par le point D menez une parallèle à la base qui coupe la tangente cB en h; vous en conclurez que

$$Ea : Dh = Ec : Dc$$

$$Cd : Dd = Ec : Dc$$

donc

$$Ea : Dh = Cd : Dd$$

le théorème No. 49 donne

$$Ea = Cb$$

donc

$$Cb : Dh = Cd : Dd$$

ou

$$aC \cdot Cb : aC \cdot Dh = Cd : Dd.$$

Les triangles semblables hDM, MCa, donnent

$$Dh : MD = MC : aC$$

ou

$$aC \cdot Dh = MC \cdot MD = MC^2$$

donc

$$\text{1)}\quad aC \cdot Cb : MC^2 = Cd : Dd.$$

La perpendiculaire Cd, et son segment Dd, sont indépendans du mouvement du point c dans sa parallèle NO. Par conséquent le rectangle $aC \cdot Cb$ est invariable, conformément à l'énoncé.

Abaissant les perpendiculaires bf, ag, sur les sécantes Ma, Mb, elles vont concourir dans un même point e de la parpendiculaire Cd, pour lequel on aura

$$aC \cdot Cb = MC \cdot Ce$$

substituant cette valeur dans la proportion 1) on conclut

$$\text{2)}\quad \left\{\begin{array}{rl} & Ce : MC = Cd : Dd \\ \text{dividendo} & Me : MC = CD : Dd \\ \text{ou} & Me \cdot Dd = 2MC^2. \end{array}\right.$$

Il suit de là que la position du point e est pareillement indépendante du mouvement du point c dans sa parallèle NO.

De plus, puisque les angles Mab, Mba, $McA = 90°$, $Mab + Mba = bMf$, $bMf + Mbf = 90°$, on aura les angles Mbf, McA égaux entre eux, partant les triangles Mbf, McA, semblables, ce qui donne

$$Ac : MA = bf : Mf.$$

Or

$$ab : Me = bf : Mf$$

et

$$MA = MC, \text{ donc } Ac : MC = ab : Me$$

alternando

$$Ac : ab = MC : Me$$

componendo

$$3)\ \begin{cases} Ac + ab : ab = Ce : Me \\ Ac + ab : Ac = Ce : MC. \end{cases}$$

Or la somme $Ac + ab$ est égale au demi-contour du triangle abc. Par conséquent ce contour est dans un rapport invariable à la base ab, ou à la tangente Ac, quelle que soit la variation du point c dans sa parallèle NO.

51. *Théorème.*

(Fig. 11.) *Deux droites parallèles* GH, NO, *et un cercle* M *tangent à l'une d'elles en* C, *étant donnés; si d'un point* c *pris à volonté dans l'autre parallèle on mène des tangentes* cA, cB, *au cercle, qui rencontrent la base en* a, b; *ces intersections et le centre* M *sont dans la circonférence d'un cercle donné de grandeur et de position, dont le centre est dans la sécante prolongée* Mc.

Pour le déterminer, élevez sur le contact C un diamètre perpendiculaire CD, joignez cD qui rencontre la base en E, sur l'intersection E élevez une perpendiculaire EF qui coupe la sécante prolongée Mc en F; cela fait, MF est le diamètre du cercle en question.

En effet, le diamètre prolongé CD rencontrant la parallèle NO en d; et les perpendiculaires bf, ag, abaissées respectivement sur les sécantes Ma, Mb, se coupant mutuellement dans ce diamètre en e, on aura par le théorème No. 50:

$$aC \cdot Cb = MC \cdot Ce$$

$$Ce : MC = Cd : Dd$$

et

$$Cd : Dd = Ec : Dc = EF : MD$$

donc

$$Ce : MC = EF : MD.$$

Or $MC = MD$, donc *la perpendiculaire* EF *est égale à* Ce. Partant

$$aC \cdot Cb = MC \cdot EF$$

ou, du centre M menant une parallèle à la base qui coupe la perpendiculaire EF en l, on aura $MC = El$, par conséquent

$$aC \cdot Cb = FE \cdot El$$

de plus par le théorème No. 49, on a

$$Ca = Eb, \quad Cb = Ea,$$

donc

$$aE \cdot Eb = FE \cdot El.$$

Il suit de là que le quadrilatère $Fabl$ est inscriptible à un cercle dont le centre, par conséquent, doit être également distant des intersections a, b. Or, par le théorème No. 49, les points C, E, sont également distants des mêmes intersections a, b. Donc le centre du cercle en question est également distant des points C, E, et par suite, des points M, l. Or le point l est dans la circonférence de ce cercle. Par conséquent le point M sera aussi dans cette circonférence. Et puisque l'angle inscrit MlF est droit, MF est le diamètre de ce cercle, ce qu'il fallait démontrer.

52. *Théorème.*

(Fig. 11.) *Dans un triangle abc etant inscrit un cercle M, le rectangle des distances du contact* **C** *aux extrémités de la base ab est au rectangle des côtés adjacents, comme le carré du sinus du demi-angle opposé, est à l'unité.*

D'abord on aura

$$bc = Cb + Ac$$
$$ca = aC + Ac$$

faisant le rectangle des côtés adjacents, on trouve

$$bc \cdot ca = Ac^2 + Ac \cdot ab + aC \cdot Cb.$$

Le théorème No. 50 donne

$$aC \cdot Cb : MC^2 = Cd : Dd = Ce : MC = Ac \cdot ab : Ac.$$

On obtient donc

$$aC \cdot Cb : MC^2 = Ac^2 + Ac \cdot ab : Ac^2$$

alternando

$$aC \cdot Cb : Ac^2 + Ac \cdot ab = MC^2 : Ac^2$$

componendo

$$aC \cdot Cb : Ac^2 + Ac \cdot ab + aC \cdot Cb = MC^2 : Mc^2$$

donc

$$aC \cdot Cb : bc \cdot ca = MC^2 : Mc^2.$$

Or

$$MC : Mc = MA : Mc = \sin. \frac{bca}{2} : 1$$

donc

$$aC \cdot Cb : bc \cdot ca = \sin.^2 \frac{bca}{2} : 1.$$

53. *Théorème.*

(Fig. 12.) *Dans un angle bca étant inscrit un cercle M, et sur le centre étant élevée une perpendiculaire à la sécante Mc, qui coupe les côtés en d, e; si l'on mène une droite quelconque tangentiellement au cercle, qui coupe les côtés en b, a; le rectangle des segmens des côtés, terminés aux extrêmités de la perpendiculaire et de la tangente, est une quantité invariable et égale au carré du rayon.*

En effet, on a les angles $Mbd + Mae + Mcd = 90°$, $Mdc + Mcd = 90°$, $Mdc = Mbd + bMd$, donc les angles bMd, Mae, sont égaux entre eux, partant, les triangles bMd, Mae, sont semblables, ce qui donne la proportion:

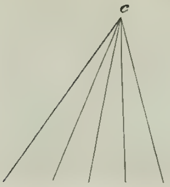
$$ae : Me = Md : bd$$

ou

$$ae \cdot bd = Md^2 = Me^2.$$

NATURAL HISTORY

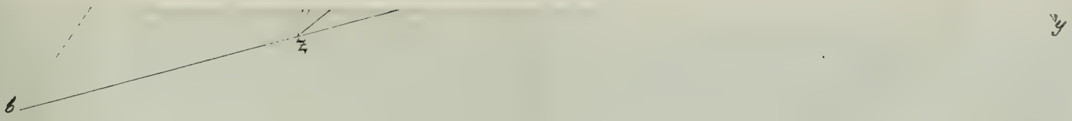
Fig. 1.



AVIS. A cause de l'absence de M. le B^{on} **Kittlitz** la planche 5^{me} appartenante à son mémoire: „*Ueber die Vögel der Inselgruppe von Boninsima*“, et représentant le *Turdus terrestris* n'a pas encore pu être livrée. Elle sera jointe à l'une des prochaines livraisons qui formeront le Tome II. de ce recueil.

Nachricht für den Buchbinder.

Beim Einbinden des ersten Bandes dieser Sammlung von Abhandlungen ist für die fehlende 5te Kupfertafel zur Abhandl. des H^{n}. v. Kittlitz: Ueber die Vögel der Inselgruppe von Boninsima, ein Falz zu lassen, damit sie später eingeschaltet werden könne.



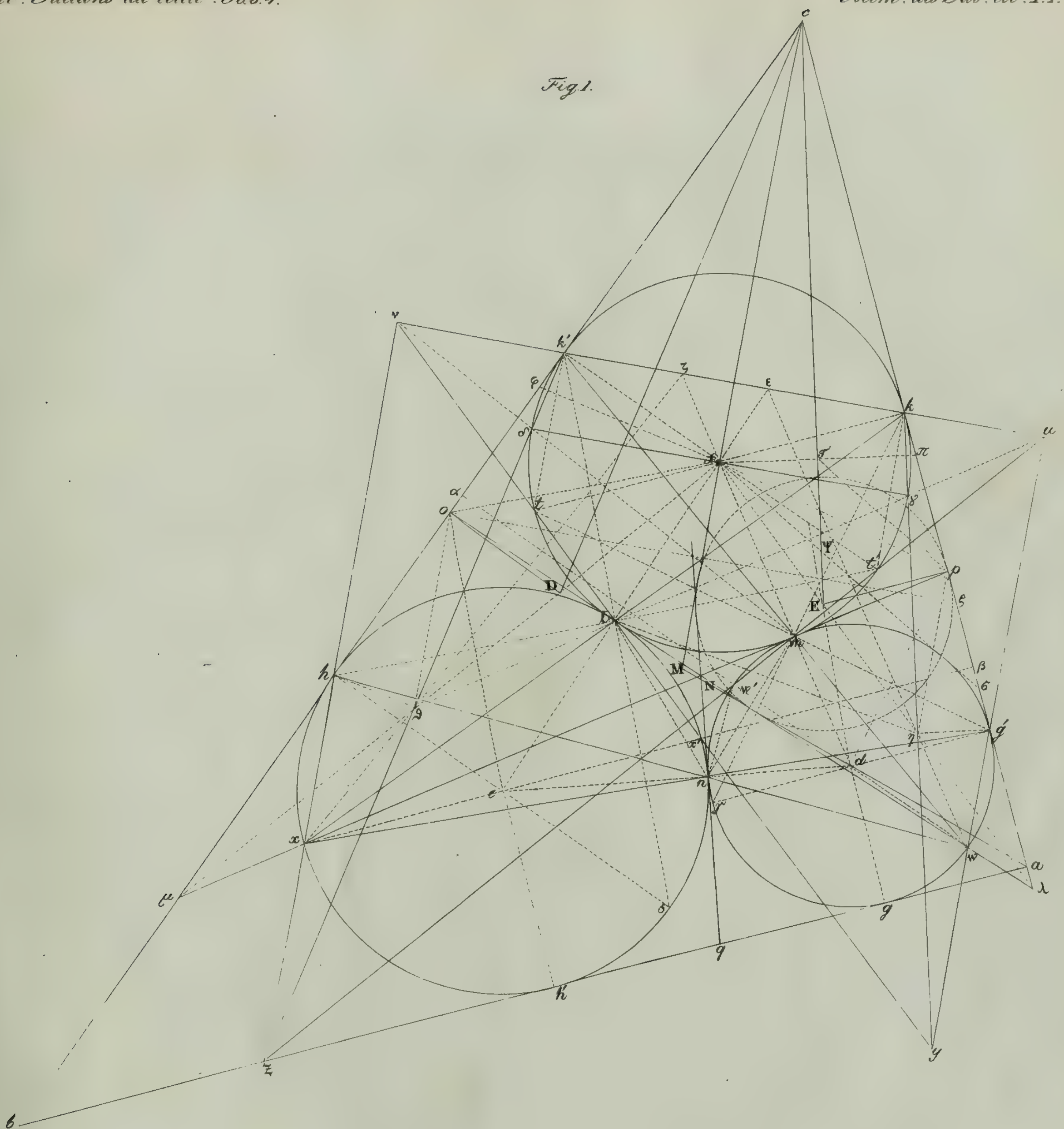
alternando

$$aC \cdot Cb : Ac^2 + Ac \cdot ab = MC^2 : Ac^2$$

BRITISH NATURAL HISTORY

BRITISH NATURAL HISTORY

Fig. 1.


c
v
k'
ζ
ε
k
u
φ
δ
π
σ
γ
α
o
t
Ψ
t'
ρ
ξ
D
E
L
m
h
M
N
m'
β
σ
g'
θ
x'
η
d
n
r
e
x
w
a
λ
μ
s
g
q
h
y
z
b

BRITISH MUSEUM NAT. HISTORY

Fig. 2.

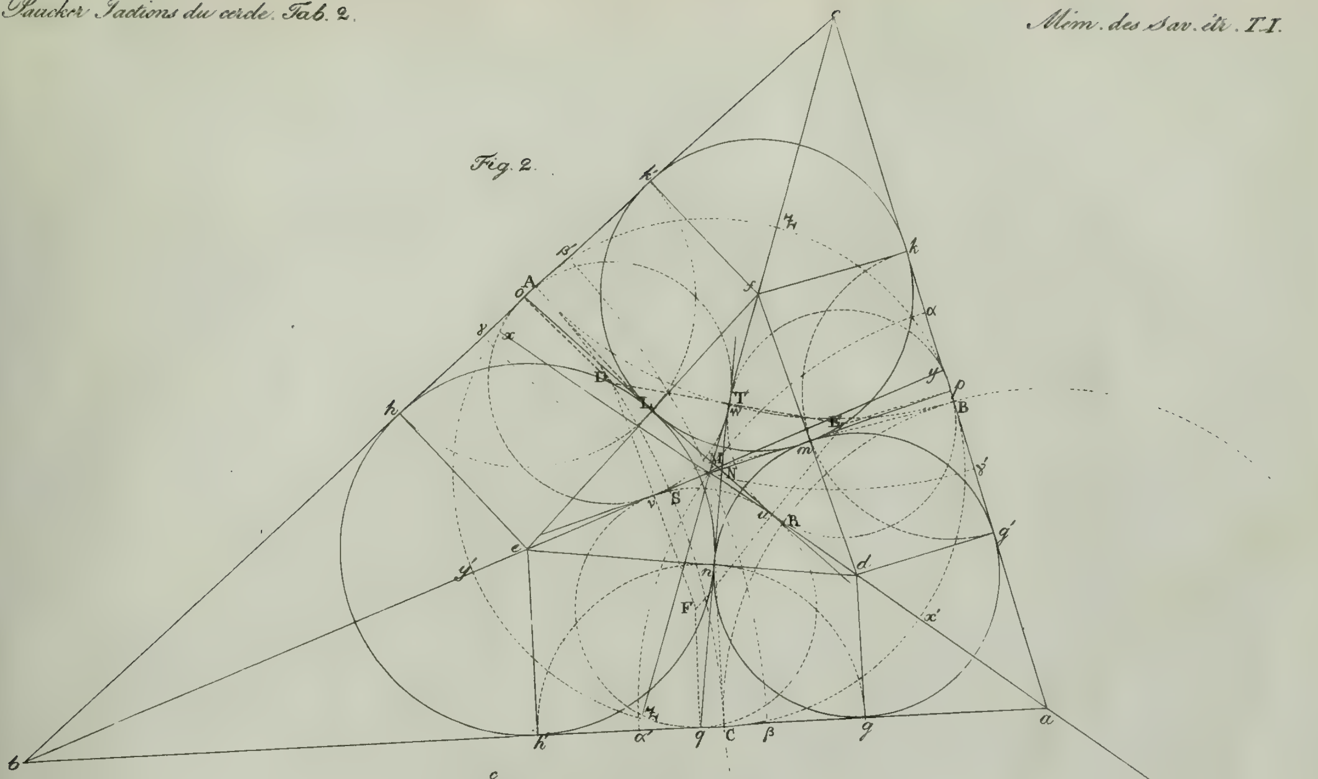
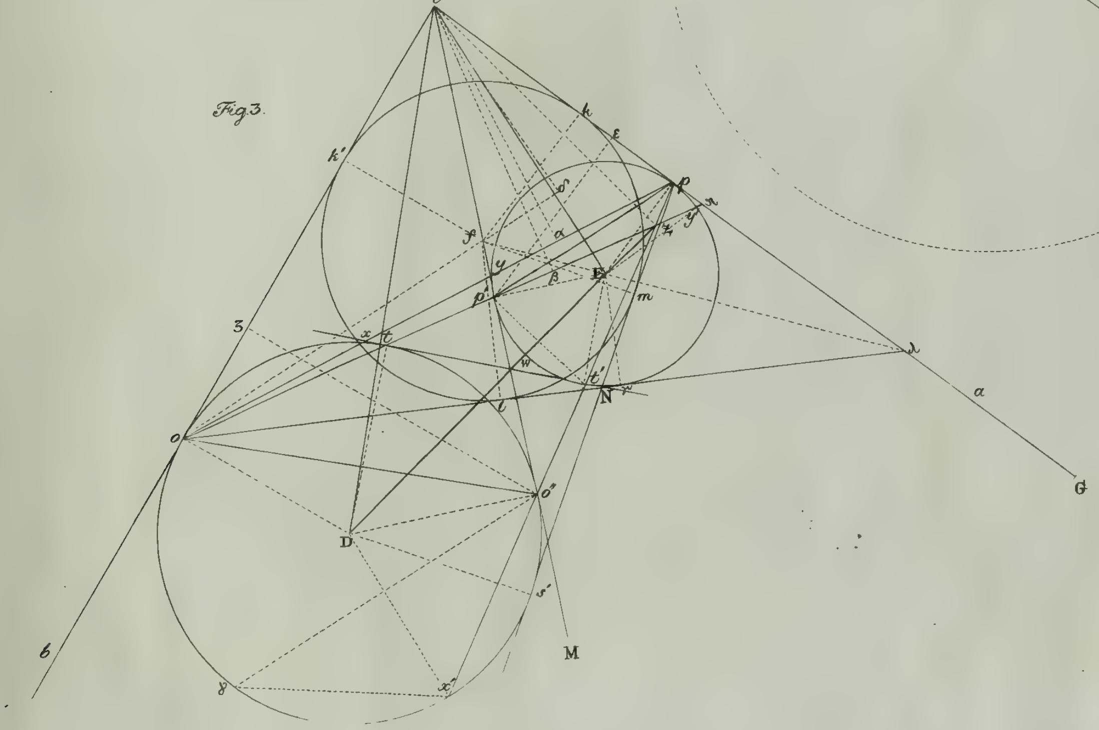

c
k'
k
Z
A
o
β'
f
α
γ
x
D
L
T
W
y
p
B
E
h
m
M
N
γ'
S
v
u
R
e
g'
y'
d
n
F
x'
Z
h'
α'
q
C
β
g
a
b

Fig. 3


c
k
ε
k'
p
r
o'
f
α
z
y
y'
E
β
p'
m
3
x
t
λ
w
t'
N
v
l
a
o
o''
G
D
s'
b
M
δ
x'
R'

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

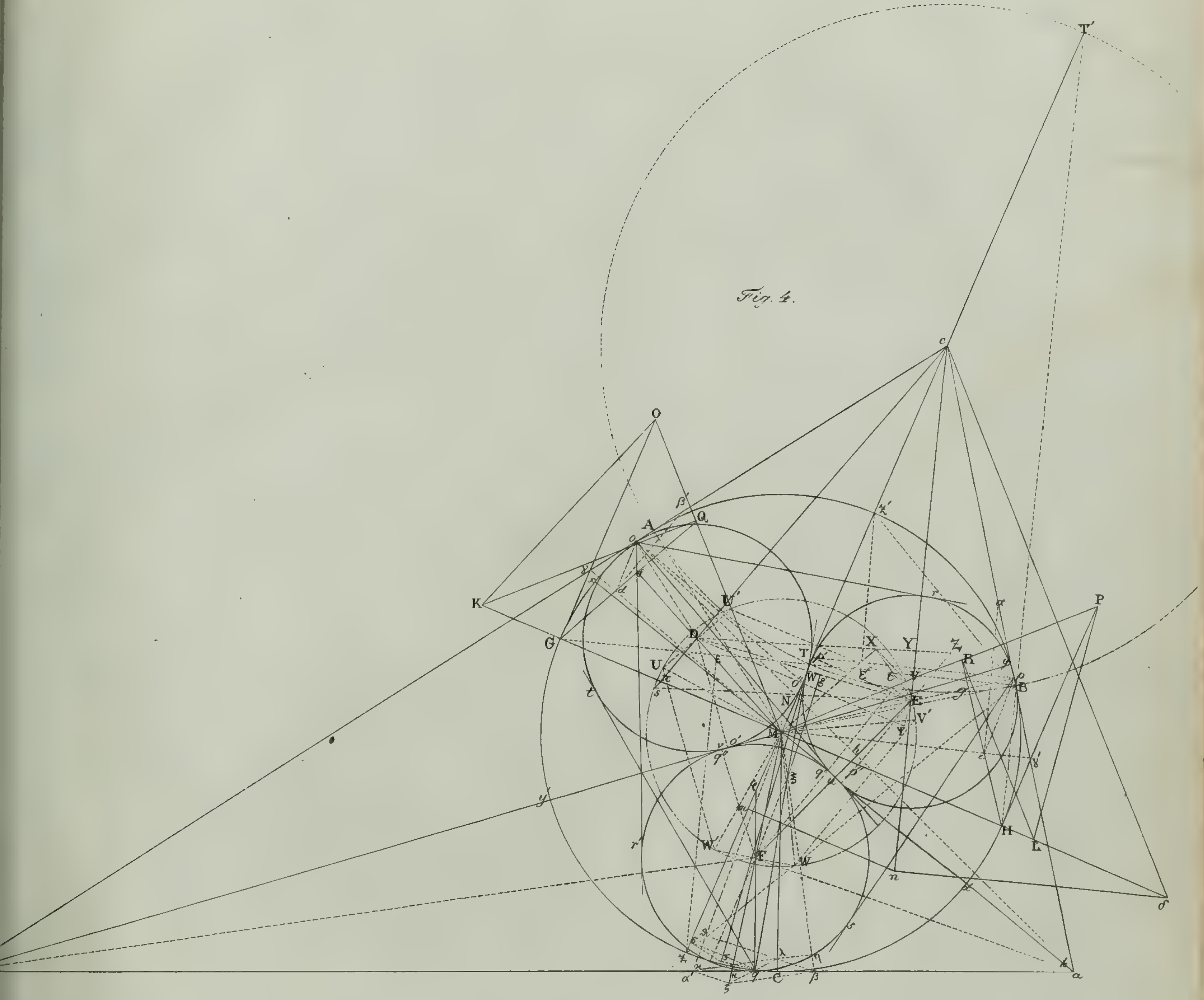


Fig. 4.
T′
c
O
A
Q
β′
K
G
U
D
U′
T
X
Y
Z
R
P
E
V
V′
N
M
B
H
L
W
W′
F
n
δ
α
C
β
α′
γ′
r
t
s
o

NATURAL HISTORY

Fig. 5.

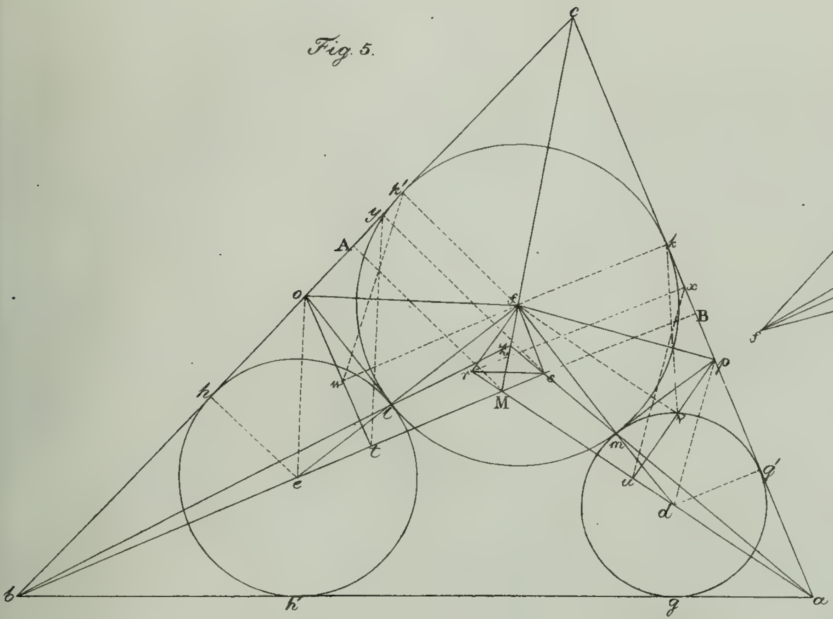

c
k'
y
A
k
o
f
x
B
p
h
z
r
s
M
l
t
u
m
v
q'
e
d
b
h'
g
a

Fig. 6.

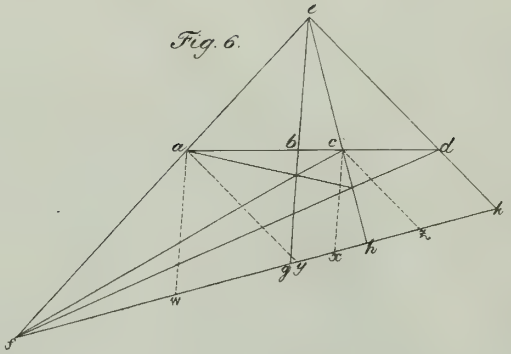

e
a
b
c
d
k
g
y
x
h
z
w
f

Fig. 8.

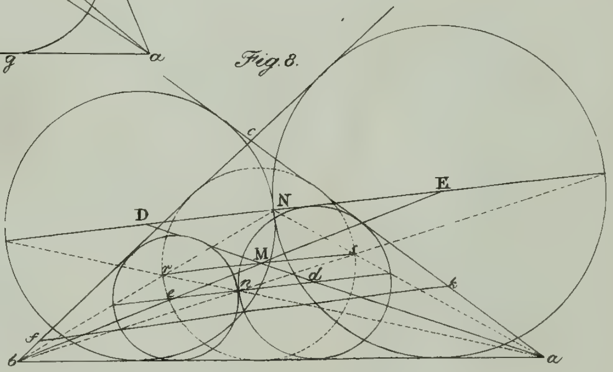
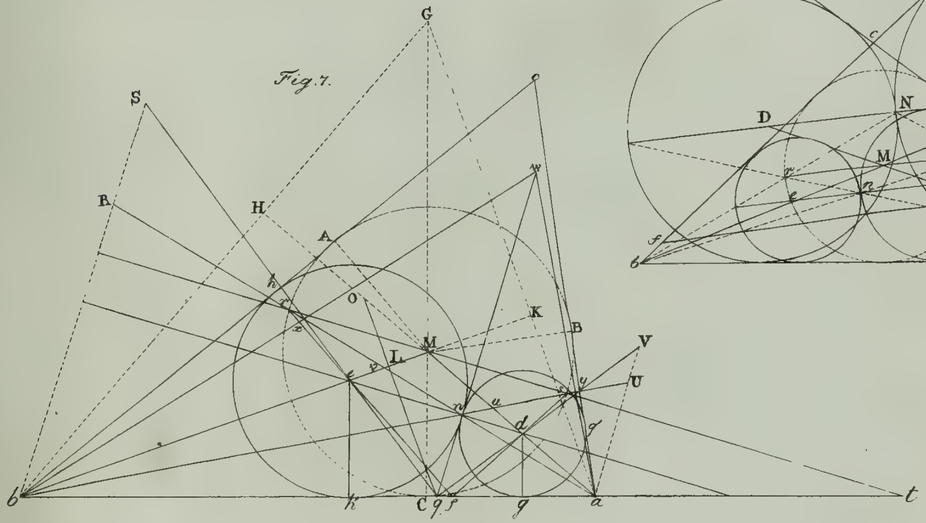

c
E
D
N
M
r
s
e
n
d
k
f
b
a

Fig. 7.


G
S
c
B
H
A
w
h
r
x
O
K
M
B
V
L
e
v
n
u
y
U
d
q'
b
h
C
q
f
g
a
t

NATURAL HISTORY.

Fig. 9.

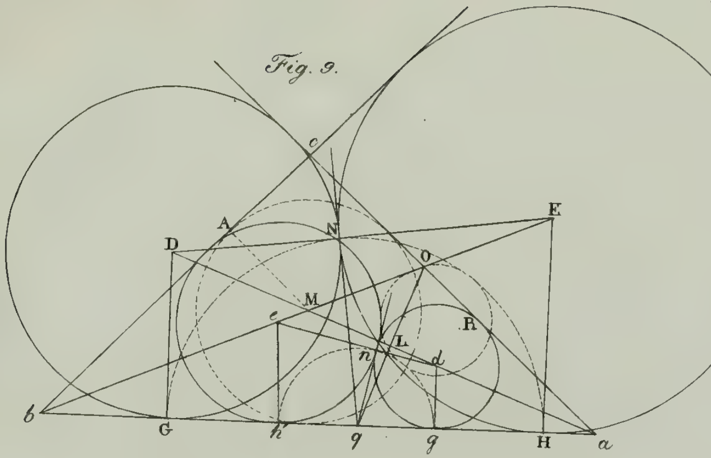

c
A
N
E
D
O
M
R
e
L
n
d
b
G
h
g
g
H
a

Fig. 12.

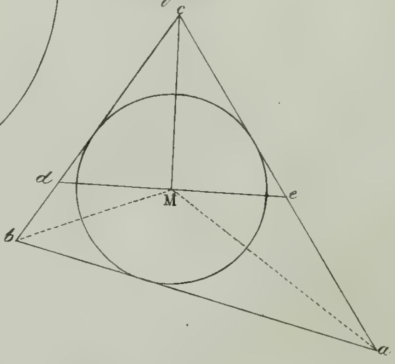


Fig. 10.

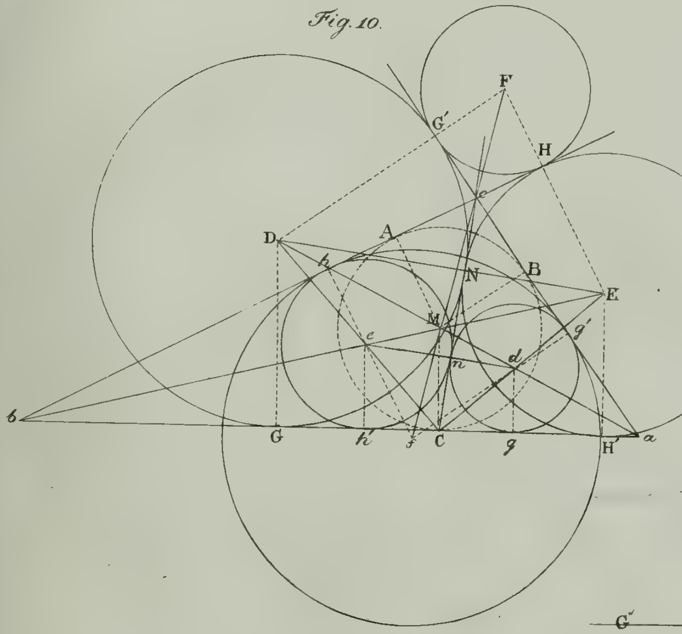
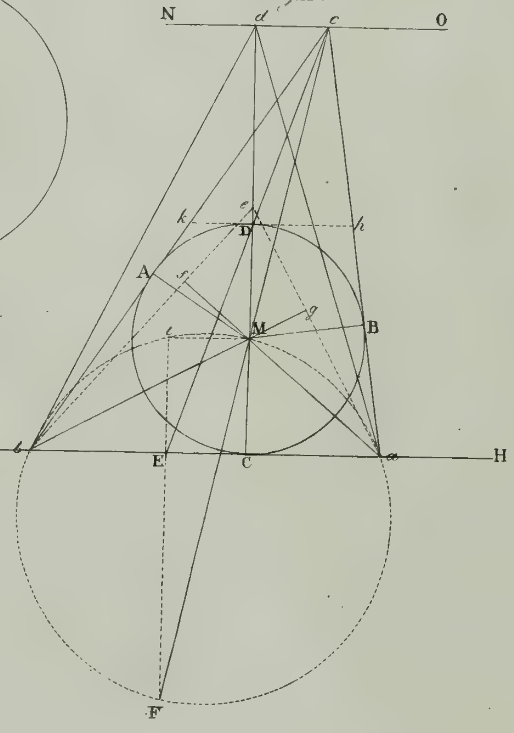

F
G′
H
c
A
D
p
N
B
E
M
e
n
d
g′
b
G
h′
f
C
g
H′
a

Fig. 11.


N
d′
c
O
e
k
D
h
A
f
g
M
B
i
G′
b
E
C
a
H
F

NATURAL HISTORY.

AVIS.

L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg a publié dans le premier siècle de son existence 73 volumes de ses Mémoires. Ce recueil se compose de cinq séries publiées successivement sous les titres suivans: Commentarii Acad. Imp. sc. Petrop. depuis 1726—1747 (14 volumes); Novi Commentarii 1747—1776 (21 volumes); Acta 1776—1783 (12 volumes); Nova Acta 1783—1803 (15 volumes) et Mémoires 1803—1826 (11 volumes). A chacune de ces différentes époques se rattache quelque souvenir remarquable, tels que: en 1726 la première séance publique en présence de S. M. l'Impératrice Catherine Ire, ou l'époque de l'inauguration de l'Académie; en 1747 les règlemens donnés à cette société par l'Impératrice Elisabeth fille de Pierre Ir; en 1776 la célébration solennelle du jubilé semi-séculaire; en 1783 la nomination de Mme la Princesse Daschkoff Directeur de l'Académie; en 1803 les nouveaux règlemens donnés par l'Empereur Alexandre; enfin en 1826 la célébration de la fête séculaire honorée de la présence de S. M. l'Empereur NICOLAS Ir et de toute Son auguste Famille. Le désir de faciliter le débit de ses Mémoires et d'en accélérer la publication a fait choisir à l'Académie un nouveau mode dans la rédaction de ce recueil dont commence aujourd'hui la sixième série, sous le même titre de *Mémoires*. Cette nouvelle série paraîtra en deux corps d'ouvrage ou sections éparses et indépendantes l'une de l'autre. La première section comprendra les Mémoires de Mathématiques, d'Astronomie, de Physique, de Chimie et des Sciences naturelles; la seconde ceux des Sciences politiques, d'Histoire et de Philologie. Ces deux sections paraîtront par livraisons de 10 à 15 feuilles chacune. Six de ces livraisons formeront un volume, et à la première section sera ajoutée une septième livraison, comme supplément, qui contiendra l'histoire de l'Académie et les rapports lus dans les séances et dont la publication aura été arrêtée. Les mémoires seront placés pêle-mêle dans l'ordre de leur présentation. Les sections seront vendues séparément, mais personne ne pourra acheter des livraisons séparées. En achetant la première livraison on payera le volume entier et on touchera un billet pour recevoir les livraisons suivantes. Les mémoires des savans étrangers seront séparés de ceux de l'Académie et formeront un recueil à part qui se publiera de la même manière, par livraisons de 10 à 15 feuilles imprimées chacune, et dont de même six formeront un volume.

4/5 D [illegible]

TABLE DES MATIÈRES.

M. Paucker, Mémoire sur une question de géométrie relative aux tactions des cercles 503